УДК 517.53

СТІЙКІСТЬ ДЕФЕКТІВ ЦІЛОЇ КРИВОЇ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

І. Є. Овчар, Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Побудовано цілу криву нескінченного порядку, для якої величини неванліннівських та валіронівських дефектів змінюються при лінійному перетворенні аргументу.

Ключові слова: *ціла крива, характеристика росту, функція наближення, неванліннівський дефектний вектор, валіронівський дефектний вектор, величина дефекту.*

В даній статті використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1]. Розглядаємо цілі криві з компонентами без спільних нулів, однак, допускаємо їхню лінійну залежність.

Будемо вивчати питання, чи змінюються величини дефектів при переході від цілої кривої $\vec{G}(z)$ до $\vec{G}(\lambda z+\beta)$, де $\lambda,\ \beta \in \boldsymbol{C}$, $\lambda \neq 0$.

Покажемо спочатку, що при переході від $\vec{G}(z)$ до $\vec{G}(\lambda z)=\vec{G}_1(z)$ дефекти в розумінні Неванлінни та Валірона не змінюються для трансцендентних цілих кривих. Дійсно,

$$T\left(r,\vec{G}_1\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}_1\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}\left(|\lambda|re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi=T\left(|\lambda|r,\vec{G}\right),$$

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}_1\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\left\|\vec{G}_1\left(re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\|\vec{a}\|}{\left|\vec{G}_1\left(re^{i\varphi}\right)\cdot\vec{a}\right|}d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(|\lambda|re^{i\varphi}\right)\right\|\cdot\|\vec{a}\|}{\left|\vec{G}\left(|\lambda|re^{i\varphi}\right)\cdot\vec{a}\right|}d\varphi=m\left(|\lambda|r,\vec{a},\vec{G}\right)$$

для довільного вектора $\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p$ такого, що $\vec{G}(z)\cdot\vec{a}\not\equiv 0$. Тому

$$\delta\left(\vec{a},\,\vec{G}_1\right)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\vec{a},\vec{G}_1\right)}{T\left(r,\,\vec{G}_1\right)}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m\left(|\lambda|r,\vec{a},\vec{G}\right)}{T\left(|\lambda|r,\,\vec{G}\right)}=\delta\left(\vec{a},\,\vec{G}\right),$$

$$\Delta\left(\vec{a},\,\vec{G}_1\right)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(r,\vec{a},\vec{G}_1\right)}{T\left(r,\,\vec{G}_1\right)}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m\left(|\lambda|r,\vec{a},\vec{G}\right)}{T\left(|\lambda|r,\,\vec{G}\right)}=\Delta\left(\vec{a},\,\vec{G}\right).$$

Отже, множини неванліннівських та валіронівських і, тим більше, пікарівських та борелівських виключних значень для $\vec{G}(z)$ і $\vec{G}(\lambda z)$ при $\lambda \neq 0$ співпадають.

Як бачимо, нам достатньо обмежитись порівнянням цілих кривих $\vec{G}(z)$ і $\vec{G}(z+h)$.

Надалі будемо писати $\vec{G}(z+h)=\vec{G}_h(z)$ і всі величини, які відносяться до $\vec{G}_h(z)$, позначатимемо індексом h; відсутність цього індексу означає, що величина відноситься до $\vec{G}(z)$. Легко отримати такі співвідношення:

$$n\left(r-2|h|,\vec{a},\vec{G}\right)\le n_h\left(r-|h|,\vec{a},\vec{G}_h\right)\le n\left(r,\vec{a},\vec{G}\right) \qquad \left(r>2|h|\right),$$

$$\left(1+o(1)\right)N\left(r-2|h|,\vec{a},\vec{G}\right)\le N_h\left(r-|h|,\vec{a},\vec{G}_h\right)\le \left(1+o(1)\right)N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right),$$

$$\left(1+o(1)\right)T\left(r-2|h|,\vec{G}\right)\le T_h\left(r-|h|,\vec{G}\right)\le \left(1+o(1)\right)T\left(r,\vec{G}\right).$$

Звідси випливає, що $n\left(r,\vec{a}\right)$ і $n_h\left(r,\vec{a}\right)$, $N\left(r,\vec{a}\right)$ і $N_h\left(r,\vec{a}\right)$, $T\left(r,\vec{G}\right)$ і $T_h\left(r,\vec{G}\right)$ мають відповідно однакові категорії росту (теорема 1.6 гл. II в [2]). Отже, множини борелівських виключних значень для $\vec{G}(z)$ і $\vec{G}(z+h)$ співпадають. Для пікарівських виключних значень це очевидно. Логічно було б очікувати такого співпадання для множин неванліннівських та валіронівських виключних значень. Ми побудуємо цілу криву нескінченного порядку, для якої це не зовсім так.

Використовуватимемо відомий приклад Дюге [3] мероморфної функції нескінченного порядку $f(z)=\psi(z)/\psi(-z)$, де $\psi(z)=\exp\left(e^z\right)$. Для цієї функції (ст. 196-198 в [2]):

$$\delta(0,f)=\Delta(0,f)=\frac{1}{2},\ \ \delta(\infty,f)=\Delta(\infty,f)=\frac{1}{2}$$

$$\delta(0,f_h)=\Delta(0,f_h)=\frac{e^{-h}}{e^h+e^{-h}},\ \ \delta(\infty,f_h)=\Delta(\infty,f_h)=\frac{e^{h}}{e^h+e^{-h}}.$$

Розглянемо цілу криву

$$\vec{G}(z)=\left(1,\, z,\, \dots,\, z^{p-3},\, \psi(-z),\, \psi(z)\right). \tag{1}$$

Обмежуємось випадком $p\ge 3$, бо при $p=2$ можна вважати, що маємо мероморфну функцію $f(z)=\psi(z)/\psi(-z)$. Очевидно, компоненти розглядуваної цілої кривої лінійно незалежні і не мають спільних нулів.

Покажемо, що

$$T\left(r,\vec{G}\right)=\left(2+o(1)\right)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}}=\left(2+o(1)\right)T(r,\psi),\qquad r\to\infty. \tag{2}$$

Дійсно,

$$T\left(r,\vec{G}\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left(1+\left|re^{i\varphi}\right|^2+\ldots+\left(\left|re^{i\varphi}\right|^{p-3}\right)^2+\left|\psi\left(-re^{i\varphi}\right)\right|^2+\left|\psi\left(re^{i\varphi}\right)\right|^2\right)^{1/2}d\varphi\le$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\left(1+r^2+\ldots+\left(r^{p-3}\right)^2\right)^{1/2}d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|\psi\left(-re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|\psi\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\le\left(p-3\right)\ln r+O\left(1\right)+T\left(r,\psi\right)+T\left(r,\psi\right)=$$

$$=\left(2+o\left(1\right)\right)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}},\qquad r\to\infty, \tag{3}$$

бо $\left(p-3\right)\ln r=o\left(\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}}\right)$ при $r\to\infty$ і $T\left(r,\psi\right)=\left(1+o\left(1\right)\right)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}}$ при $r\to\infty$ (див. (6.4) розд. IV в [2]).

Але

$$T\left(r,\vec{G}\right)\ge T\left(r,f\right)=\left(2+o\left(1\right)\right)\frac{e^r}{\sqrt{2\pi^3 r}},\qquad r\to\infty. \tag{4}$$

Порівнюючи (3) та (4), отримуємо (2).

Розглянемо вектор $\vec{a}=\left(0,0,\ldots,0,1\right)\in\boldsymbol{C}^p$.

Очевидно, $\vec{G}\left(z\right)\cdot\vec{a}=\psi\left(z\right)$, тому (див. (6.5) гл. IV в [2])

$$N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)=N\left(r,0,\psi\right)=\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r,\psi\right),\qquad r\to\infty. \tag{5}$$

Тоді із (2) та (5), отримуємо

$$\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)=\Delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)=1-\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)}{T\left(r,\vec{G}\right)}=1-\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r,0,\psi\right)}{2T\left(r,\psi\right)}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}. \tag{6}$$

Нехай h – дійсне число, відмінне від нуля. Розглянемо цілу криву $\vec{G}_h\left(z\right)=\vec{G}\left(z+h\right)$. Враховуючи, що (ст. 197 в [2])

$$T\left(r,\psi_h\right)=e^hT\left(r,\psi\right)+O\left(1\right),\qquad r\to\infty,$$

$$N\left(r,0,\psi_h\right)=\left(1+o\left(1\right)\right)T\left(r,\psi_h\right),\qquad r\to\infty,$$

та проводячи аналогічні міркування до вищенаведених, знаходимо:

$$T\left(r,\vec{G}_h\right)=\left(1+o\left(1\right)\right)\left(e^h+e^{-h}\right)T\left(r,\psi\right),\qquad r\to\infty,$$

$$N\left(r,\vec{a},\vec{G}_h\right)=N\left(r,0,\psi_h\right)=e^hT\left(r,\psi\right)+O\left(1\right),\qquad r\to\infty.$$

З останніх двох рівностей легко знаходимо

$$\delta\left(\vec{a},\vec{G}_h\right)=\Delta\left(\vec{a},\vec{G}_h\right)=1-\lim_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\vec{a},\vec{G}_h\right)}{T\left(r,\vec{G}_h\right)}=\frac{e^{-h}}{e^{h}+e^{-h}}.$$

При $h=0$ отримуємо (6).

Отже, ми бачимо, що дефект цілої кривої $\vec{G}(z+h)$ для вектора $\vec{a}=(0,0,\ldots,0,1)$ відмінний від дефекту цілої кривої $\vec{G}(z)$ для цього ж вектора.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые. Ч.: Вища школа / В.П. Петренко. – 1984. – 136 с.
2. Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функцій / А.А. Гольдберг, И.В. Островский. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
3. Dugue D. Le defaut au sens de M. Nevanlinna depend de l’origine choisine, C. r. Acad. sci. 225 (1947), 555-557.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2017 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Скасківим О.Б.***

STABILITY OF DEFECTS AN ENTIRE CURVE OF INFINITE ORDER

I. Ye. Ovchar, Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivs’k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs’k, Karpatska Str. 15;
ph: +380 (342) 72-71-31; e-mail e-mail: math@nung.edu.ua

An entire curve of infinite order is constructed for which the values of Nevanlinnian and Valeronian defects change with linear transformation of the argument.

Key words: *whole curve, growth characteristic, approximation function, Nevanlinnavsky defective vector, Valerian defect vector, defect value.*