УДК 517.98

СИМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ НА ДІЙСНОМУ БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ $L_\infty[0,1]$

Т. В. Василишин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

В роботі побудовано алгебраїчний базис алгебри всіх неперервних симетричних поліномів на дійсному банаховому просторі всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій, заданих на відрізку $[0,1]$.

Ключові слова: *симетричний поліном, алгебраїчний базис.*

1. Вступ

Симетричні поліноми і симетричні аналітичні функції на переставно-інваріантних банахових просторах є важливими об'єктами сучасного нелінійного функціонального аналізу. Вперше симетричні поліноми на дійсних банахових просторах вимірних за Лебегом інтегровних у степені ρ функцій, $1 \le \rho < +\infty$, вивчалися у роботі [3]. Зокрема, в роботі [3] побудовано алгебраїчні базиси алгебр неперервних симетричних поліномів на таких просторах (алгебраїчним базисом алгебри називають сукупність її елементів таку, що кожен елемент алгебри можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації добутків степенів елементів сукупності). Зауважимо, що дослідження, проведені в роботі [3], суттєво спиралися на властивість сепарабельності згаданих вище просторів. В той же час, в роботі [1] побудовано алгебраїчний базис алгебри всіх неперервних симетричних поліномів на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку [0,1], який є несепарабельним. На основі отриманих результатів, в роботі [1] описано спектр алгебри Фреше всіх цілих симетричних функцій обмеженого типу на даному просторі.

В даній роботі розглянуто неперервні симетричні поліноми на дійсному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку [0,1] і побудовано алгебраїчний базис алгебри всіх таких поліномів.

2. Попередні відомості

Позначимо $\mathbb{N}$ множину додатних цілих чисел і $\mathbb{Z}_+$ множину невід'ємних цілих чисел. Нехай X, Y – банахові простори. Відображення $A : X^n \to Y$, де $n \in \mathbb{N}$, називають n-лінійним відображенням, якщо A є лінійним відносно кожного зі своїх n аргументів. Згідно із [2, твердження 1.2, с. 2], n-лінійне відображення A є неперервним тоді і тільки тоді, коли скінченною є норма

$$\|A\| = \sup_{\|x_1\| \le 1, \dots, \|x_n\| \le 1} |A(x_1, \dots, x_n)|.$$

n-лінійне відображення, яке є інваріантним відносно перестановок аргументів, називають n-лінійним симетричним відображенням. Відображення $P : X \to Y$ називають n-однорідним поліномом, якщо воно є звуженням на діагональ деякого n-лінійного симетричного відображення $A_p : X^n \to Y$, тобто

$$P(x) = A_p\left(\underbrace{x, \dots x}_{n}\right)$$

для кожного $x \in X$. Відображення A_p називають n-лінійним симетричним відображенням, асоційованим із n-однорідним поліномом P. Згідно із [2, теорема 1.10, с. 6], відображення A_p можна відновити за значеннями n-однорідного полінома P за допомогою поляризаційної формули:

$$A_p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n! 2^n} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n). \qquad (1)$$

Відображення $P = P_0 + P_1 + \dots + P_N$, де $P_0 \in Y$ і P_j – це j-однорідний поліном для кожного $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, називають поліномом степеня щонайбільше N.

Нехай $L_\infty = L_\infty[0,1]$ – це дійсний банахів простір вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, із нормою

$$\|y\| = ess \sup_{t \in [0,1]} |y(t)|.$$

Нехай Ξ – це множина всіх бієкцій $\sigma[0,1] \to [0,1]$ таких, що σ і σ^{-1} є вимірними і зберігають міру Лебега. Функцію $f : L_\infty \to \mathbb{R}$ називають симетричною, якщо

$$f(y \circ \sigma) = f(y)$$

для всіх $y \in L_\infty$ і $\sigma \in \Xi$.

3. Основні результати

Для кожного $m \in \mathbb{N}$ визначимо відображення $R_m : L_\infty \to \mathbb{R}$ формулою

$$R_m(y) = \int_{[0,1]} (y(t))^m \, dt, \qquad (2)$$

де $y \in L_\infty$.

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$. Нехай $P : L_\infty \to \mathbb{R}$ – це неперервний симетричний n-однорідний поліном. Тоді поліном P можна єдиним чином подати у вигляді*

$$P=\sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n}\alpha_{k_1,\ldots,k_n}R_1^{k_1}\ldots R_n^{k_n},$$

де $\alpha_{k_1,\ldots,k_n}\in\mathbb{R}$, $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Z}_+$ *а поліноми* $R_1,\ldots,R_n$ *визначені рівністю (2).*

Доведення. Нехай A_p – це n-лінійне симетричне відображення, асоційоване із поліномом P. Нехай $L_\infty^{\mathbb{C}}$ – це комплексний банахів простір вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій $z:[0,1]\to\mathbb{C}$, із нормою

$$\|z\|=ess\sup_{t\in[0,1]}|z(t)|.$$

Зауважимо, що кожну функцію $z\in L_\infty^{\mathbb{C}}$ можна єдиним чином подати у вигляді

$$z=z^{(0)}+iz^{(1)},$$

де $z^{(0)}$, $z^{(1)}$ – це функції із L_∞, визначені як $z^{(0)}(t)=\operatorname{Re}z(t)$ і $z^{(1)}(t)=\operatorname{Im}z(t)$ для $t\in[0,1]$. Визначимо відображення $A_p^{\mathbb{C}}:\left(L_\infty^{\mathbb{C}}\right)^n\to\mathbb{C}$ формулою

$$A_p^{\mathbb{C}}(z_1,\ldots,z_n)=\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}i^{j_1+\ldots+j_n}A_p\left(z_1^{(j_1)},\ldots,z_n^{(j_n)}\right),\qquad(3)$$

де $z_1,\ldots,z_n\in L_p^{\mathbb{C}}$. Можна перевірити, що $A_p^{\mathbb{C}}$ є n-лінійним симетричним відображенням. Доведемо, що відображення $A_p^{\mathbb{C}}$ є неперервним. Для цього покажемо, що норма відображення $A_p^{\mathbb{C}}$ є скінченною. Оскільки поліном P – неперервний, то асоційоване з ним n-лінійне симетричне відображення A_p, згідно із формулою (1), також є неперервним і, як наслідок, норма відображення A_p є скінченною. Згідно із формулою (3) і означенням норми n-лінійного відображення,

$$\left\|A_p^{\mathbb{C}}\right\|=\sup_{\|z_1\|\le1,\ldots\|z_n\|\le1}\left|A_p^{\mathbb{C}}(z_1,\ldots,z_n)\right|\le\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}\sup_{\left\|z_1^{(j_1)}\right\|\le1,\ldots\left\|z_n^{(jn)}z_n\right\|\le1}\left|A_p\left(z_1^{(j_1)},\ldots,z_n^{(j_n)}\right)\right|=2^n\left\|A_p\right\|.$$

Отже, норма відображення $A_p^{\mathbb{C}}$ є скінченною, тому відображення $A_p^{\mathbb{C}}$ є неперервним. Нехай $P^{\mathbb{C}}$ – це звуження на діагональ відображення $A_p^{\mathbb{C}}$. Оскільки відображення $A_p^{\mathbb{C}}$ – це неперервне симетричне n-лінійне відображення, то відображення $P^{\mathbb{C}}$ – це неперервний n-однорідний поліном на просторі $L_\infty^{\mathbb{C}}$. Покажемо, що поліном $P^{\mathbb{C}}$ є симетричним. Нехай $z\in L_\infty^{\mathbb{C}}$ і $\sigma\in\Xi$. Тоді

$$P^{\mathbb{C}}(z\circ\sigma)=\sum_{j_1=0}^{1}\ldots\sum_{j_n=0}^{1}i^{j_1+\ldots+j_n}A_p\left(z^{(j_1)}\circ\sigma,\ldots,z^{(j_n)}\circ\sigma\right).$$

Згідно із формулою (1) і згідно із симетричністю полінома P,

$$A_p\left(z^{(j_1)}\circ\sigma,...,z^{(j_n)}\circ\sigma\right)=A_p\left(z^{(j_1)},...,z^{(j_n)}\right),$$

тому

$$P^{\mathrm{C}}(z\circ\sigma)=\sum_{j_1=0}^{1}...\sum_{j_n=0}^{1}i^{j_1+...+j_n}A_p\left(z^{(j_1)},...,z^{(j_n)}\right)=P^{\mathrm{C}}(z).$$

Отже, поліном P^{C} є симетричним. Згідно із [1, теорема 4.3], поліном P^{C} можна єдиним чином подати у вигляді

$$P^{\mathrm{C}}(z)=\sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n}\alpha_{k_1,...,k_n}\left(R_1^{\mathrm{C}}(z)\right)^{k_1}...\left(R_n^{\mathrm{C}}(z)\right)^{k_n},$$

де $z\in L_\infty^{\mathrm{C}}$, $k_1,...,k_n\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha_{k_1,...,k_n}$ – це, взагалі кажучи, комплексні коефіцієнти, і відображення $R_m^{\mathrm{C}}:L_\infty^{\mathrm{C}}\to\mathbb{C}$, де $m\in\mathbb{N}$, визначені рівністю

$$R_m^{\mathrm{C}}(z)\to=\int_{[0,1]}(z(t))^m\,dt.$$

Для $y\in L_\infty$ маємо $P(y)=P^{\mathrm{C}}(y)$ і $R_m(y)=R_m^{\mathrm{C}}(y)$ для $m\in\mathbb{N}$. Тому

$$P(y)=\sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n}^{1}...\ \alpha_{k_1,...,k_n}R_1^{k_1}(y)...R_n^{k_n}(y) \tag{4}$$

для кожного $y\in L_\infty$. Залишилося показати, що коефіцієнти $\alpha_{k_1,...,k_n}$ є дійсними і що розклад (4) – єдиний. Визначимо відображення $J_n:\mathbb{R}^n\to L_\infty$ формулою

$$J_n(a)=\sum_{s=1}^{n}a_s\chi_{\left[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\right]},$$

де $a=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$ і $\chi_{\left[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\right]}$ – це характеристична функція відрізка $\left[\frac{s-1}{n},\frac{s}{n}\right]$. Зауважимо, що відображення J_n є лінійним, ін'єктивним і неперервним. Оскільки відображення P є симетричним n-однорідним поліномом на L_∞, то, як легко переконатися, відображення $P\circ J_n$ є симетричним n-однорідним поліномом на $\mathbb{R}^n$. Тому існують дійсні коефіцієнти $\beta_{k_1,...,k_n}$ такі, що

$$(P\circ J_n)(a)=\sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n}\beta_{k_1,...,k_n}(\psi_1(a))^{k_1}...(\psi_n(a))^{k_n} \tag{5}$$

для кожного $a=(a_1,...,a_n)\in\mathbb{R}^n$, де $k_1,...,k_n\in\mathbb{Z}_+$ і поліноми $\psi_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ визначені рівністю

$$\psi_m(a)=\sum_{s=1}^{n}a_s^m$$

для кожного $m\in\{1,2,...,n\}$. Згідно із [3, твердження 1], поліноми $\psi_1,...,\psi_n$ є алгебраїчно незалежними, тому розклад (5) – єдиний. З іншого боку,

$$\left(P\circ J_n\right)(a)=\frac{1}{n}\psi_m(a)$$

для кожного $m\in\{1,2,...,n\}$ і $a\in\mathbb{R}^n$. Тому, згідно із рівністю (4),

$$\left(P\circ J_n\right)(a)=\sum_{k_1+2k_2+...+nk_n=n}\frac{\alpha_{k_1,...,k_n}}{n^{k_1+...+k_n}}\left(\psi_1(a)\right)^{k_1}...\left(\psi_n(a)\right)^{k_n}.$$

Згідно із єдиністю розкладу (5),

$$\beta_{k_1,...,k_n}=\frac{\alpha_{k_1,...,k_n}}{n^{k_1+...+k_n}}.$$

Звідси випливає, що коефіцієнти $\alpha_{k_1,...,k_n}$ є дійсними. Також, із єдиності коефіцієнтів $\beta_{k_1,...,k_n}$ у розкладі (5) випливає єдиність коефіцієнтів $\alpha_{k_1,...,k_n}$ у розкладі (4). ■

Наслідок 2. *Сукупність поліномів* $\{R_1,...,R_m,...\}$, *визначених рівністю (2), є алгебраїчним базисом алгебри всіх неперервних симетричних поліномів на просторі* L_∞.

Література

1. Galindo P. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞ / P. Galindo, T. Vasylyshyn, A. Zagorodnyuk // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A. – 2017. – V. 147, № 4. – P. 743-761.
2. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces / J. Mujica // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford. – 1986. – 447 p.
3. Немировский А.С. О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве / А.С. Немировский, С.М. Семенов // Матем. сб. – 1973. – Т. 92, № 2. – С. 257-281.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.06.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. ***Шариним С.В.****,*
к.ф-м.н., с. н. с. ***Чернегою І.В.*** *(м. Львів)*

SYMMETRIC POLYNOMIALS ON THE REAL BANACH SPACE $L_\infty[0,1]$

T. V. Vasylyshyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

We construct the algebraic basis of the algebra of all continuous symmetric polynomials on the real Banach space of all Lebesgue measurable essentially bounded functions on $[0,1]$.

Key words: : *symmetric polynomial, algebraic basis.*