УДК 539.3

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З МНОЖИНОЮ ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ НА ШАРНІРНОМУ З'ЄДНАННІ З ОБОЛОНКОЮ

Т. В. Шопа

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України;
79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б; e-mail: tetyana.sh@gmail.com

В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки з довільною кількістю абсолютно жорстких включень довільної геометричної форми, орієнтації та розташування, які шарнірно з'єднані з оболонкою. Торці оболонки є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на зовнішній границі оболонки. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Крайову задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: *ортотропна циліндрична оболонка, коливання, включення, власні частоти, послідовнісний підхід, функція Гріна, непрямий метод граничних елементів, метод колокацій.*

Постановка проблеми. В сучасному авіа- та кораблебудуванні, широко використовуються анізотропні оболонкові елементи з включеннями різної форми та розташування, які працюють за змінних в часі навантажень. Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів.

Аналіз відомих результатів досліджень. Коливанням суцільних тонкостінних елементів конструкцій багато уваги приділяють чимало фахівців з механіки деформівного твердого тіла [1-3]. Однак недостатньо є опублікованих матеріалів, які стосуються динамічної поведінки ортотропних тонкостінних елементів конструкцій з включеннями, зокрема, циліндричних оболонок. В даній роботі узагальнено результати, отримані в роботі [4].

Мета роботи є побудувати розв'язок узагальненої задачі про усталені коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки з множиною включень довільної форми орієнтації та розташування, які шарнірно з'єднані з оболонкою, з довільними гармонічними в часі граничними умовами на зовнішній довільної форми границі оболонки ефективним методом в рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви і всі інерційні компоненти.

Постановка задачі. Розглянути задачу про усталені коливання ортотропної замкненої циліндричної оболонки. Оболонка містить N абсолютно жорстких включень довільної форми та розташування, які шарнірно з'єднані з оболонкою. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j=\overline{1,N}$. Нехай на включення маси $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}=P_0^{(j)}\sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні оболонки і діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснює поступальний рух вздовж нормального напрямку до серединної поверхні оболонки. Зовнішня границя оболонки є також довільної форми, а її контурами − криві $L^{(0)}$ та $L^{(N+1)}$. Можна уявити таку оболонку, яка в термінах серединної поверхні займає багатозв'язну область Ω, як результат довільного вирізу з суцільної оболонки, довжини l та радіуса R, яка в термінах серединної поверхні займає однозв'язну область Π канонічної форми. Криволінійну систему координат розміщено в уявно розширеній області. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають з осями ортотропії матеріалу оболонки (рис. 1).

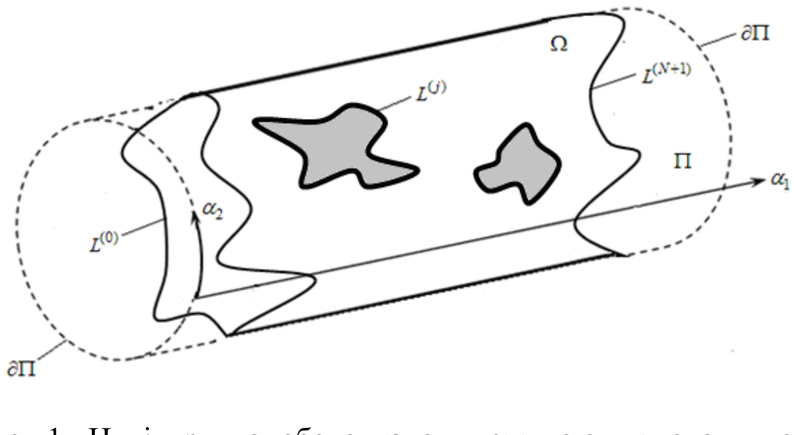

Рис. 1. Циліндрична оболонка з множиною включень довільної конфігурації та зовнішньою границею довільної форми

Використано такі позначення: n, τ − нормальний і дотичний вектор уздовж деякого напрямку; E_i − модулі Юнга; G_{12}, G_{13}, G_{23} − модулі зсуву матеріалу; ν_{12}, ν_{21} − коефіцієнти Пуассона; ρ − густина матеріалу; $2h$ – товщина оболонки; $k_1=0$, $k_2=1/R$ – головні кривини; q_i, m_i − компоненти зовнішнього навантаження; w − прогин; u_n, u_τ − нормальні та тангенціальні компоненти переміщень точок серединної поверхні; γ_n, γ_τ − нормальні та тангенціальні компоненти кутів повороту нормалі до серединної поверхні; Q_n − нормальна компонента перерізувальних сил; M_n, N_n − нормальні компоненти і M_τ, N_τ − танегенціальні компоненти моментів та мембранних сил.

Нехай на одному торці оболонки задано розподілені компоненти переміщень

$$w = w_0(\alpha)\sin(\omega t),\quad u_n = u_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_n = \gamma_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$u_\tau = u_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \alpha \in L^{(0)}, \tag{1}$$

а на другому − задано розподілені компоненти зусиль

$$Q_n = Q_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad M_n = M_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad N_n = N_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),$$
$$N_\tau = N_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad M_\tau = M_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\ \alpha \in L^{(N+1)}. \tag{2}$$

Граничні умови на контурах включень мають вигляд

$$w(\alpha,t) = \tilde{w}^{(j)}(\alpha,t),\ u_\tau(\alpha,t) = 0,\ \gamma_\tau(\alpha,t) = 0, M_n(\alpha,t) = 0,\ N_n(\alpha,t) = 0,$$
$$\alpha \in L^{(j)},\ j = \overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\tilde{w}^{(j)} = \tilde{w}_0^{(j)}\sin(\omega t)$ − переміщення j-ого включення.

Якщо покласти

$$w_0(\alpha) = u_{n0}(\alpha) = \gamma_{n0}(\alpha) = u_{\tau 0}(\alpha) = \gamma_{\tau 0}(\alpha) = 0,$$
$$Q_{n0}(\alpha) = M_{n0}(\alpha) = N_{n0}(\alpha) = N_{\tau 0}(\alpha) = M_{\tau 0}(\alpha) = 0,$$

то матимемо випадок жорсткого закріплення одного торця та вільного другого торця.

Розв'язок задачі. Для дослідження використано рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви. Рівняння руху мають вигляд [5]

$$\frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -m_i + \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2 \gamma_i}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i = -q_i + 2h\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\ \ (i = 1,2),$$
$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{11} + k_2 N_{22}) = -q_3 + 2h\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{4}$$

На основі припущень стосовно розподілу напружень і переміщень

$$U_i = u_i + \gamma_i\alpha_3,\ U_3 = w,\ \sigma_{33} = \begin{cases} 0, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{33}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$
$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3,\ \ (-h \le \alpha_3 \le h),\quad \sigma_{i3} = \begin{cases} \dfrac{Q_i}{2h}, & |\alpha_3| < h, \\ \sigma_{i3}^{\pm}, & \alpha_3 = \pm h, \end{cases}$$
$$(i, j = 1,2;\ i \ne j) \tag{5}$$

фізичні співвідношення набудуть вигляду

$$N_{ii} = B_i \left[\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \nu_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_j} + \left(k_i + \nu_{ij} k_j \right) w \right], \ \ N_{ij} = N_{ji} = B_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} \right),$$

$$M_{ii} = D_i \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_i} + \nu_{ij} \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_j} \right), \ M_{ij} = M_{ji} = D_{ij} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial \alpha_i} \right),$$

$$Q_i = \Lambda_i \left(\gamma_i + \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - k_i u_i \right),$$

$$D_i = \frac{2h^3 E_i}{3\left(1 - \nu_{ij}\nu_{ji}\right)}, \ \ D_{ij} = \frac{2h^3 G_{ij}}{3}, B_{ij} = 2hG_{ij}, \ \ B_i = \frac{2hE_i}{1 - \nu_{ij}\nu_{ji}}, \ \ \Lambda_i = 2hG_{i3},$$

$$i, j = 1, 2; \quad i \neq j \ . \tag{6}$$

Нормальні та дотичні компоненти переміщень і зусиль визначаються за формулами

$$M_n = M_{11} n_1^2 + 2M_{12} n_1 n_2 + M_{22} n_2^2, \ N_n = N_{11} n_1^2 + 2N_{12} n_1 n_2 + N_{22} n_2^2,$$

$$Q_n = Q_1 n_1 + Q_2 n_2,$$

$$M_\tau = \left(M_{11} n_1 + M_{12} n_2 \right) \tau_1 + \left(M_{21} n_1 + M_{22} n_2 \right) \tau_2,$$

$$N_\tau = \left(N_{11} n_1 + N_{12} n_2 \right) \tau_1 + \left(N_{21} n_1 + N_{22} n_2 \right) \tau_2,$$

$$\gamma_n = n_1 \gamma_1 + n_2 \gamma_2, \ \ \gamma_\tau = \tau_1 \gamma_1 + \tau_2 \gamma_2, \ \ u_n = n_1 u_1 + n_2 u_2, \ \ u_\tau = \tau_1 u_1 + \tau_2 u_2 . \tag{7}$$

Унаслідок підстановки фізичних співвідношень (6) у рівняння руху (4) отримуємо ключові рівняння

$$\left[\mathbf{L} \right] \mathbf{U} = -\mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \left\{ u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2 \right\}^{\mathrm{T}}, \ \ \mathbf{P} = \left\{ q_1, q_2, q_3, m_1, m_2 \right\}^{\mathrm{T}}, \tag{8}$$

$$\mathbf{L}_{11} = B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{33} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \left[k_1 B_1 \left(k_1 + \nu_{12} k_2 \right) + k_2 B_2 \left(k_2 + \nu_{21} k_1 \right) \right] - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{44} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{14} = \mathbf{L}_{41} = k_1 \Lambda_1, \ \ \mathbf{L}_{25} = \mathbf{L}_{52} = k_2 \Lambda_2, \ \ \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0, \ \ \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{12}=\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \ \mathbf{L}_{21}=\left(B_{12}+B_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{45}=\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \ \mathbf{L}_{54}=\left(D_{12}+D_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{34}=-\mathbf{L}_{43}=\Lambda_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\ \ \mathbf{L}_{35}=-\mathbf{L}_{53}=\Lambda_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{13}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\ \ \mathbf{L}_{31}=-\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2},\ \ \mathbf{L}_{32}=-\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}.$$

Рівняння руху включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)}\frac{\partial^2\tilde{w}^{(j)}\left(\alpha,t\right)}{\partial t^2}=P^{(j)}+\int\limits_{L^{(j)}}p^{(j)}\left(\xi,t\right)dl\left(\xi\right),\ \ j=\overline{1,N}, \tag{9}$$

де $p^{(j)}\left(\alpha,t\right)=-Q_n\left(\alpha,t\right),\ \alpha\in L^{(j)}$ − контактні сили взаємодії оболонки та включення. У випадку усталених коливань $p\left(\alpha,t\right)=-Q_n\left(\alpha\right)\sin\left(\omega t\right)$. У результаті маємо крайову задачу (1), (2), (3), (8), (9).

Для розв'язку крайової задачі використовуємо непрямий метод граничних елементів. Функції Гріна знаходимо методом Фур'є за використання секвенціального підходу до представлення дельта-функції Дірака (як границю послідовності дельтаподібних функцій [5-7]). Звідси крайова задача для знаходження функції Гріна складається з рівнянь (8), в яких

$$q_s=\mathrm{T}_s^r\delta_{\varepsilon_1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon_2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega t\right),\quad s=\overline{1,3},$$

$$m_p=\mathrm{T}_{3+p}^r\delta_{\varepsilon_1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)\delta_{\varepsilon_2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)\sin\left(\omega t\right),\ \ p=1,2, \tag{10}$$

$$\delta_{\varepsilon_1}\left(\alpha_1,\alpha_1^r\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon_1}g_1\left(\dfrac{\left|\alpha_1-\alpha_1^r\right|}{\varepsilon_1}\right), & \left|\alpha_1-\alpha_1^r\right|\le\varepsilon_1,\\ 0, & \left|\alpha_1-\alpha_1^r\right|>\varepsilon_1,\end{cases}$$

$$\delta_{\varepsilon_2}\left(\alpha_2,\alpha_2^r\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon_2}g_2\left(\dfrac{\left|\alpha_2-\alpha_2^r\right|}{\varepsilon_2}\right), & \left|\alpha_2-\alpha_2^r\right|\le\varepsilon_2,\\ 0, & \left|\alpha_2-\alpha_2^r\right|>\varepsilon_2,\end{cases}$$

в уявно добудованій області $\Pi : 0 \le \alpha_1 \le l, \Omega \in \Pi$ і однорідних крайових умов на її границі $\partial\Pi$ [8, 9]

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad N_n = 0, \quad u_\tau = 0, \quad \gamma_\tau = 0 \ . \tag{11}$$

Згідно методу Фур'є функції Гріна шукаємо в такій формі:

$$w^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[w_{\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right) + w_{\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right)\right]\sin\left(\omega t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_1^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ \gamma_1^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\begin{Bmatrix} u_{1\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{1\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right) + \begin{Bmatrix} u_{1\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{1\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha\right)\right]\sin\left(\omega t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} u_2^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ \gamma_2^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\begin{Bmatrix} u_{2\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{2\varepsilon km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right) + \begin{Bmatrix} u_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right) \\ \gamma_{2\varepsilon km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\end{Bmatrix}\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right)\right]\sin\left(\omega t\right). \tag{12}$$

Функції у виразах (10) розкладаємо в ряди Фур'є

$$q_3\left(\alpha,\alpha^r,t\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} T_3^r C_{km}(\varepsilon)\left[\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right) + \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right)\right]\sin\left(\omega t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} q_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ m_1\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} T_1^r \\ T_4^r\end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon)\left[\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right) + \Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha\right)\right]\sin\left(\omega t\right),$$

$$\begin{Bmatrix} q_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right) \\ m_2\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} T_2^r \\ T_5^r\end{Bmatrix} C_{km}(\varepsilon)\left[\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right) + \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right)\right]\sin\left(\omega t\right), \tag{13}$$

$$C_{km}\left(\varepsilon\right) = \mu_{km}\frac{4}{l_1 l_2}\varphi_1\left(\lambda_{1k}\varepsilon_1\right)\varphi_2\left(\lambda_{2m}\varepsilon_2\right),$$

$$\lambda_{1k}=\frac{k\pi}{l_1},\ \lambda_{2m}=\frac{m\pi}{l_2},\ l_1=l,\ l_2=2\pi R,$$

$$\Phi_{km}^{cs}(\alpha)=\cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),$$

$$\Phi_{km}^{sc}(\alpha)=\sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),$$

$$\Phi_{km}^{ss}(\alpha)=\sin\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\sin\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),$$

$$\Phi_{km}^{cc}(\alpha)=\cos\left(\lambda_{1k}\alpha_1\right)\cos\left(\lambda_{2m}\alpha_2\right),$$

$$\mu_{km}=\begin{cases}1, \text{ якщо } k\neq 0,\, m\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ якщо } k=0,\, m\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, \text{ якщо } k\neq 0,\, m=0,\\ \dfrac{1}{4}, \text{ якщо } k=0,\, m=0,\end{cases}$$

$\varphi_1\left(\lambda_{1k}\varepsilon_1\right),\ \varphi_2\left(\lambda_{2m}\varepsilon_2\right)$ – вагові функції, які визначають тип узагальненого підсумовування. Можна брати для простоти $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$.

Після підстановки співвідношень (12), (13) у розв'язувану систему рівнянь (8) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Часова координата відокремлюється у випадку усталених гармонічних коливань. У результаті одержимо функцію Ґріна в аналітичному вигляді

$$\mathbf{U}^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{U}^G\left(\alpha,\alpha^r,\varepsilon,t\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{km}^{(1)}\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]+$$
$$+\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{km}^{(2)}\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^r\right)\right]\Big\rangle\mathbf{T}^r\sin(\omega t), \tag{14}$$

$$\mathbf{U}^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right)=$$
$$=\left\{u_1^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right),u_2^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right),w^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right),\gamma_1^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right),\gamma_2^G\left(\alpha,\alpha^r,t\right)\right\}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{T}^r=\left\{T_1^r,T_2^r,T_3^r,T_4^r,T_5^r\right\}^{\mathrm{T}},$$

$$\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^r\right)\right]=\begin{bmatrix}\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^r\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^r\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^r\right)\end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^{r}\right)\right]=\begin{bmatrix}\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{r}\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{r}\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{r}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{r}\right)\end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha\right)\right]=\begin{bmatrix}\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cs}\left(\alpha\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right)\end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha\right)\right]=\begin{bmatrix}\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha\right) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Phi_{km}^{sc}\left(\alpha\right) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{cc}\left(\alpha\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi_{km}^{ss}\left(\alpha\right)\end{bmatrix},$$

$$\left[\mathbf{U}_{km}^{(j)}\right]=\begin{bmatrix}u_{1km}^{(j)1} & u_{1km}^{(j)2} & u_{1km}^{(j)3} & u_{1km}^{(j)4} & u_{1km}^{(j)5}\\ u_{2km}^{(j)1} & u_{2km}^{(j)2} & u_{2km}^{(j)3} & u_{2km}^{(j)4} & u_{2km}^{(j)5}\\ w_{km}^{(j)1} & w_{km}^{(j)2} & w_{km}^{(j)3} & w_{km}^{(j)4} & w_{km}^{(j)5}\\ \gamma_{1km}^{(j)1} & \gamma_{1km}^{(j)2} & \gamma_{1km}^{(j)3} & \gamma_{1km}^{(j)4} & \gamma_{1km}^{(j)5}\\ \gamma_{2km}^{(j)1} & \gamma_{2km}^{(j)2} & \gamma_{2km}^{(j)3} & \gamma_{2km}^{(j)4} & \gamma_{2km}^{(j)5}\end{bmatrix}, \qquad j=1,2,$$

$$u_{1km}^{(j)1}=\frac{1}{\det\left|\mathbf{L}^{(j)km}\right|}\det\begin{vmatrix}\mathbf{L}_{22}^{(j)km} & \mathbf{L}_{23}^{(j)km} & \mathbf{L}_{24}^{(j)km} & \mathbf{L}_{25}^{(j)km}\\ \mathbf{L}_{32}^{(j)km} & \mathbf{L}_{33}^{(j)km} & \mathbf{L}_{34}^{(j)km} & \mathbf{L}_{35}^{(j)km}\\ \mathbf{L}_{42}^{(j)km} & \mathbf{L}_{43}^{(j)km} & \mathbf{L}_{44}^{(j)km} & \mathbf{L}_{45}^{(j)km}\\ \mathbf{L}_{52}^{(j)km} & \mathbf{L}_{53}^{(j)km} & \mathbf{L}_{54}^{(j)km} & \mathbf{L}_{55}^{(j)km}\end{vmatrix} \qquad \left(j=1,2\right), \ ....,$$

$$\mathbf{L}_{11}^{(1)km}=-B_{1}\lambda_{1k}^{2}-B_{12}\lambda_{2m}^{2}-k_{1}^{2}\Lambda_{1}+2\rho h\omega^{2},$$
$$\mathbf{L}_{22}^{(1)km}=-B_{12}\lambda_{1k}^{2}-B_{2}\lambda_{2m}^{2}-k_{2}^{2}\Lambda_{2}+2\rho h\omega^{2},$$

$$\mathbf{L}_{33}^{(1)km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}^2 - \Lambda_2\lambda_{2m}^2 - \left[k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right) + k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right] + 2\rho h\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{(1)km} = -D_1\lambda_{1k}^2 - D_{12}\lambda_{2m}^2 - \Lambda_1 + \frac{2h^3}{3}\rho\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{55}^{(1)km} = -D_{12}\lambda_{1k}^2 - D_2\lambda_{2m}^2 - \Lambda_2 + \frac{2h^3}{3}\rho\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{14}^{(1)km} = \mathbf{L}_{41}^{(1)km} = k_1\Lambda_1, \mathbf{L}_{25}^{(1)km} = \mathbf{L}_{52}^{(1)km} = k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{15}^{(1)km} = \mathbf{L}_{51}^{(1)km} = \mathbf{L}_{24}^{(1)km} = \mathbf{L}_{42}^{(1)km} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(1)km} = -\left(B_1\nu_{12} + B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}, \mathbf{L}_{21}^{(1)km} = -\left(B_2\nu_{21} + B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{34}^{(1)km} = \mathbf{L}_{43}^{(1)km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}, \ \mathbf{L}_{35}^{(1)km} = \mathbf{L}_{53}^{(1)km} = -\Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{45}^{(1)km} = -\left(D_1\nu_{12} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}, \mathbf{L}_{54}^{(1)km} = -\left(D_2\nu_{21} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{13}^{(1)km} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k}, \ \mathbf{L}_{31}^{(1)km} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(1)km} = \left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{32}^{(1)km} = \left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{11}^{(2)km} = -B_1\lambda_{1k}^2 - B_{12}\lambda_{2m}^2 - k_1^2\Lambda_1 + 2\rho h\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{22}^{(2)km} = -B_{12}\lambda_{1k}^2 - B_2\lambda_{2m}^2 - k_2^2\Lambda_2 + 2\rho h\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{33}^{(2)km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}^2 - \Lambda_2\lambda_{2m}^2 - \left[k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right) + k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right] + 2\rho h\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{44}^{(2)km} = -D_1\lambda_{1k}^2 - D_{12}\lambda_{2m}^2 - \Lambda_1 + \frac{2h^3}{3}\rho\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{55}^{(2)km} = -D_{12}\lambda_{1k}^2 - D_2\lambda_{2m}^2 - \Lambda_2 + \frac{2h^3}{3}\rho\omega^2,$$

$$\mathbf{L}_{14}^{(2)km} = \mathbf{L}_{41}^{(2)km} = k_1\Lambda_1, \mathbf{L}_{25}^{(2)km} = \mathbf{L}_{52}^{(2)km} = k_2\Lambda_2,$$

$$\mathbf{L}_{15}^{(2)km} = \mathbf{L}_{51}^{(2)km} = \mathbf{L}_{24}^{(2)km} = \mathbf{L}_{42}^{(2)km} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{12}^{(2)km} = \left(B_1\nu_{12} + B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}, \ \mathbf{L}_{21}^{(2)km} = \left(B_2\nu_{21} + B_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{34}^{(2)km} = \mathbf{L}_{43}^{(2)km} = -\Lambda_1\lambda_{1k}, \ \mathbf{L}_{35}^{(2)km} = \mathbf{L}_{53}^{(2)km} = \Lambda_2\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{45}^{(2)km} = \left(D_1\nu_{12} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m}, \ \mathbf{L}_{54}^{(2)km} = \left(D_2\nu_{21} + D_{12}\right)\lambda_{1k}\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{13}^{(2)km} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_1k_2\nu_{12}\right)\lambda_{1k}, \ \mathbf{L}_{31}^{(2)km} = \left(k_1\Lambda_1 + B_1k_1 + B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{1k},$$

$$\mathbf{L}_{23}^{(2)km} = -\left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_2k_2\nu_{21}\right)\lambda_{2m},$$

$$\mathbf{L}_{32}^{(2)km} = -\left(k_2\Lambda_2 + B_2k_2 + B_1k_1\nu_{12}\right)\lambda_{2m}.$$

Вводимо узагальнений контур $L = L^{(0)} \cup L^{(1)} \cup ..... \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)}$ [8-10] і такі функції на ньому:

$$\mathbf{T}(\xi)=\left\{T_1(\xi),....,T_5(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\begin{cases}\mathbf{T}^{(0)}(\xi)=\left\{T_1^{(0)}(\xi),...,T_5^{(0)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, & \xi\in L^{(0)},\\ \mathbf{T}^{(1)}(\xi)=\left\{T_1^{(1)}(\xi),...,T_5^{(1)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, & \xi\in L^{(1)},\\ \text{.......................................} & \\ \mathbf{T}^{(N)}(\xi)=\left\{T_1^{(N)}(\xi),...,T_5^{(N)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, & \xi\in L^{(N)},\\ \mathbf{T}^{(N+1)}(\xi)=\left\{T_1^{(N+1)}(\xi),...,T_5^{(N+1)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, & \xi\in L^{(N+1)},\end{cases}$$

$$\mathbf{U_F}(\alpha)=\begin{cases}\left\{u_{n0}(\alpha),\ u_{\tau0}(\alpha),\ w_0(\alpha),\ \gamma_{n0}(\alpha),\ \gamma_{\tau0}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}, & \alpha\in L^{(0)},\\ \left\{\tilde{w}_0^{(1)},0,\ 0,\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}, & \alpha\in L^{(1)},\\ \text{...} & \\ \left\{\tilde{w}_0^{(N)},0,\ 0,\ 0,\ 0\right\}^{\mathrm{T}}, & \alpha\in L^{(N)},\\ \left\{N_{n0}(\alpha),\ N_{\tau0}(\alpha),\ Q_{n0}(\alpha),\ M_{n0}(\alpha),\ M_{\tau0}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}, & \alpha\in L^{(N+1)}.\end{cases}$$

На основі знайденої функції Ґріна (12) розв'язок шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$\mathbf{U}(\alpha,t)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{km}^{(1)}\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\xi)\right]+$$

$$+\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{km}^{(2)}\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\xi)\right]\Big\rangle\mathbf{T}(\xi)\,dl(\xi)\sin(\omega t), \qquad (15)$$

$$\mathbf{U}(\alpha,t)=\left\{u_1(\alpha,t),u_2(\alpha,t),w(\alpha,t),\gamma_1(\alpha,t),\gamma_2(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}}.$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі використовуємо представлення розв'язку (15), крайові умови (1), (2), (3) та співвідношення (7). У випадку крайових умов, коли на контурах задано компоненти зусиль, використовуємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі, який полягає в тому, що крайові умови задовольняємо не на реальній границі, а на границі фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань ε. Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система $5(N+2)+N$ інтегральних рівнянь відносно невідомих функцій густин $\mathbf{T}(\xi)$ та відносно невідомих переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$ набуває вигляду

$$\left\{u_{n0}(\alpha),\ u_{\tau 0}(\alpha),\ w_0(\alpha),\ \gamma_{n0}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\Big[\boldsymbol{\Omega}_{km}^{(1)(U)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\xi)\Big]+$$
$$+\Big[\boldsymbol{\Omega}_{km}^{(2)(U)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\xi)\Big]\Big\rangle \mathbf{T}(\xi)\,dl(\xi),\quad \alpha\in L^{(0)},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\{\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\Big(w_{km}^{(1)1}\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_1(\xi)+w_{km}^{(1)2}\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_2(\xi)+$$
$$+w_{km}^{(1)3}\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_3(\xi)+w_{km}^{(1)4}\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+w_{km}^{(1)5}\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)\Big)+$$
$$+\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\Big(w_{km}^{(2)1}\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_1(\xi)+w_{km}^{(2)2}\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_2(\xi)+w_{km}^{(2)3}\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_3(\xi)+$$
$$+w_{km}^{(2)4}\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_4(\xi)+w_{km}^{(2)5}\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_5(\xi)\Big)\Big\}\,dl(\xi),$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\{u_{1\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_1(\xi)+u_{2\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_2(\xi)+$$
$$+u_{3\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_3(\xi)+u_{4\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+u_{5\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)+$$
$$+u_{1\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_1(\xi)+u_{2\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_2(\xi)+u_{3\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_3(\xi)+$$
$$+u_{4\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+u_{5\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)\Big\}\,dl(\xi)$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\{\gamma_{1\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_1(\xi)+\gamma_{2\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_2(\xi)+$$
$$+\gamma_{3\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_3(\xi)+\gamma_{4\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+\gamma_{5\tau}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)+$$
$$+\gamma_{1\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_1(\xi)+\gamma_{2\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_2(\xi)+\gamma_{3\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_3(\xi)+$$
$$+\gamma_{4\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_4(\xi)+\gamma_{5\tau}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_5(\xi)\Big\}\,dl(\xi),$$
$$\alpha\in L^{(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\{M_{1n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_1(\xi)+M_{2n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_2(\xi)+$$
$$+M_{3n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_3(\xi)+M_{4n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+M_{5n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)+$$
$$+M_{1n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_1(\xi)+M_{2n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_2(\xi)+M_{3n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_3(\xi)+$$
$$+M_{4n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_4(\xi)+M_{5n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_5(\xi)\Big\}\,dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\{N_{1n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_1(\xi)+N_{2n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_2(\xi)+$$

$$+N_{3n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_3(\xi)+N_{4n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+N_{5n}^{(1)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)+$$

$$+N_{1n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_1(\xi)+N_{2n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_2(\xi)+N_{3n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_3(\xi)+$$

$$+N_{4n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_4(\xi)+N_{5n}^{(2)}(\alpha)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_5(\xi)\Big\}dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$\left\{N_{n0}(\alpha),\ N_{\tau 0}(\alpha),\ Q_{n0}(\alpha),\ M_{n0}(\alpha),\ M_{\tau 0}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(P)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(1)}(\xi)\Big]+$$

$$+\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(P)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(2)}(\xi)\Big]\Big\rangle\mathbf{T}(\xi)\,dl(\xi),\quad \alpha\in L^{\varepsilon(N+1)},$$

$$-\omega^2\tilde{m}^{(j)}\tilde{w}_0^{(j)}=P_0^{(j)}-\int_{L^{\varepsilon(j)}} Q_n(\zeta)\,dl(\zeta),\ \ j=\overline{1,N}, \qquad (16)$$

де

$$Q_n(\zeta)=\int_L\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}C_{km}(\varepsilon)\Big\{\Big(Q_{1n}^{(1)}(\zeta)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_1(\xi)+Q_{2n}^{(1)}(\zeta)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_2(\xi)+$$

$$+Q_{3n}^{(1)}(\zeta)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_3(\xi)+Q_{4n}^{(1)}(\zeta)\Phi_{km}^{cs}(\xi)T_4(\xi)+Q_{5n}^{(1)}(\zeta)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_5(\xi)\Big)+$$

$$+\Big(Q_{1n}^{(2)}(\zeta)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_1(\xi)+Q_{2n}^{(2)}(\zeta)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_2(\xi)+Q_{3n}^{(2)}(\zeta)\Phi_{km}^{sc}(\xi)T_3(\xi)+$$

$$+Q_{4n}^{(2)}(\zeta)\Phi_{km}^{cc}(\xi)T_4(\xi)+Q_{5n}^{(2)}(\zeta)\Phi_{km}^{ss}(\xi)T_5(\xi)\Big)\Big\}dl(\xi),$$

$$\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(j)(U)}(\alpha)\Big]=\begin{bmatrix} u_{1n}^{(j)}(\alpha) & u_{2n}^{(j)}(\alpha) & u_{3n}^{(j)}(\alpha) & u_{4n}^{(j)}(\alpha) & u_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ u_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & u_{5\tau}^{(j)}(\alpha)\\ w_1^{(j)}(\alpha) & w_2^{(j)}(\alpha) & w_3^{(j)}(\alpha) & w_4^{(j)}(\alpha) & w_5^{(j)}(\alpha)\\ \gamma_{1n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{2n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{3n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{4n}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ \gamma_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & \gamma_{5\tau}^{(j)}(\alpha)\end{bmatrix}, \qquad j=1,2,$$

$$u_{jn}^{(1)}(\alpha)=n_1(\alpha)u_{1km}^{(1)j}\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+n_2(\alpha)u_{2km}^{(1)j}\Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$u_{1\tau}^{(1)}(\alpha)=\tau_1(\alpha)u_{1km}^{(1)j}\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+\tau_2(\alpha)u_{2km}^{(1)j}\Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{1n}^{(1)}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma_{1km}^{(1)j}\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+n_2(\alpha)\gamma_{2km}^{(1)j}\Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$\gamma_{j\tau}^{(1)}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma_{1km}^{(1)j}\Phi_{km}^{cs}(\alpha)+\tau_2(\alpha)\gamma_{2km}^{(1)j}\Phi_{km}^{sc}(\alpha),$$

$$w_j^{(1)}(\alpha)=w_{km}^{(1)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$

$$u_{jn}^{(2)}(\alpha)=n_1(\alpha)u_{1km}^{(2)j}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)+n_2(\alpha)u_{2km}^{(2)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$u_{1\tau}^{(2)}(\alpha)=\tau_1(\alpha)u_{1km}^{(2)j}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)+\tau_2(\alpha)u_{2km}^{(2)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$\gamma_{1n}^{(2)}(\alpha)=n_1(\alpha)\gamma_{1km}^{(2)j}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)+n_2(\alpha)\gamma_{2km}^{(2)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$\gamma_{j\tau}^{(2)}(\alpha)=\tau_1(\alpha)\gamma_{1km}^{(2)j}\Phi_{km}^{cc}(\alpha)+\tau_2(\alpha)\gamma_{2km}^{(2)j}\Phi_{km}^{ss}(\alpha),$$
$$w_j^{(2)}(\alpha)=w_{km}^{(2)j}\Phi_{km}^{sc}(\alpha),\qquad j=\overline{1,5}.$$

$$\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(j)(P)}(\alpha)\right]=\begin{bmatrix} N_{1n}^{(j)}(\alpha) & N_{2n}^{(j)}(\alpha) & N_{3n}^{(j)}(\alpha) & N_{4n}^{(j)}(\alpha) & N_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ N_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & N_{5\tau}^{(j)}(\alpha)\\ Q_{1n}^{(j)}(\alpha) & Q_{2n}^{(j)}(\alpha) & Q_{3n}^{(j)}(\alpha) & Q_{4n}^{(j)}(\alpha) & Q_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ M_{1n}^{(j)}(\alpha) & M_{2n}^{(j)}(\alpha) & M_{3n}^{(j)}(\alpha) & M_{4n}^{(j)}(\alpha) & M_{5n}^{(j)}(\alpha)\\ M_{1\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{2\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{3\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{4\tau}^{(j)}(\alpha) & M_{5\tau}^{(j)}(\alpha)\end{bmatrix},\quad j=1,2,$$

$$N_{in}^{(1)}(\alpha)=B_1n_1^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}-\nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}+(k_1+\nu_{12}k_2)w_{km}^{(1)i}\right]+$$
$$+2B_{12}n_1n_2\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}u_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}u_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+B_2n_2^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}-\nu_{21}\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}+(k_2+\nu_{21}k_1)w_{km}^{(1)i}\right],$$
$$N_{i\tau}^{(1)}(\alpha)=B_1n_1\tau_1\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}-\nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}+(k_1+\nu_{12}k_2)w_{km}^{(1)i}\right]+$$
$$+B_{12}(n_1\tau_2+n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}u_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}u_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+B_2n_2\tau_2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left[-\lambda_{2m}u_{2km}^{(1)i}-\nu_{21}\lambda_{1k}u_{1km}^{(1)i}+(k_2+\nu_{21}k_1)w_{km}^{(1)i}\right],$$
$$M_{in}^{(1)}(\alpha)=D_1n_1^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i}-\nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+2D_{12}n_1n_2\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+D_2n_2^2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i}-\nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i}\right),$$
$$M_{i\tau}^{(1)}(\alpha)=D_1n_1\tau_1\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i}-\nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+D_{12}(n_1\tau_2+n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(1)i}\right)+$$
$$+D_2n_2\tau_2\Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(1)i}-\nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(1)i}\right),$$
$$Q_{in}^{(1)}(\alpha)=\Lambda_1n_1\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}w_{km}^{(1)i}-k_1u_{1km}^{(1)i}\right)+$$
$$+\Lambda_2n_2\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^{(1)i}+\lambda_{2m}w_{km}^{(1)i}-k_2u_{2km}^{(1)i}\right);$$
$$N_{in}^{(2)}(\alpha)=B_1n_1^2\Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[-\lambda_{1k}u_{1km}^{(2)i}+\nu_{12}\lambda_{2m}u_{2km}^{(2)i}+(k_1+\nu_{12}k_2)w_{km}^{(2)i}\right]+$$
$$+2B_{12}n_1n_2\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}u_{1km}^{(2)i}+\lambda_{1k}u_{2km}^{(2)i}\right)+$$

$$+B_2 n_2^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[\lambda_{2m} u_{2km}^{(2)i} + \nu_{21}\lambda_{1k} u_{1km}^{(2)i} + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^{(2)i}\right],$$

$$N_{i\tau}^{(2)}(\alpha) = B_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[-\lambda_{1k} u_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m} u_{2km}^{(2)i} + (k_1 + \nu_{12} k_2) w_{km}^{(2)i}\right] +$$

$$+B_{12}(n_1\tau_2 + n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m} u_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k} u_{2km}^{(2)i}\right) +$$

$$+B_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left[\lambda_{2m} u_{2km}^{(2)i} - \nu_{21}\lambda_{1k} u_{1km}^{(2)i} + (k_2 + \nu_{21} k_1) w_{km}^{(2)i}\right],$$

$$M_{in}^{(2)}(\alpha) = D_1 n_1^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i}\right) +$$

$$+D_2 n_2^2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i}\right) +$$

$$+2D_{12} n_1 n_2 \Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(2)i}\right),$$

$$M_{i\tau}^{(2)}(\alpha) = D_1 n_1 \tau_1 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(-\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i} + \nu_{12}\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i}\right) +$$

$$+D_2 n_2 \tau_2 \Phi_{km}^{sc}(\alpha)\left(\lambda_{2m}\gamma_{2km}^{(2)i} - \nu_{21}\lambda_{1k}\gamma_{1km}^{(2)i}\right) +$$

$$+D_{12}(n_1\tau_2 + n_2\tau_1)\Phi_{km}^{cs}(\alpha)\left(-\lambda_{2m}\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k}\gamma_{2km}^{(2)i}\right),$$

$$Q_{in}^{(2)}(\alpha) = \Lambda_1 n_1 \Phi_{km}^{cc}(\alpha)\left(\gamma_{1km}^{(2)i} + \lambda_{1k} w_{km}^{(2)i} - k_1 u_{1km}^{(2)i}\right) +$$

$$+\Lambda_2 n_2 \Phi_{km}^{ss}(\alpha)\left(\gamma_{2km}^{(2)i} - \lambda_{2m} w_{km}^{(2)i} - k_2 u_{2km}^{(2)i}\right), \qquad i = \overline{1,5}.$$

Розв’язок систем інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних схем методу колокацій. Для відшукування розв’язку інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, необхідно використовувати регуляризовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. Для контурів з кутовими точками необхідно використовувати нерівномірну сітку з достатньо сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв’язків. Для прикладу, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j-ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j-ого контуру, $l^{(j)r}$ – довжини відрізків розбиття $L^{(j)r}$, $r = \overline{1, S^{(j)}}$), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо такий розподіл невідомих густин $\mathbf{T}^{(j)}(\xi) = \mathbf{T}^{(j)r}\delta\left(\alpha^{(j)r}, \xi\right)$. Мінімізуємо нев’язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$, які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів або точками, які є на відстані ε від них з боку розглядуваної області. При інтегруванні в останніх співвідношеннях системи (16) можна вибирати спосіб розбиття контурів включень незалежно від способу розбиття контурів за використання методу колокацій для апроксимації невідомих густин.

Звідси система $5\sum_{j=0}^{N+1} S^{(j)} + N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\tilde{w}_0^{(j)}, j=\overline{1,N}$ та $\mathbf{T}^{(j)r}$, $j=\overline{0,N+1}$, $r=\overline{1,S^{(j)}}$ набуде вигляду

$$\left\{u_{n0}\left(\alpha^{(0)q}\right),\ u_{\tau 0}\left(\alpha^{(0)q}\right),\ w_0\left(\alpha^{(0)q}\right),\ \gamma_{n0}\left(\alpha^{(0)q}\right),\ \gamma_{\tau 0}\left(\alpha^{(0)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(U)}\left(\alpha^{(0)q}\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(U)}\left(\alpha^{(0)q}\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\right\rangle\mathbf{T}^{(j)r}, \qquad \alpha^{(0)q}\in L^{(0)}, q=\overline{1,S^{(0)}},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)} = \sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left\{\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)q}\right)\left(w_{km}^{(1)1}\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+\right.\right.$$

$$+w_{km}^{(1)2}\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+w_{km}^{(1)3}\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+$$

$$\left.+w_{km}^{(1)4}\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+w_{km}^{(1)5}\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\right)+$$

$$+\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)q}\right)\left(w_{km}^{(2)1}\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+w_{km}^{(2)2}\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+\right.$$

$$+w_{km}^{(2)3}\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+w_{km}^{(2)4}\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+$$

$$\left.\left.+w_{km}^{(2)5}\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\right)\right\},$$

$$0=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left\{u_{1\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+\right.$$

$$+u_{2\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+u_{3\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+$$

$$+u_{4\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+u_{5\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}+$$

$$+u_{1\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+u_{2\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+$$

$$+u_{3\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+u_{4\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+$$

$$\left.+u_{5\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\right\},$$

$$0=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\Big\{\gamma_{1\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+$$

$$+\gamma_{2\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+\gamma_{3\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+$$

$$+\gamma_{4\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+\gamma_{5\tau}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}+$$

$$+\gamma_{1\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+\gamma_{2\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+$$

$$+\gamma_{3\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+\gamma_{4\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+$$

$$+\gamma_{5\tau}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\Big\},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$0=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\Big\{M_{1n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+$$

$$+M_{2n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+M_{3n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+$$

$$+M_{4n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+M_{5n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}+$$

$$+M_{1n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+M_{2n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+$$

$$+M_{3n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+M_{4n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+$$

$$+M_{5n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\Big\},$$

$$0=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\Big\{N_{1n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+$$

$$+N_{2n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+N_{3n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+$$

$$+N_{4n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+N_{5n}^{(1)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}+$$

$$+N_{1n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+N_{2n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+$$

$$+N_{3n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+N_{4n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+$$

$$+N_{5n}^{(2)}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\Big\},$$

$$\alpha^{(j)q}\in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$\left\{N_{n0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), N_{\tau 0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), Q_{n0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), M_{n0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), M_{\tau 0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left\langle\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(P)}\left(\alpha^{(N+1)q}\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(P)}\left(\alpha^{(N+1)q}\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\right\rangle \mathbf{T}^{(j)r}, \quad \alpha^{(N+1)q} \in L^{\varepsilon(N+1)},\ q=\overline{1, S^{(N+1)}},$$

$$P_0^{(s)} = \sum_{p=1}^{S^{(s)}}\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\left\{C_{km}(\varepsilon)\left[\Psi_{1n}^{(1)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+\right.\right.$$

$$+\Psi_{2n}^{(1)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+\Psi_{3n}^{(1)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+$$

$$+\Psi_{4n}^{(1)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+\Psi_{5n}^{(1)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}+$$

$$+\Psi_{1n}^{(2)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\alpha^{(j)r}\right)T_1^{(j)r}+\Psi_{2n}^{(2)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_2^{(j)r}+$$

$$+\Psi_{3n}^{(2)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_3^{(j)r}+\Psi_{4n}^{(2)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_4^{(j)r}+$$

$$\left.\left.+\Psi_{5n}^{(2)}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)r}\right)T_5^{(j)r}\right]\right\}-\omega^2\tilde{m}^{(s)}\tilde{w}_0^{(s)},\ s=\overline{1,N},$$

де

$$\Psi_{in}^{(1)}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\Lambda_1 n_1\left(\alpha^{(s)p}\right)\Psi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\gamma_{1km}^{(1)i}+\lambda_{1k}w_{km}^{(1)i}-k_1u_{1km}^{(1)i}\right)+$$

$$+\Lambda_2 n_2\left(\alpha^{(s)p}\right)\Psi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\gamma_{2km}^{(1)i}+\lambda_{2m}w_{km}^{(1)i}-k_2u_{2km}^{(1)i}\right),$$

$$\Psi_{in}^{(2)}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\Lambda_1 n_1\left(\alpha^{(s)p}\right)\Psi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\gamma_{1km}^{(2)i}+\lambda_{1k}w_{km}^{(2)i}-k_1u_{1km}^{(2)i}\right)+$$

$$+\Lambda_2 n_2\left(\alpha^{(s)p}\right)\Psi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\gamma_{2km}^{(2)i}-\lambda_{2m}w_{km}^{(2)i}-k_2u_{2km}^{(2)i}\right),$$

$$\Psi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\int_{L^{\varepsilon(s)p}}\Phi_{km}^{ss}(\zeta)\,dl(\zeta),\quad \Psi_{km}^{cc}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\int_{L^{\varepsilon(s)p}}\Phi_{km}^{ss}(\zeta)\,dl(\zeta),$$

$$\Psi_{km}^{sc}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\int_{L^{\varepsilon(s)p}}\Phi_{km}^{sc}(\zeta)\,dl(\zeta),\quad \Psi_{km}^{cs}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\int_{L^{\varepsilon(s)p}}\Phi_{km}^{cs}(\zeta)\,dl(\zeta),$$

$$s=\overline{1,N},\ i=\overline{1,5}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha)=\{n_1(\alpha), n_2(\alpha)\}$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha)=\{\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\}$ можна отримати на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на зовнішніх контурах та контурі включень, використовуючи наступні формули

$$\begin{Bmatrix} u_n(\alpha,t) \\ u_\tau(\alpha,t) \\ w(\alpha,t) \\ \gamma_n(\alpha,t) \\ \gamma_\tau(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(U)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\Big(\alpha^{(j)r}\Big)\Big]+$$

$$+\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(U)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\Big(\alpha^{(j)r}\Big)\Big]\Big\rangle\mathbf{T}^{(j)r}\sin(\omega t);$$

$$\begin{Bmatrix} N_n(\alpha,t) \\ N_\tau(\alpha,t) \\ Q_n(\alpha,t) \\ M_n(\alpha,t) \\ M_\tau(\alpha,t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\Big\langle\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(1)(P)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(1)}\Big(\alpha^{(j)r}\Big)\Big]+$$

$$+\Big[\mathbf{\Omega}_{km}^{(2)(P)}(\alpha)\Big]\Big[\mathbf{E}_{km}^{(2)}\Big(\alpha^{(j)r}\Big)\Big]\Big\rangle\mathbf{T}^{(j)r}\sin(\omega t).$$

Висновки. Використовуючи побудовані в роботі інтегральні рівняння, можна отримати розв’язки для довільних мішаних випадків крайових умов на зовнішніх границях оболонки, розглядаючи довільні комбінації амплітуд $w(\alpha), u_n(\alpha)$, $\gamma_n(\alpha)$, $u_\tau(\alpha)$, $\gamma_\tau(\alpha)$, $Q_n(\alpha)$, $M_n(\alpha)$, $N_n(\alpha)$, $M_\tau(\alpha)$, $N_\tau(\alpha)$. Також дозволяються довільні різні мішані крайові умови на всіх складових частинах кожної зовнішньої границі. Тому в рамках поставленої задачі не обов’язково, щоб цілий зовнішній контур оболонки був закріплений. Одна або декілька складових частин зовнішніх контурів можна розглядати якимось чином закріпленими. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення зовнішньої границі у випадку анізотропних матеріалів. В рамках побудованого розв’язку можна розглядати випадки зовнішніх границь оболонки та контурів включень з кутовими точками. Однак у випадку контурів з кутовими точками необхідно розглядати нерівномірне розбиття в схемі методу колокацій з досить сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв’язків. А для розв’язку рівнянь Фредгольма першого роду необхідно використовувати стабілізовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. На етапі числового розрахунку необхідним є дослідження збіжності й оптимального вибору значень параметрів апроксимації $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$ в рамках кожного конкретного випадку для отримання достатньо точних числових результатів. Запропонована в статті схема дає розв’язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових граничних випадків, отриманими іншими методами.

Література

1. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3 т. / под. ред. А.Н. Гузя. − Киев. − Т.1. Механика материалов. − 1082. − 368 с.; Т.2. Механика элементов конструкций − 1083. − 464 с.; Т.3. Прикладные исследования. − 1083. − 262 с
2. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М.Григоренко, Е.И.Беспалова, А.Б.Китайгородский, А.И.Шинкарь. − К.: Наук. думка, 1986. − 172 с.
3. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М.Григоренко, Г.Г.Влайков, А.Я.Григоренко. − К.: Издательский дом «Академпериодика», 2006. − 472 с.
4. Шопа Т. До побудови розв’язку задачі про коливання ортотропної циліндричної оболонки з включенням довільної конфігурації / Т. Шопа // Машинознавство. − 2011. − №8-9. − С. 52-56.
5. Бурак, Я.Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок / Я.Й. Бурак, Ю.К. Рудавський, М.А. Сухорольський. − Львів: Інтелект-Захід, 2007. − 240 с.
6. Lighthill J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / J. Lighthill. − Cambridge University Press, 1958. − 79 p.
7. Сухорольський М.А. Послідовності і ряди / М.А.Сухорольський. − Львів: Растр-7, 2010. − 346 с.
8. Шопа Т. Коливання ортотропної циліндричної оболонки з множиною отворів довільної конфігурації / Т. Шопа // Вісник ТНТУ. − 2012. − № 4(68). − С. 14-28.
9. Shopa T. Vibration of orthotropic cylindrical shell with a set of cutouts of arbitrary configuration / T. Shopa // Конференція молодих учених із сучасних проблем механіки і математики імені академіка Я.С. Підстригача: Тези доповідей. − Львів, 2012. − С. 5-8.
10. Шопа Т. Коливання ортотропної оболонки з отворами довільної конфігурації / Т. Шопа // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. − 2011. − Вип. 14. − С. 167-178.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.02.2016 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Лисканичем М.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Максимовичем В .М.*** *(м. Луцьк)*

VIBRATION OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH A SET OF INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION ON HINGED CONNECTION WITH SHELL

T. V. Shopa
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine;
79060, L'viv, Naukova Str., 3-b; e-mail: tetyana.sh@gmail.com

In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic closed cylindrical shell with the arbitrary number of simply supported rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. External boundaries of the shell are of the arbitrary geometrical configuration. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered on the external boundaries of the shell. The solution built on the basis of the indirect boundary elements method and the sequential approach to the representation of the Green's function. The boundary value problem is reduced to the system of algebraic equations.

Key words: *orthotropic cylindrical shell, vibration, inclusions, natural frequencies, sequential approach, Green function, indirect boundary elements method, collocation method.*