

# Інформація

УДК 37.091

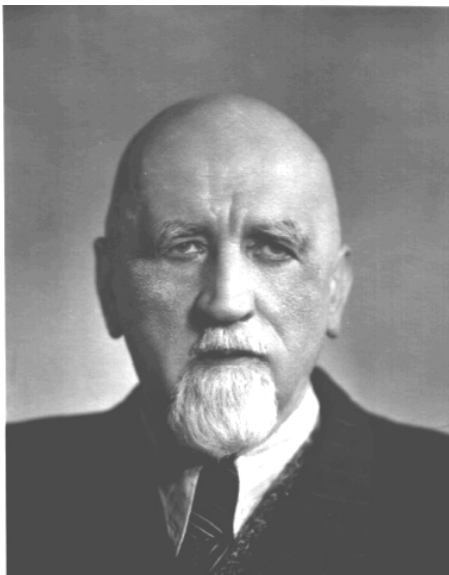
## ВІН СТОЯВ БІЛЯ ВИТОКІВ НОВОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ДИСЦИПЛІНИ – ТОПОЛОГІЇ

До 55-річчя відходу у Вічність видатного українського математика  
та педагога, дійсного члена Наукового товариства ім. Шевченка  
Мирона Зарицького

М. М. Зарічний<sup>1</sup>, Б. Й. Пташник<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка;  
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1; e-mail: topology@franko.lviv.ua

<sup>2</sup>Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3б;  
e-mail: ptashnyk@lms.lviv.ua



Мирон Зарицький,  
середина 50-х років ХХ ст.

*Описано життєвий і науковий шлях та основні результати в галузі топології Мирона Зарицького – видатного українського математика, дійсного члена Наукового товариства ім. Шевченка, професора Львівського університету.*

**Ключові слова:** Мирон Зарицький, топологія, педагогічна діяльність, наукова діяльність.

### 1. Вступ

19 серпня 1961 р. перестало битися серце видатного українського математика, педагога та просвітника, дійсного члена Наукового товариства ім. Шевченка (НТШ), професора Львівського університету Мирона Зарицького, одного з фундаторів української математичної культури на західноукраїнських землях.

Якою ж була непересічна постать Мирона Зарицького – людини, вченого і педагога?

Оцінювати будь-яку особистість можна, охопивши всю багатогранність її діяльності та пізнавши, в яких конкретних умовах людина жила і творила.

Умови для Мирона Зарицького не були вельми сприятливими. Він ріс і жив у часи, коли його народ був (за словами Івана Франка) “замучений, розбитий, мов паралітик той на роздорозжж, людським презирством, ніби струпом вкритий...”

Мирон Зарицький пережив дві світові війни, становлення і ліквідацію Західно-Української народної республіки, гніт панської Польщі після 1919 р., німецьку окупацію та “визволення” Західної України Радянською владою, постійні обшуки та переслідування, вболівав за долю свого внука Богдана, якого виховував разом із дружиною Володимирою з дев’ятимісячного віку, переживав за долю доньки Катерини та зятя Михайла Сороки, які через півроку після одруження були арештовані в березні 1940 р. органами НКВС і більше в житті не зустрілися.

Але любов до науки, до педагогічної праці, до людей, бажання принести користь рідному народові допомагали Мирону Зарицькому зберігати рівновагу духу, допомагали творити, не покладаючи рук, за будь-яких обставин.

### 1. Дитячі та шкільні роки

Мирон Зарицький народився 21 травня 1889 року в селі Могильниця Тербовлянського району Тернопільської області в родині сільського священика. Батько, Онуфрій Зарицький, родом із села Мозолівки Підгаєцького району Тернопільської області, теж був сином греко-католицького священика Івана Зарицького.

Онуфрій Зарицький перед висвяченням 30 серпня 1888 р. одружився зі Софією Слоневською, донькою пароха села Криве, що біля Березан, Антона Слоневського. Село Могильниця було першою парохією о. Онуфрія. Софія Слоневська була дуже енергійною і зарадною жінкою. Разом вони виховали трьох синів – Мирона, Романа, що став правником, та Родіона, який згодом став інженером на залізниці.

Мирон був первістком у сім’ї, народився кволою дитиною і змалку часто хворів, однак розумово розвивався дуже швидко. Виявляв велику зацікавленість до природи, дуже любив квіти.



Мирон Зарицький з донькою Катериною та внуком Богданом, 1942 р.

Згодом батьки його переїхали до Нового Села, тепер Підволочиського району Тернопільської області.

Початкову школу Мирон закінчив у селі Криве у свого діда Антона Слоневського, та ще до неї він самотужки навчився читати, писати і рахувати.

У 1899 р. вступив до першого класу Цісарсько-Королівської гімназії в Бережанах із польською мовою викладання. Навчання давалось йому дуже легко, і малий Мирон закінчив на “відмінно” перші два класи Бережанської гімназії. На третьому році навчання Мирона перевели до гімназії в Тернополі з українською мовою навчання, яка називалася тоді “Цісарсько-Королівська Гімназія Франца Йосифа I в Тернополі”.

Прагнучи до знань, хлопець багато читав (але тільки те, що його цікавило), багато працював самотужки, зокрема над математикою, значно випереджуючи своїх товаришів. Тому на багатьох уроках у гімназії йому було нецікаво, чого не могли зрозуміти деякі вчителі, і з того часто траплялися непорозуміння. Після одного з таких конфліктів Мирона виключили з 5-го класу Тернопільської гімназії і він поїхав додому у Нове Село, де пробув цілий рік. Він самостійно і наполегливо вчився, а в 1905 р. без жодної допомоги підготував і склав екстерном з добрими оцінками іспити за 6-й клас Тернопільської гімназії та вступив до 7-го класу класичної гімназії в Перемишлі.

У Перемишльській гімназії Мирон Зарицький зацікавився грецькою філософією, багато часу присвячував вивченню грецьких і латинських класиків, але твори, включені в програму гімназії, він вивчав поверхово, і знову були певні конфлікти. Деякі викладачі гімназії вагалися, чи допускати М. Зарицького до випускних іспитів, а він зробив їм несподіванку і все склав на “відмінно”.

Склавши іспит на зрілість, відправив батькам таку телеграму: "Матура з відзнакою, порожній гаманець у кишені".

### **3. Студенські роки**

У 1907 р. Мирон Зарицький вступив до Віденського університету на природниче відділення філософського факультету. Це був один із найбільших університетів Європи. Тоді там навчалось понад 7500 студентів. На філософському факультеті штатних студентів було 1815, із них 135 з Галичини. У 1907/08 навчальному році на природничому відділенні М. Зарицький слухав лекції з таких дисциплін: 1) вступ до філософії, 2) основні проблеми метафізики і теорії пізнання, 3) аналітична геометрія, 4) національна економія, 5) систематична ботаніка, 6) загальна біологія, 7) стенографія для початківців, 8) англійська мова, 1-ий курс, 9) основи психології, 10) спеціальна зоологія, молюски, 11) зоотомічний курс.

Лекції читали відомі тоді учені, зокрема, такі професори: Ріхард Ветштайн (Richard Wetstein) (систематична ботаніка та загальна біологія), дійсний член Цісарської Академії наук у Відні, член правління

Міжнародної асоціації ботаніків, директор ботанічного саду та інституту, автор популярного підручника зі систематичної ботаніки “Handbuch der Systematischen Botanik”; Карл Гроббен (Karl Grobben) (загальна біологія, спеціальна зоологія та зоотомічний курс), дійсний член Цісарської Академії наук у Відні, почесний член природничого об’єднання у Віденському університеті, директор інституту зоології, автор підручника зі зоології “Lehrbuch für Zoologie”; Фрідріх Йодль (Friedrich Jodl) (основи психології), дійсний член Цісарської Академії наук у Відні; Вільгельм Єрусалем (Wilhelm Jerusalem) (вступ до філософії), цісарсько-королівський урядовий радник, член Міжнародного інституту соціології в Парижі; Ойген Філіповіч (Eugen Philippovich) (національна економія), член-кореспондент Цісарської Академії наук у Відні, цісарсько-королівський придворний радник, член Міжнародного інституту соціології в Парижі.

Як великий любитель музики М. Зарицький часто відвідував у Відні концерти та Оперу, витрачаючи на квитки багато грошей з того, що батьки висилали йому на прожиток. Це відбилося на його здоров’ї, тому після закінчення першого курсу батьки Мирона, побачивши його таким змарнілим, вже не відпустили його більше до Відня, і він змушений був перевестися до Львівського університету. Тут Мирон Зарицький студіював переважно математичні та фізичні дисципліни, а також продовжував займатись філософією, самотужки вивчав французьку мову.

У Львові М. Зарицький став членом студентського товариства “Академічна громада”, дещо пізніше ввійшов до складу “Українського студентського союзу”.

Тоді провідними математиками Львівського університету були Юзеф Пузина та Вацлав Серпінський.

Юзеф Пузина (1856-1919) походив із давнього українського ополеченого князівського роду. Народився в селі Новий Мартинів Станіславської області (нині Івано-Франківська), вчився у Львівському університеті, був учнем професора Жмурка. Математику в університеті викладав протягом 33 років, починаючи з 1884 р. Пузина вперше читав у Львові спеціальні математичні курси, з 1891 р. запровадив практичні заняття з математики, а в 1893 р. заснував математичний семінар, яким керував до 1918 р. Головним напрямом наукової діяльності Пузини була теорія аналітичних функцій. Варто ще згадати, що Ю. Пузина був одним із нечисленних професорів Львівського університету, в якого не було польського шовінізму стосовно студентів-українців. Він був людиною доступною для молоді, охоче займався зі здібними студентами та заохочував їх до наукової праці.

Вацлав Серпінський (1882-1969) прибув до Львова в 1908 р. Він народився у Варшаві, вчився у Варшавському університеті, був учнем геніального українського математика Георгія Вороного (1868-1908). Г. Вороний народився в селі Журавка Варвинського району Чернігівської області (за теперішнім адміністративним поділом), вчився у Бердян-

ській та Прилуцькій гімназіях, закінчив Петербурзький університет, з 1894 р. до своїх останніх днів працював професором Варшавського університету; за своє коротке життя зробив помітний внесок в усіх трьох головних напрямках сучасної теорії чисел – аналітичній, алгебричній та геометричній, скрізь розв'язавши задачі принципового значення.

В. Серпінський першим у Львові викладав теорію множин, теорію функцій дійсної змінної та аналітичну теорію чисел, разом з Ю. Пузиною керував математичним семінаром, у якому брав участь ще студентом і М. Зарицький.

У Львівському університеті Вацлав Серпінський (1908-1910 рр. – приват-доцент, з 1910 р. – надзвичайний професор) у роки навчання там Мирона Зарицького читав такі курси: 1) теорія чисел, 2) математичний аналіз, 3) аналітична теорія чисел, 4) вступ до аналізу, 5) вищий аналіз, 6) теорія множин, 7) вища алгебра, 8) критичний аналіз фундаментальних математичних понять, 9) застосування теорії множин до аналізу, 10) теорія нескінченних рядів, 11) ірраціональності другого степеня, 12) теорія функцій дійсної змінної, 13) поняття міри точкових множин.

Студенти розмножували лекції Серпінського літографічним способом, пізніше багато з цих лекцій були надруковані і мали вагомий вплив на молоду математичну зміну. Його лекції внесли в тематику та зміст університетського навчання теоретико-множинні основи та сучасну математичну строгість.

Під впливом професора Серпінського Мирон Зарицький захопився теорією множин і теорією функцій дійсної змінної. Ці студентські захоплення визначили подальший напрям наукової діяльності М. Зарицького.

У 1912 р. М. Зарицький успішно закінчив Львівський університет, а через рік склав учительські іспити й отримав звання вчителя середніх шкіл з математики і фізики.

#### **4. Педагогічна, наукова та просвітницька діяльність**

Маючи нахил до наукової праці, М. Зарицький, як і багато інших вчених-українців, в умовах австро-угорської монархії та міжвоєнної Польщі не міг отримати роботу у вищій школі, тому почав свою працю на ниві пропагування математичних знань по різних середніх школах Галичини. Він учительовав у приватних українських гімназіях Белза та Збаража, потім, із деякими перервами в роки Першої світової війни, у державних гімназіях Коломиї і Тернополя.

Восени 1913 р. Мирон Зарицький одружився з Володимирою Зафійовською, донькою покійного священика Івана Зафійовського, а через рік у подружжя Зарицьких народилась донька Катерина.

Уже тоді М. Зарицький робив перші кроки в науковій роботі з математики. Були то праці невеликого масштабу, але в них уже містилися елементи оригінальної творчості. Через певний час М. Зарицький показав ці роботи відомому польському математикові, професору Львівсько-

го університету Г. Штейнгаузу, який схвалив їх і потурбувався про переїзд Мирона Зарицького до Львова.

У 1925 р. М. Зарицький переїхав з Тернополя до Львова, де працював спочатку в ІХ польській державній гімназії, з 1928 р. до 1934 р. – у Філії української державної гімназії, а з 1934 р. до 1939 р. – у ІІ польській державній гімназії. У Львові він продовжував активно займатися науковою роботою, відвідував в університеті лекції з психології та філософії – професора К. Твардовського, з математики – професорів Г. Штейнгауза та С. Рузевича, з астрономії – М. Ернста та ін. Титул професора гімназії М. Зарицькому присвоїли 3 лютого 1928 р.

24 березня 1927 р. М. Зарицького обрали дійсним членом НТШ, і відтоді він став активним співробітником його математично-природописно-лікарської секції. В 25-му томі “Збірника” цієї секції була надрукована перша його праця “Метод запровадження повного впорядкування у теорії множин” [1]. За другу працю “Деякі основні поняття *analysis situs* з точки зору алгебри логіки” [2] Львівський університет 25 жовтня 1930 р. присудив М. Зарицькому вчений ступінь доктора філософії.

У цей час Мирон Зарицький зблизився з видатними польськими математиками Г. Штейнгаузом, С. Банахом, В. Стожеком, С. Мазуром, які працювали у Львові, був прийнятий до Львівського відділу Польського математичного товариства, його обрали також членом Німецького математичного товариства. Друкував свої праці у львівських, польських, німецьких і американських журналах, вів наукове листування з математиками багатьох країн.

Як делегат НТШ М. Зарицький брав участь у роботі І польського математичного з’їзду, який відбувся у Львові 1927 р., де виступив із науковою доповіддю “Когеренції та адгеренції Кантора”, та І математичного з’їзду колишнього Радянського Союзу, що відбувся в 1930 р. у Харкові.

На ювілейному святі математично-природописно-лікарської секції НТШ, присвяченому 30-річчю роботи секції, 3 квітня 1927 р. Мирон Зарицький виголосив доповідь філософського змісту “Правда, краса і математика” [3], де, зокрема, говорив такі слова: “Кого не манить краса ні мистецтво, хто живе вбогим духовним життям, той нічого не дасть математиці. Поезія не різниться від математики вищим легом уяви, а математик різниться від поета лиш тим, що все і всюди *розумує*... Але як у мистецтві, так і в математиці лише твори *гарні* переживають століття і виховують цілі покоління”.

До 1939 р. Зарицький надрукував близько 20 наукових праць у львівських та іноземних виданнях і в цей період сформувався як серйозний математик з філософським спрямуванням.

Після приєднання Західної України до УРСР М. Зарицький із грудня 1939 р. почав працювати у Львівському університеті. У 1939-1941 рр. був проректором, а в 1945-1947 рр. – деканом фізико-математичного фа-

культету, завідував кафедрою теорії ймовірностей, а з 1948 р. – кафедрою загальної математики.

За сумісництвом працював також старшим науковим співробітником Львівського філіалу АН УРСР. У 1941 р. виступав з доповідями на конференціях Академії наук УРСР та ГрузРСР у Києві та Тбілісі. 21 квітня 1945 р. М. Зарицькому було присвоєно звання професора, а 6 липня 1946 р. – вчений ступінь кандидата фізико-математичних наук.

Роботу у Львівському університеті Мирон Зарицький поєднував із читанням лекцій у Львівському політехнічному інституті (1944-1946) та в новоствореному Ужгородському університеті (1950-1953), надаючи значну допомогу в організації математичних кафедр цього університету.

В 1942-1944 рр. М. Зарицький читав лекції з вищої математики на професійних технічних курсах, організованих на базі Львівської політехніки.

Наукові інтереси М. Зарицького охоплюють головню теорію множин з алгеброю логіки та теорію функцій дійсної змінної.

Мирон Зарицький був великим знавцем історії математики, особливо античної, читав курси лекцій з історії математики у Львівському університеті, надрукував кілька праць з історії точних наук. Сюди належать “Хрестоматія грецької математики” (польською мовою) [4], у якій вміщені невеликі уривки з творів Евкліда, Архімеда, Аполонія Пергійського, Клавдія Птоломея та Діофанта в грецькому оригіналі та латинському перекладі, невеликий етюд “Зауваження до проблеми наближених обчислень у грецькій математиці” [5], нарис “Астрономія в старовину” (українською та польською мовами) [6,7].

Працюючи в гімназіях, М. Зарицький заохочував учнів до занять астрономією, дуже часто сам ходив вечорами до астрономічної обсерваторії Львівського університету спостерігати зоряне небо. Уже як відомий математик Мирон Зарицький задумав написати нарис про зародження астрономії у стародавніх народів Близького Сходу. Щоб ознайомитись із першоджерелами, йому довелося вивчити в потрібному обсязі старосврейську мову.

Цікаві також його нариси з методики викладання математики у зв'язку з історією та ін. [8-11].

Як філософ М. Зарицький цікавився теорією ймовірностей і математичною статистикою [12]. Його стаття “Сучинники кореляції в теорії математичної статистики” [13] присвячена спробі аналізу балансів кооперативів Тернопільської області.

Як людина з гострим почуттям громадського обов'язку М. Зарицький проводив активну пропаганду наукових знань у пресі [6, 14, 15].

Він підготував до друку монографію “Теорія множин”, яка, на жаль, не була надрукована, а рукопис її загубився у стінах Львівського державного університету імені Івана Франка; переклав із французької мови на українську книгу С. Банаха “Курс функціонального аналізу (лі-

нійні операції” [16]. В українському перекладі ця книга вийшла через три роки після смерті С. Банаха, хоч переклад книги (за угодою з видавництвом) мав бути завершений до 1 липня 1940 р. [17]. Це була перша книга з функціонального аналізу, видана в колишньому Радянському Союзі. По ній вивчали функціональний аналіз багато математиків, які навіть не володіли українською мовою. Прізвище перекладача (очевидно, з політичних причин) у книзі не було зазначене.

У домашньому архіві пані Люби Сороки, вдови єдиного внука Мирона Зарицького Богдана, зберігається багато неопублікованих рукописних матеріалів Мирона Зарицького. Серед них статті та реферати “Замкнення і похідна – як два різні основні поняття теорії двох різних топологічних просторів”, “Деякі зауваження до поняття неперервності в загальнотопологічному просторі”, “Деякі помилки в математичній літературі”, “Дев’ята і десята теореми другої книги евклідових “Елементів”, “Проблема математичної правди і краси математичної думки”, “Про всестороннє значіння математики для розвитку людини, суспільності і держави”, “Генеза наук зоряних констеляцій (сузір’їв)”, “Математика як партійна наука”, “Математика з точки зору діалектичного матеріалізму”, незавершені книги “Аксиоматичний метод у математиці”, “Математичний світогляд”, а також обширні матеріали для підручника “Історія математики”: а) єгипетська і вавилонська математика; б) хрестоматія вавилонських математиків; в) грецька математика (чотири розділи).

Зі сказаного видно, наскільки різноманітними та широкими були інтереси вченого.

Коло зацікавлень Мирона Зарицького не замикалось лише математикою. Він був обізнаний з природничими науками, світовою літературою, філософією, захоплювався поезією. Любив Шекспіра і Пушкіна. Окремі розділи поеми Пушкіна “Євгеній Онегін” переклав українською мовою.

Володів вільно польською, німецькою і російською мовами. Крім того, писав математичні статті англійською та французькою мовами, читав літературу на грецькій, латинській і старовірській мовах.

Однією з прикмет, що характеризували Мирона Зарицького, була цілковита безкорисливість стосовно науки. Головним для нього був сам процес студювання, відкривання й формування нового, приємність заглибитись у предмет та збагнути його суть. Наука була для М. Зарицького хлібом насущним, потребою і насолодою, працею і відпочинком. На науку він дивився як на правду і красу, що підносить людину на вищий щабель її духовного розвитку. Наука у нього – це творчість, натхнення і радість, котрою він хотів поділитися з кожним, хто цього бажав.

Мирона Зарицького називали “поетом математики”. Йому були властивими глибина думки, уміння перетворювати складне в просте. Педагог він був неперевершений. Студенти завжди з великою цікавістю



слухали його лекції. Зокрема, він один із перших використовував у лекціях з математичного аналізу символіку логіки предикатів. Варто згадати слова С. Банаха, які він сказав про М. Зарицького: “Я не знаю більше нікого, хто б так логічно та лаконічно викладав математичний аналіз”.

До гімназистів, студентів і всіх навколишніх М. Зарицький ставився доброзичливо і щиро. Йому був притаманний тонкий гумор. Колоритний портрет М. Зарицького як викладача гімназії змалював у автобіографічній повісті “Високий замок” [18] його учень – відомий польський письменник Станіслав Лем, а теплі спогади про М. Зарицького як професора університету залишили його студенти Владислав Лянце, Михайло Сеньків (див. [19]), Віталій Скоробогатько, Мирослав Ковбуз, Лев Іванків, Ярослав Довгий та багато інших.

Поховано Мирона Зарицького на Личаківському цвинтарі у Львові. Пам’ять про нього ще довго освітлюватиме дорогу молодим ентузіастам науки.



Похоронна процесія, 22 серпня 1966 р.

### **5. Наукові результати в галузі топології**

Наукова спадщина М. Зарицького обширна та багатогранна. Його наукові інтереси стосувалися здебільшого теорії множин, теоретико-множинної топології та теорії функцій дійсної змінної. Наукові результати М. Зарицького були на передньому краю світової науки. На них є посилання, зокрема, у відомих монографіях [20, 21]. Поданий нижче огляд наукових результатів М. Зарицького в галузі топології ґрунтується, зокрема, на статті [22].

Одна з головних тем наукової творчості М. Зарицького – теорія бульових алгебр. Оператор замикання в бульових алгебрах розглянув вперше К. Куратовський [23]. Він сформулював задачу про те, скільки різних

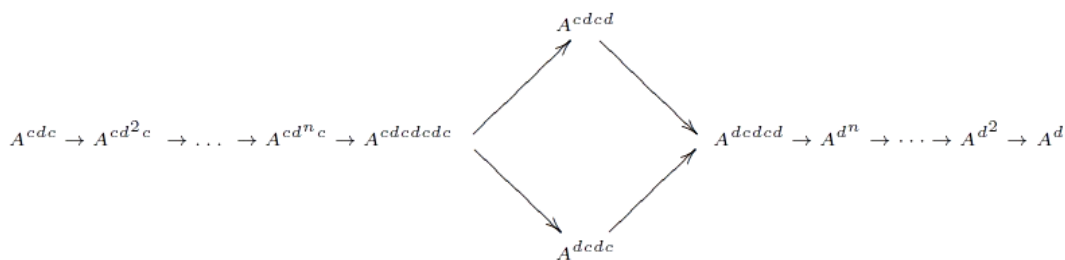
елементів можна одержати, застосовуючи до заданого елемента бульової алгебри операції замикання  $r$  і доповнення  $c$ . Відповідь дає відома теорема Куратовського про 14 множин.

У своїй першій науковій праці [1] Мирон Зарицький застосував оператор  $r$  до задання повного порядку на множині. При цьому Зарицький користувався дещо іншою аксіоматикою, ніж ту, яку запровадив Куратовський в [23]. Ця нова аксіоматика виходить за межі теорії бульових алгебр, оскільки апелює до поняття “елемент множини  $A$ ”.

У статті [2] розглянуто операцію межі  $f$  в теорії бульових алгебр. Ця операція пов’язана з операцією замикання  $r$  формулою  $A^f = A^r \cap A^{cr}$ . Зарицький наводить у цій статті аксіоматизацію операції  $f$ , а також інших операцій:  $i$  (внутрішності,  $A^i = A^{crc}$ ),  $e$  (зовнішності,  $A^e = A^{rc}$ ),  $b$  (берега,  $A^b = A \cap A^{cr}$ ). Для зазначених операцій розв’язано задачу, аналогічну до згаданої вище задачі Куратовського: скільки різних елементів можна одержати по черговим застосуванням таких операцій і доповнення?

Важливе місце в науковій творчості Зарицького займає дослідження бульових алгебр з похідною. Операція похідної  $d$  задається такими аксіомами: (1)  $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ ; (2)  $A^{dd} \subset A^d$ ; (3)  $0^d = 0$ ; (4)  $1^d = 1$ .

У статті [24] для бульових алгебр з похідною розв’язується аналог задачі Куратовського. Відповідь дається графами, де стрілка означає включення:



Схожі результати Зарицький одержав для інших унарних операцій в теорії бульових алгебр: когеренції, адгеренції і ядра множини в сенсі Кантора.

Зауважмо, що теорію бульових алгебр інтенсивно розвивали в 30-х роках минулого століття американські математики, (див., наприклад, [25-27]). Результати Зарицького і Сандерса [26] частково перекриваються.

Багато результатів М. Зарицького має природну топологічну інтерпретацію; це засвідчив і сам Зарицький у [28].

У замітці [29] М. Зарицький знайшов умову, еквівалентну до умови зв'язності підмножини  $M$  топологічного простору, в термінах властивостей операції  $f$ : не існує непорожніх множин  $A$  і  $B$  таких, що  $AB + AB^f + A^f B = 0$  і  $A + B = M$ .

У праці [30] наведено кілька рівносильних умов у термінах операції  $d$  того, що підмножина  $A$  топологічного простору  $C$  ніде не щільна в  $C$ :  $A^{dcd} = C$ ,  $A^{dcdcd} = 0$ ;  $A \subset A^{dcd}$ ,  $A \subset A^{dcdcdc}$ ;  $A^{dcdcd} \subset A^{dcd}$ ,  $A^{d^n} \subset A^{dcd}$  для довільного натурального  $n$ .

Стаття [31] містить топологічну інтерпретацію операції  $m$ ,  $A^m = A^{dcd}$ . Доведено, що множина  $A^m$  є похідною для множини всіх зовнішніх точок множини  $A$ . Значимо, що в термінах операції  $m$  можна також виразити поняття всюди щільної, ніде не щільної та межевої множини.

В [32] М. Зарицький вказав на можливість “систематичної і послідовної побудови теорії точкових множин на основі поняття похідної множини” і виразив через операцію  $d$  ряд загальнотопологічних властивостей множини, зокрема, властивості бути досконалою множиною. В [32] за допомогою похідної наведено також два означення неперервності відображення  $\varphi$  топологічного простору  $C$  в себе:

- (1)  $\varphi(A^d) \subset \varphi(A) + (\varphi(A))^d$ ;
- (2)  $\varphi(A^d) + (\varphi(A^d))^d \subset \varphi(A) + (\varphi(A))^d$

для кожного  $A \subset C$ . Обидва ці означення у випадку евклідового простору виявляються еквівалентними до звичайної неперервності, однак у загальному випадку приводять до різних понять; для їхньої еквівалентності потрібно накладати додаткові умови на операцію  $d$ .

Ще раз повернемося до статті Мирона Зарицького [2], де, зокрема, наведено аксіоматику для поняття межі множини в топологічному просторі. Далі розглядатимемо саме цю аксіоматику та її роль у становленні основ топології.

Загальноприйнятими зараз є два підходи до запровадження топологічної структури – через систему відкритих множин і через оператор замикання. Ми згадували аксіоматизацію Куратовського оператора замикання (див. [23], де ця аксіоматика запроваджена):

- (1)  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ;
- (2)  $A \subset \overline{A}$ ;
- (3)  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ;
- (2)  $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(щоби наблизити викладення до сучасного стилю позначень, ми вживаємо позначення  $\overline{A}$  замість  $A^r$ , як вище).

Означення топології через систему відкритих множин, яке, як відомо, еквівалентне до задання за допомогою оператора замикання, веде свою історію від Дедекінда. Воно має виразно геометричний характер і апелює до інтуїтивного поняття околу, узагальнюючи близькість, що задається числовою функцією (метрикою). Означення топології через оператор замикання ґрунтується на ідеях Кантора, воно алгебричне за своєю суттю. Поєднання геометричного та алгебричного аспектів забезпечує поширеність поняття топологічного простору в математиці, порівняно з іншими топологічними структурами, та його фундаментальність.

Здебільшого означення топологічного простору в університетських підручниках подають саме в термінах топології, тобто системи відкритих множин (іноді зазначають, що автором такого означення є російський математик П.С. Александров).

У статті [2] Мирон Зарицький запропонував підхід до задання топології за допомогою поняття межі. Аксиоматика М. Зарицького для оператора межі  $\partial$  виглядає так:

$$(1) A \cap B \cap \partial(A \cap B) = A \cap B \cap (\partial A \cup \partial B);$$

$$(2) \partial A = \partial(X \setminus A);$$

$$(3) \partial \emptyset = \emptyset;$$

$$(4) \partial \partial A \subset \partial A.$$

Маючи оператор межі  $\partial$  на множині, безпосередньо також одержуємо топологію на ній: за означенням, підмножина відкрита тоді і тільки тоді, коли вона не містить жодної своєї точки межі.

Статтю [2] неодноразово цитували в літературі, насамперед, у [20]. В університетських підручниках із топології (див., наприклад, [33], [34]) спосіб задання топології за допомогою оператора межі, якщо й згадується, то щонайбільше у вправах або зауваженнях. У [33] в історичних ремарках у зв'язку з поняттям межі згадується не оригінальна стаття М. Зарицького, а стаття [35], опублікована значно пізніше. Зауважимо, що в [35] наводиться модифікована аксиоматика оператора межі; у вступі автор написав “*nous démontrons l'équivalence entre cette axiomatique et celle bien connue de M. Zarycki*”.

Стаття [36] (де не цитується [2]) містить дещо іншу аксиоматику оператора межі.

Варто зазначити, що статтями Мирона Зарицького цікавились не лише топологи. У статтях [37] та [38] (див. також [39], [40]) аксиоматику Зарицького застосовують до аналізу проблем онтології (хоча цей термін запозичений з філософії, у цьому випадку йдеться про інформатику, зокрема, про теорію штучного інтелекту; втім філософські аспекти розглядуваної аксиоматики поняття межі теж не залишаються поза увагою – про це свідчить, зокрема, той факт, що стаття [37] поміщена в філософське наукове видання [41]). Цей інтерес зумовлений насамперед фунда-

ментальністю самого поняття межі, яке, попри інтуїтивну зрозумілість, вимагає строгого математичного обґрунтування.

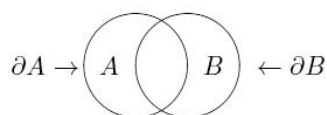
Одне несподіване згадування статті М. Зарицького можна знайти у вступній статті Ловера [42] до книги статей з теорії категорій та основ термомеханіки континуумів. Ловер відзначив властивість оператора межі  $\partial$ , що ріднить його з диференціюванням

$$\partial(A \cap B) = (\partial(A) \cap B) \cup (A \cap \partial(B));$$

аналогія з диференціюванням стає ще очевиднішою, якщо вжити архаїчну систему позначень, у якій об'єднання множин позначається знаком суми, а перетин – знаком добутку. Одержуємо “формулу Ляйбніца для межі”

$$\partial(A \cdot B) = \partial(A) \cdot B + A \cdot \partial(B). \quad (1)$$

Зауважимо, що діаграми Ейлера (див. рис.) унаочнюють цей факт.



Для точності варто зазначити, що формулу (1) використано в статті [2] як аксіому для іншої операції  $b$ , яку М. Зарицький називав "bord" (берег),  $\tilde{\partial}A = \partial A \cap A$  (природно, в (1) маємо замінити  $\partial A$  на  $\tilde{\partial}A$ ).

“Формула Ляйбніца” правильна також і для декартового множення

$$\partial(A \times B) = (\partial(A) \times B) \cup (A \times \partial(B)).$$

Зв'язок “формул Ляйбніца” для межі і диференціювання відбувається через теорему Стокса для многовидів

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

для зовнішньої диференціальної форми  $\omega$  на гладкому многовиді  $M$  з краєм (геометричною межею)  $\partial M$ .

Аналогія між переходом до межі і диференціюванням здобуває дидактичну вартісність і мала би ширше запроваджуватись в університетські підручники.

Отож, значення розглядуваної праці Зарицького [2], що, як бачимо, не зменшується з роками, полягає у знаходженні алгебричного опису поняття межі, геометричного за своєю суттю. Зауважимо, що праці М. Зарицького цитують і в сучасних публікаціях (див. [43], [44]).

На завершення хочемо висловити нашу думку, що при викладанні поняття топологічного простору ім'я Мирона Зарицького повинно згадуватись поряд із іменами класиків топології Павла Александрова та Казимира Куратовського.

Праця частково підтримана у рамках проекту “Дослідження матеріалів про життєвий шлях та наукову діяльність видатних вчених-

природодослідників, членів Наукового товариства ім. Шевченка” Державного фонду фундаментальних досліджень України (договір № Ф 65/13-2016 від 28.03 2016 р.).

### *Література*

1. Zarycki M. Une méthode d'introduction de la notion de bon ordre dans la Théorie des Ensembles / M. Zarycki // 36. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1926. – Т. 25. – С. 1-5.
2. Zarycki M. Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs aux point du vue de l'Algèbre de la Logique / M. Zarycki // Fundamenta Mathematica. – 1927. – Vol. 9. – P. 3-15.
3. Зарицький М. Правда, краса і математика / М. Зарицький // Математика серед наук. Статті В.Левицького, М.Зарицького, І. Свенціцького. – Львів: Вид. Сп. “Діло”, 1927. – С. 25-37.
4. Zarycki M. Chrestomatja matematyki greckiej / M. Zarycki. – Lwów: Filomata, 1934. – 84 s.
5. Зарицький М. Зауваження до проблеми наближених обчислень в грецькій математиці / М. Зарицький // Наук. зап. Львів. ун-ту. Серія фіз.-мат. – 1947. – Т. 5, Вип. 1. – С. 74-79.
6. Зарицький М. Астрономія в старовину / М. Зарицький // Діло. – 1934. – 14, 15 квіт.
7. Zarycki M. Astronomia w starożytności / M. Zarycki // Kwartalnik klasyczny. – Lwow, 1934. – S. 287-294.
8. Zarycki M. Matematyka w klasycznym gimnazjum / M. Zarycki // Kwartalnik klasyczny. –Lwów, 1931. – S. 153-158.
9. Zarycki M. Urywki z życia szkolnego w związku z nauczaniem matematyki. Nieco historii / M. Zarycki // Matematyka i szkoła. – 1937. – Zesz. 1. – S. 51-53.
10. Zarycki M. Urywki z życia szkolnego w związku z nauczaniem matematyki: (Ciąg dalszy). Bawmy się / M. Zarycki // Matematyka i szkoła. – 1938. – Zesz. 2-3. – S. 121-122.
11. Zarycki M. Über eine mathematische Unterhaltung / M. Zarycki // 36. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1934. – Т. 30. – С. 129-134.
12. Zarycki M. Über die statistische Korrelationskonstante von M. Steffensen / M. Zarycki // Ukrainische Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften in Lemberg. Sitzungsberichte der math.-naturwissenschaftlich-ärztlichen Sektion. – 1937. – Heft 24. – S. 5-6.
13. Зарицький М. Сучинники кореляції в теорії математичної статистики / М. Зарицький // 36. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1937. – Т. 36. – С. 41-50.
14. Зарицький М. Чиста і прикладна математика в ході століть / М. Зарицький // Діло. – 1933. – 11 трав.

15. Зарицький М. Потреби нашої економічної статистики / М. Зарицький // Діло. – 1937. – 23 трав.
16. Банах С.С. Курс функціонального аналізу (лінійні операції) / С.С. Банах – К.: Державне учбово-педагогічне видавництво Радянська Школа, 1948. – 216 с.
17. Плічко А.М. До 60-річчя публікації українського перекладу книги С. Банаха / А.М. Плічко, Я.Г. Притула // Мат. студії. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 107-112.
18. Лем С. Високий Замок / С. Лем. – Львів: ЛА “Піраміда”, 2002. – С. 79-81.
19. Пташник Б.Й. Поет математики. Аксиоми для нащадків: Українські імена у світовій науці / Б.Й. Пташник/ – Львів : Меморіал, 1992. – С. 126-142.
20. Куратовский К. Топология / К. Куратовский. – М. : Мир, 1966. – Т. I. – 595 с.
21. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions / Z. Semadeni. – Warszawa: PWN, 1971. – 136 p.
22. Гольдберг А.А. К истории украинской математической культуры в Галиции / А.А. Гольдберг, М.М. Заричный, Б.И. Пташник // Очерки истории естествознания и техники. – 1991. – Вып. 40. – С. 8-13.
23. Kuratowski C. Sur l'operation  $\bar{A}$  de l'analysis situs / C. Kuratowski // Fund. Math. – 1922. – Vol. 3. – P. 182-199.
24. Зарицький М. Похідна і когеренція абстрактної множини / М. Зарицький // Збірник матем. природописно-лікарської секції НТШ. Львів. – 1928. – Т. 27. – С. 247-259.
25. Hoberman S. A set of postulates for Boolean algebra / S. Hoberman, J. C.C. McKinsey // Bull. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 588-592.
26. Sanders Jr. S.T. Derived sets and their complements / S.T. Jr. Sanders // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – Vol. 42. – P. 577-584.
27. Stopher Jr.E.C. Cyclic relations in point set theory / E.C.Jr. Stopher // Bull. Amer. Math. Soc. – 1937. – Vol. 43. – P. 686-694.
28. Зарицький М. Алгебра Буля з замкненням і алгебра буля з похідною / М. Зарицький // Доп. АН УРСР. – 1955. – № 1. – С. 3-6.
29. Зарицький М. Кілька заміток про спійність простору / М. Зарицький // Зб. матем.-природописно-лікарської секції Наук. Т-ва ім. Шевченка у Львові. – 1927. – Т. 26. – С. 19-20.
30. Зарицький М. Деякі еквівалентні означення нещільної множини / М. Зарицький // оп. та повідомлення Львів. ун-ту. – 1947. – Вип. 1. – С. 148.
31. Зарицький М. Про одну операцію в теорії точкових множин / М. Зарицький // Наук. зап. Львів. ун-ту. Сер. фіз.-матем. – 1949. – Т. 12, Вип. 3. – С. 35-43.

32. Зарицький М.О. Деякі властивості поняття похідної множини в абстрактних просторах / М.О. Зарицький // Наук. зап. Львів. ун-ту. Сер. фіз.-матем. – 1947. –Т. 5, Вип. 1. – С. 22-23.
33. Stephen Willard. General Topology / Stephen Willard. – Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1970.
34. Vaidyanathaswamy R. Set topology / R. Vaidyanathaswamy – New York: Chelsea Publishing Co., 1960.
35. Albuquerque J. La notion de “frontiere” en topologie / J. Albuquerque // Portug. Math. – 1941. – Vol. 2. – P. 280-289.
36. Gabai Hyman. The exterior operator and boundary operator / Hyman Gabai // American Mathematical Monthly. – 1964. – Vol. 71, N 9. – P. 1029-1031.
37. Achille C. Varzi. Boundaries, Continuity, and Contact / Varzi C. Achille // Noûs. – 1997. – Vol. 31, Issue 1. – P. 26-58.
38. Barry Smith. Kognitionsforskningens topologiske grundlag / Smith Barry // Semikolon erg. – 2003. – Vol. 3, N 7. – P. 91-105.
39. Formal Ontology in Information Systems. Volume 46. Frontiers in Artificial Intelligence and Applications: edited by: N. Guarino, 1998. – 347 p.
40. Achille C. Varzi (with Roberto Casati). Parts and Places: The Structures of Spatial Representation / Varzi C. Achille (with Roberto Casati). – Cambridge, Mass. & London: MIT, A Bradford Book, 1999.
41. The Philosopher’s Annual. Volume 20: Patrick Grim, Gary Mar, and Kenneth Baynes (eds.). – Atascadero (CA): Ridgeview, 1999. – 258 p.
42. Lawvere, F. William. Introduction. Categories in continuum physics / Lawvere, F. William // Lecture Notes in Math. – 1986. – Vol. 1174, Springer, Berlin, (Buffalo, N.Y., 1982). – P. 1-16.
43. Gardner B.J. The Kuratowski closure-complement theorem / B.J. Gardner, M. Jackson // New Zealand J. Math. – 2008. – Vol. 38. – P. 9-44.
44. Sherman D. Variations on Kuratowski's 14-set theorem / D. Sherman // Am. Math. Mon. – 2010. – Vol. 117. – P. 113-123.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2016*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.ф.-м.н., професором **Никифорчиним О.Р.***

## **HE STOOD AT SOURCES OF A NEW MATHEMATICAL DISCIPLINE – TOPOLOGIES**

**To 55 - anniversary of departure in Eternity of the prominent Ukrainian  
mathematician and teacher, actual member of Scientific society named  
by Shevchenko Myron Zarytsky**

**M. M. Zarichnyy<sup>1</sup>, B. Y. Ptashnyk<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Lviv national university named by Ivan Franko;  
79000, Lvov, University str., 1; e-mail: topology@franko.lviv.ua*



---

<sup>2</sup>*Institout of applied problems of mechanics and mathematics named by I. S. Pidstrygach NAN Of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova str., 36; e-mail: ptashnyk@lms.lviv.ua*

*A vital and scientific way and **basic** results is described in **industry** of topology of Myron Zarytsky – the **prominent** Ukrainian mathematician, **actual member** of Scientific **society** the named by Shevchenko, professor of Lviv university.*

**Keywords:** *Myron Zarytsky, topology, pedagogical activity, scientific activity.*