УДК 539.375

ДВОПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ПРО ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКИХ ВОЛОКОН РОМБІЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

В. А. Кривень, Л. І. Цимбалюк, Н. Р. Крива
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя; 46001, м. Тернопіль,вул. Руська, 56;
тел.: +380 352 526613;e-mail: mmethod@tu.edu.te.ua

Знайдено чисельно-аналітичний розв'язок антиплоскої задачі для ідеально пружно-пластичного тіла з двоперіодичною системою жорстких волокон ромбічного перерізу. Визначено напружено деформований стан тіла поза включеннями, довжини між фазних пластичних смуг, як функції величини навантаження. Для довільних геометричних співвідношень волокна і періоду задачі отримано формули для ефективного модуля зсуву тіла у пружній та пружно-пластичній постановках задачі.

Ключові слова :*двоперіодична задача, ромбічні включення, пластичне відшаровування.*

Вступ. Дослідження напружено-деформівного стану тіл з періодичними системами включень представляють значний інтерес для теорії міцності композитів і армованих матеріалів та прогнозування й оптимізації їх деформаційних характеристик. Для лінійно-пружних тіл ця проблема вивчалася у багатьох працях [1, 2]. Для пружно-пластичних тіл ці питання з'ясовано набагато слабше. Слід відзначити, що побудова найбільш бажаних для наукових досліджень аналітичних розв'язків таких задач якраз і є дуже складною, особливо для тіл скінченних розмірів. Одним із способів наближеного аналізу механічних полів для тіл скінченних розмірів є зведення проблеми до вивчення двоперіодичної задачі, у якій тіло скінченних розмірів формує (якщо це можливо) одну комірку відповідної періодичної задачі.

Метою даного дослідженняє вивчення розвитку міжфазного пластичного розшарування жорсткого включення ромбічного перерізу та аналіз впливу відшаровуння на ефективний модуль зсуву.

Постановка задачі. Визначимо антиплоский пружно-пластичний напружено-деформівний стан тіла із двоперіодичною системою жорстких волокон ромбічного перерізу

$$\frac{|y+2nb|}{h}+\frac{|x+2nb|}{l}\le 1, \quad -\infty < z < +\infty,$$

де $2a$ і $2b$ – відстані між центрами волокон у горизонтальному та вертикальному напрямках; $2h$ і $2l$ – довжини горизонтальної й вертикальної діагоналей перерізу волокна. Навантаження задано напруженням у вершинах прямокутника-періода $\tau_{yz}(\pm a,\pm b)=\tau_0, \tau_{xz}(\pm a,\pm b)=0$. Матеріал основного тіла вважаємо однорідним та ізотропним з модулем зсуву μ та ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості k.

За такого навантаження в околі вершин вертикальних діагоналей включень виникатимуть пластичні деформації, які можна вважати локалізованими уздовж границі включень у шарах нульової товщини (рис. 1). Задача полягає у визначенні напружено-деформівного стану основного тіла, та у визначенні залежної від величини навантаження довжини смуг пластичного відшаровування та дослідженні впливу пластичного відшаровування на ефективний модуль зсуву тіла.

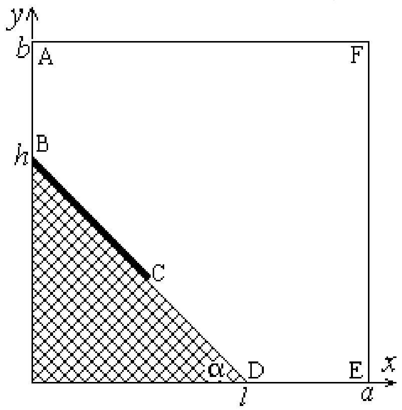

Рис. 1. Комірка періоду задачі (BC – смуга пластичного відшаровування)

Формалізація та розв’язок задачі. Поза включеннями середовище перебуває у пружному стані, а утворена компонентами напружень функція $\tau(\zeta)=\tau_{yz}(x,y)+i\tau_{xz}(x,y)\,(\zeta=x+iy)$є аналітичною [3].Для її визначення, аналогічно, як у роботі [4, 5],приходимо до крайової задачі у п’ятикутнику $ABDEF$ (область D).

$$
\begin{aligned}
&Im\,\tau(\zeta)=0 \quad (\zeta\in AB\cup AF\cup EF\cup DE),\\
&|\tau(\zeta)|=k \qquad (\zeta\in BC),\\
&arg\,\tau(\zeta)=\alpha \quad \zeta\in CD,\\
&\tau(a+ib)=\tau_0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\alpha=arcsin\, h/\sqrt{h^2+l^2}$.

Можна переконатися, що $\tau(\zeta)$ однолиста в області D і конформно відображає її на круговий сектор – область G (рис. 2). Тому функцію $\tau(\zeta)$ можна знайти методом конформних відображень[6]. Шукатимемо її у параметричній формі $\tau=\tau(t), \zeta=\zeta(t)$ $(t\in \mathrm{H})$, де H – верхня півплощина τ (див. рис. 2).

Композиції елементарних відображень отримуємо у вигляді:

$$\tau(t)=k(t_c-1)^{\frac{\alpha}{\pi}}\left(\sqrt{t_c-t}+\sqrt{1-t}\right)^{-\frac{2\alpha}{\pi}}, \tag{2}$$

де $t_c=\left(\left(\tau_0^{\frac{\pi}{\alpha}}+k^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)\Big/\left(\tau_0^{\frac{\pi}{\alpha}}-k^{\frac{\pi}{\alpha}}\right)\right)^2$ – афікс точки C у площині t.

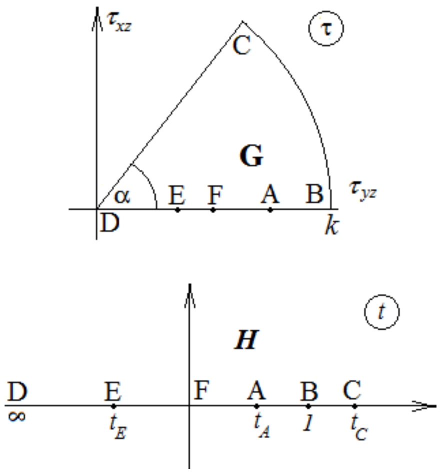

Рис. 2. Області конформного відображення у площинах τ і t

Для знаходження функції $\zeta(t)$ скористаємося інтегралом Крістофеля – Шварца :

$$\zeta(t)=ih+M\int_1^t \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta-t_A)\eta(\eta-t_E)}(\eta-1)^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{\pi}}}, \tag{3}$$

де $M=be^{-i\alpha}\left(\int_{t_E}^{0}F(\eta)d\eta\right)^{-1}$, $F(\eta)=|\eta||\eta-1|^{\frac{\alpha}{\pi}-\frac{1}{2}}|(\eta-t_A)(\eta-t_E)|^{-\frac{1}{2}}$.

Параметри t_A, t_E визначаються відношенням сторін п'ятикутника $ABDEF$ площини ζ :

$$\frac{a}{b}=\frac{\int_{t_E}^{0}F(\eta)d\eta}{\int_{0}^{t_A}F(\eta)d\eta}, \quad \frac{h}{b}=1-\frac{\int_{t_A}^{1}F(\eta)d\eta}{\int_{t_E}^{0}F(\eta)d\eta}. \tag{4}$$

Існування та єдність розв'язку системи (4) відносно t_A, t_E гарантується теоремою Рімана про конформне відображення. Знайдемо розв'язок за допомогою наступного алгоритму послідовних наближень [4]:

$$t_A^{(m+1)} = t_A^{(m)} \frac{h\, b^{(m)}}{b\, h^{(m)}}, \quad t_E^{(m+1)} = t_E^{(m)} \frac{b\, a^{(m)}}{a\, b^{(m)}}, \tag{5}$$

де $$a^{(m)} = \int_0^{t_A^{(m)}} F_m(\eta) d\eta, \; b^{(m)} = \int_{t_E^{(m)}}^0 F_m(\eta) d\eta,$$

$$h^{(m)} = \int_{t_E^{(m)}}^0 F_m(\eta) d\eta - \int_{t_A^{(m)}}^1 F_m(\eta) d\eta,$$

$$F_m(\eta) = |\eta| |\eta - 1|^{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2}} \left| \left(\eta - t_A^{(m)}\right) \eta \left(\eta - t_A^{(m)}\right) \right|^{-\frac{1}{2}},$$

$t_A^{(0)}, \quad t_B^{(0)}$ – нульові наближення.

Для довільно вибраних нульових наближень $t_E^{(0)} \in (-\infty, 0), \quad t_A^{(0)} \in (0, 1)$ алгоритм (5) збігається до розв'язку системи (4) із швидкістю геометричної прогресії, у чому можна переконатися, перевіривши умови теореми Банаха про стискувальне відображення.

Формули (2), (3) виражають функцію $\tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ у п'ятикутнику $ABDEF$ для деякого відношення довжини сторін $|EF|, |FA|$ та $|AB|$ при довільних $t_E \in (-\infty, 0), \quad t_A \in (0, 1)$. Кути фігури $ABDEF$ не залежать від t_A, t_E. Тому як критерій зупинки ітераційного процесу вибираємо умову: задана та реальна геометрія фігури $ABDEF$ відрізняється не більше наперед вибраної малої величини ε:

$$max\left\{ \left| \frac{b}{a} - \frac{b^{(m)}}{a^{(m)}} \right|, \quad \left| \frac{h^{(m)}}{b^{(m)}} - \frac{h}{b} \right| \right\} \le \varepsilon.$$

Довжину пластичних смуг як функцію τ_0 визначаємо із формули (3):

$$d = b \frac{\int_1^{t_c} F(\eta) d\eta}{\int_{t_E}^0 F(\eta) d\eta}.$$

Ефективний модуль зсуву μ_{ef} дорівнює відношенню усередненого напруження T на стороні періоду задачі AF (див. рис.1) до максимально відносного переміщення $\Delta w = w(x, b) - w(x, 0)$ у прямокутникуперіоді. Для його знаходження визначимо $\Delta w = 2(w(x,b) - w(x,0))$ та T – усереднене напруження τ_{yz} на стороні AF:

$$\Delta w = \frac{2}{\mu}\int_0^b \tau_{yz}(a,y)dy, \quad T = \frac{1}{a}\int_0^a \tau_{yz}(x,b)dx .$$

Замінивши у останніх інтегралах інтегрування по ζ інтегруванням по t, отримаємо:

$$\Delta w = \frac{M}{\mu}\int_{t_E}^{0} \tau(\eta)F(\eta)d\eta,$$

$$\frac{T}{a} = \int_0^{t_A} \tau(\eta)F(\eta)d\eta \Big/ \int_0^{t_A} F(\eta)d\eta . \tag{6}$$

Отже,

$$\mu_{ef}^{p} = \mu \frac{\left(a\int_{t_E}^{0} F(\eta)d\eta \int_0^{t_A} \tau(\eta)F(\eta)d\eta \right)}{\left(b\int_0^{t_A} F(\eta)d\eta \int_{t_E}^{0} \tau(\eta)F(\eta)d\eta \right)}. \tag{7}$$

У парі з формулою (6) останнє співвідношення виражає довжину пластичних смуг як функцію усередненого нормального напруження зсуву, що діє на стороні EF.

Визначимо $\mu_{ef} = \mu_{ef}^{e}$ через пружний розв'язок задачі та $\mu_{ef} = \mu_{ef}^{p}$ на основі припущення про часткове пластичне відшарування включень.

Щоб визначити μ_{ef}^{e}, знайдемо пружний розв'язок задачі. Його можна отримати шляхом граничного переходу у функції $\tau(\zeta)$ при $k \to \infty$. З формули (2) для $\tau^{e}(\zeta) = \lim\limits_{k\to\infty} \tau(\zeta)$ одержуємо, що

$$\tau^{e}(t) = \tau_0 (1-t)^{-\frac{\alpha}{\pi}} . \tag{8}$$

Пара функцій (3), (8) виражає пружний розв'язок двоперіодичної задачі для системи ромбічних включень, що утворюють прямокутну гратку, четвертина період у котрої показана на рис. 1. Шляхом аналогічних міркувань, що привели до залежності (7), одержуємо

$$\mu_{ef}^{e} = \mu \frac{a\int_{t_E}^{0} F(\eta)d\eta \int_0^{t_A} \tau^{e}(\eta)F(\eta)d\eta}{b\int_0^{t_A} F(\eta)d\eta \int_{t_E}^{0} \tau^{e}(\eta)F(\eta)d\eta} . \tag{9}$$

З формул (7), (9) знаходимо

$$\mu_{ef}^{p} = \mu_{ef}^{e} \frac{\int_{0}^{t_A} \tau(\eta) F(\eta) d\eta \int_{t_E}^{0} \tau^e(\eta) F(\eta) d\eta}{\int_{t_E}^{0} \tau(\eta) F(\eta) d\eta \int_{0}^{t_A} \tau^e(\eta) F(\eta) d\eta}.$$

При низьких навантаженнях, коли довжини пластичних смуг є порівняно малими, маємо $\mu_{ef}^{P} \approx \mu_{ef}^{e}$.

Висновки. Знайдено аналітичні залежності ефективних модулів зсуву від величини навантаження при довільних геометричних параметрах системи. Пластичне відшаровування жорстких ромбічних призматичних включень, що утворюють двоперіодичну гратку, призводить до нижчого ефективного модуля зсуву проти отриманого за пружним розв'язком. Ефективний модуль зсуву, визначений з урахуванням пластичного відшарування включень, залежить від навантаження і зменшується за його збільшення.

Література

1.Большаков В. И. Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры / В.И. Большаков, И.В. Андрианов, В.В. Данишевский. - Днепропетровск: Пороги, 2008. – 196 с.

2. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія / Г .Т. Сулим. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. - 716 с.

3. Kryven'V.A. Antiplane problem for an elastic perfectly plastic body with biperiodic system of rhombic notches / V.A Kryven' // Materials Science. – 2001. - Vol. 37, №6. – P. 866-872.

4. Кривень В.А. Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями / В.А. Кривень // Математичні методи і фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №1. – С. 109-113

5. Lazzarin P. Plastic notch stress intensity factors for pointed V-notches under antiplane shear loading / P. Lazzarin, M. Zappalorto // International Journal of Fracture.– 2008. – Vol. 152, No 1. - P. 1–25.

6. Crowdy D.G. Schwarz-Christoffel mappings to unbounded multiply connected polygonal regions / D.G. Crowdy. – Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 2007. – P. 319-339.

Стаття надійшла до редакційної колегії 8.02.2017 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.,***

д.т.н., професором ***Лисканичем М.В.***

DOUBLE-PERIODICPROBLEMOFTHE PLASTICEXFOLIATION-OFRIGIDINCLUSIONSWITHRHOMBICCROS SECTIONS

V. A. Kryven, L. I. Tsymbaliuk, N. R. Kryva
Ternopil Pul'uj National Technical University,
46001, Ternopil, Ruskastr., 56;
e-mail: *mmethod@tu.edu.te.ua*

The numeral-analytical decision of antiflat task for an ideally resilient-plastic body is found the with two periodical system of hard fibres of rhombic cut. The deformed being of body out of inclusions is certainly tense, lengths between phase plastic bars, as functions of size of loading. For arbitrary geometrical correlations of fibre and period of task formulas are got for the effective module of change of body in resilient and resilient-plastic raising of task.

Key words : *two periodical problem, rhombic inclusions, plastic removing a layer by a layer.*