Алгебра і геометрія

УДК 517.98

РЕГУЛЯРНІСТЬ ЗА АРЕНСОМ ПЕРЕДСПРЯЖЕНОГО ПРОСТОРУ ДО АЛГЕБРИ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ОБМЕЖЕНОГО ТИПУ НА БАНАХОВІЙ АЛГЕБРІ

А. В. Загороднюк, О. Г. Тарас
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57;
e-mail: andriyzag@yahoo.com, elena_taras@ukr.net

В роботі досліджено умови нерегулярності за Аренсом передспряженого простору до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу на комплексній банаховій алгебрі. Показано, що даний передспряжений простір є алгеброю відносно операцій додавання і множення – «мультиплікативної» згортки лінійних неперервних функціоналів.

Ключові слова: *алгебра аналітичних функцій обмеженого типу, передспряжений простір, регулярність за Аренсом.*

1. Попередні відомості.

Нехай A – комплексна банахова алгебра з топологічним базисом Шаудера $\{e_k\}$. Алгеброю $H_b(A)$ аналітичних функцій обмеженого типу називають простір всіх аналітичних функцій, які є обмеженими на обмежених підмножинах в A (зокрема, в якості таких підмножин розглядаємо кулі B_r з центром в нулі радіуса $r \in Q$) з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм

$$\|f\|_r = \sup_{x \in B_r} |f(x)|. \qquad (1)$$

Алгебра аналітичних функцій обмеженого типу є локально-опуклим метризованим повним топологічним простором.

Відомо, що операцію множення банахової алгебри A можна продовжити у другий спряжений простір A^{**}. Таке продовження (яке має назву продовження Аренса), взагалі кажучи, не є єдиним. Якщо дане продовження єдине, то алгебру A називають регулярною за Аренсом.

Означення 1. *Білінійне відображення* $B(x, y)\colon A \times A \to A$ *називається регулярним за Аренсом, якщо* $\lim\limits_{\alpha}\lim\limits_{\beta} B(x_\alpha, y_\beta) = \lim\limits_{\beta}\lim\limits_{\alpha} B(x_\alpha, y_\beta)$, *де* $(x_\alpha),(y_\beta)$ *– напрямленості з* A*, збіжні у *-слабкій топології простору* A^{**}.

Іншими словами, білінійне відображення є регулярним за Аренсом, якщо його продовження у $A^{**}\times A^{**}$ не залежить від порядку взяття границі по напрямленостях, тобто є єдиним. У випадку, коли білінійне відображення є асоційованим з операцією множення в A, тобто $B(x,y)=xy$, то регулярність за Аренсом відображення B означає регулярність за Аренсом алгебри A і відповідне продовження $\widetilde{B}(x,y)\colon A^{**}\times A^{**}\to A^{**}$ є продовженням Аренса операції множення алгебри A у A^{**}.

Якщо алгебра A є комутативною, то відображення $B(x,y)$, яке асоційоване з операцією множення, є симетричним, але його продовження у A^{**} може виявитись не єдиним, а, отже, нерегулярним за Аренсом (наприклад, відомо, що продовження комутативної операції множення у l_1^{**} є некомутативним, а, отже, алгебра l_1 не є регулярною за Аренсом).

Багато праць було присвячено питанню існування передспряженого простору до локально-опуклого простору і вивченню його властивостей.

У роботі [1] описаний спосіб побудови передспряженого простору до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(X)$ на довільному комплексному банаховому просторі X з топологією, яка породжена зліченою системою напівнорм (1).

Використовуючи такий підхід, в даній роботі досліджено питання регулярності за Аренсом передспряженого простору до алгебри аналітичних функцій на банаховій алгебрі A а, також, показано, що передспряжений простір також є алгеброю відносно операцій додавання і “мультиплікативної” згортки.

В роботах [3], [5] побудовано і досліджено властивості так званої “мультиплікативної” згортки, яка пов’язана із операцією множення банахової алгебри A. Дана згортка є узагальненням відомого продовження Аренса операції множення банахової алгебри на спряжений простір до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу $H_b(A)$.

Означення 2. *Для будь-яких лінійних функціоналів* $\varphi,\psi\in H_b^*(A)$ *і довільної аналітичної функції обмеженого типу* $f\in H_b(A)$ *“мультиплікативною” згорткою називається композиція:*

$$(\varphi*\psi)(f):=\varphi(\psi(Q_x f))=\varphi(\psi(f[xy])),$$

де ψ *діє на* $f(xy)$ *як на функцію від y, а* φ *діє на* $\psi(f(xy))$ *як на функцію від x.*

Зокрема, якщо φ, ψ є функціоналами значення довільної функції f в точках другого спряженого A^{**}, тобто $\varphi = \delta_x$, $\psi = \delta_y$, то

$$\left(\delta_x * \delta_y\right)(f) = \delta_{xy}(f).$$

2. Побудова передспряженого простору до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу.

Лінійний простір всіх неперервних n-однорідних поліномів на X позначають $P\left({}^n A\right)$.

Якщо $P \in P\left({}^n A\right)$, то визначимо норму n-однорідного полінома P на кулі B_r радіуса r:

$$\|P\|_r = \sup_{x \in B_r} |P(x)|.$$

Для довільного лінійного функціонала $\varphi \in P\left({}^n A\right)^*$ визначимо норму:

$$\|\varphi_n\| := \sup_{\|P\|_r \le 1} \left\{ |\varphi(P)| : P \in P\left({}^n A\right) \right\}.$$

Для будь-якого дійсного числа $0 < r_k < 1$ і для будь-якої кулі B_m з центром в точці 0 позначимо множину

$$S_{r_k}(B_m) := \left\{ \varphi := (\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \in \prod_{n=0}^{\infty} P\left({}^n A\right)^* : існує\ \mathrm{C} > 0, таке, що \|\varphi_n\|_m \le C r_k^n, n \in \mathbf{Z}_+ \right\}.$$

У роботі [1] доведено, що множина $S_{r_k}(B_m)$ є банаховим простором відносно норми:

$$\left\| (\varphi_n)_{n=0}^{\infty} \right\|_{m, r_k} := \sup \left\{ r_k^{-n} \|\varphi_n\|_m : n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Позначимо підмножину функціоналів значення довільної функції $f \in H_b(A)$ в точках $x \in B_m$ через $D(B_m) := \left\{ \delta_x \in H_b^*(A), якщо\ x \in B_m \right\}$.

Нехай $\{r_k\}$, $0 < r_k < 1$ – зростаюча послідовність скалярів така, що $\lim\limits_{k \to \infty} r_k = 1$ і $(1/r_k) B_{m_i} \subset B_{m_j}$ при $m_i < m_j$. Відомо, що δ_x належить одиничній кулі банахового простору $S_{r_k}\left(B_{m_j}\right)$, тобто підмножина $D\left(B_{m_i}\right)$ міститься в одиничній кулі банахового простору $S_{r_k}\left(B_{m_j}\right)$ і

$$\sup_{x \in S_{r_k}} |P(x)| = \left\| \delta_x \downharpoonleft P\left({}^n A\right) \right\|_{S_{r_k}} \le r_k^n. \tag{2}$$

Визначимо E_{m_i} як замкнений векторний підпростір у банаховому просторі $S_{r_k}\left(B_{m_j}\right)$, який породжений $D\left(B_{m_i}\right)$. Таким чином, елементи E_{m_i} належать до замикання лінійної оболонки $\sum \lambda_k \delta_{x_k}, x_k \in B_{m_i}, \lambda \in \mathbf{C}$.

Отже, E_{m_i} є банаховим підпростором.

Означення 3. *Нехай* $\left\{A_\alpha : \alpha \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}\right\}$ *– напрямлена відносно вкладення сім'я підпросторів банахової алгебри* A *така, що* $A_\alpha \neq A_\beta$ *для* $\alpha \neq \beta$ *і* $A = \bigcup_{\alpha \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}} A_\alpha$, $\overset{\circ}{\mathrm{A}}$ *– напрямлена множина відносно* $\alpha \leq \beta$, *якщо* $A_\alpha \subseteq A_\beta$. *На кожному* A_α *норма* $\|\cdot\|_\alpha$ *така, що для* $\alpha \leq \beta$ *топологія, індукована* $\|\cdot\|_\beta$ *на* A_α *є сильнішою, ніж топологія індукована* $\|\cdot\|_\alpha$. *Тоді* A *з топологією індуктивної границі називається* ***індуктивною границею*** *бананових просторів* $\left\{A_\alpha : \alpha \in \overset{\circ}{\mathrm{A}}\right\}$.

Топологією індуктивної границі називають найсильнішу локально-опуклу топологію, в якій всі відображення $A_\alpha \hookrightarrow A_\beta$ є неперервними.

Якщо $B_{m_i} \subset B_{m_j}$ при $m_i < m_j$, то для функціоналів виконується нерівність $\|\varphi\|_{m_i} \leq \|\varphi\|_{m_j}$, отже, відображення $S_{r_k}(B_{mi}) \to S_{r_k}(B_{mj})$ є канонічним вкладенням. Тому, вкладення E_{m_i} E_{m_j} є неперервним.

Побудуємо індуктивну границю для сім'ї банахових просторів $\{E_m : m \in \mathbf{Q}\}$:

$$B_b(A) := \varinjlim_{\vec{m}} E_m .$$

Відомо, що індуктивна границя $B_b(A)$ алгебраїчно ізоморфна до $H_b^*(A)$ і ізоморфізм $\Psi : B_b(A) \to H_b^*(A)$ визначається наступним чином:

$$\Psi\left((\varphi_n)_{n=0}^{\infty}(f)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(P_n),$$

де $f = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ – розклад в ряд Тейлора функції $f = H_b(A)$ в точці $x \in A$ ([1]).

Покажемо, що $B_b(A)$ є алгеброю відносно операцій додавання

$$(\varphi + \psi)(f) = \varphi(f) + \psi(f)$$

і множення – “мультиплікативної” згортки

$$(\varphi * \psi)(f) = \varphi(\psi(f(xy))).$$

Твердження 2. Топологічний векторний простір $B_b(A)$ є алгеброю відносно операцій “+” і “*”.

Доведення.

За побудовою, кожен E_{m_i} є замкнений лінійним підпростором банахового простору $S_{r_k}(B_{mi})$, $m_i < m_j$, який породжений функціоналами значення довільної функції $f \in H_b(A)$ в точках з B_{m_i}. Тобто, якщо $\varphi, \psi \in E_{m_i}$, то для деякого $n \in \mathbf{N}$:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k}, \ \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \delta_{y_k}.$$

В роботі [1] показано, що сума є неперервною в E_{m_i}:

$$\varphi + \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \delta_{y_k},$$

а неперервність добутку в E_{m_i}:

$$\varphi * \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \delta_{x_k} * \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \delta_{y_k}$$

випливає з формули (2). Отже, ці операції продовжуються до замикання лінійної оболонки множини $D(B_{m_i})$.

Оскільки топологічний векторний простір $B_b(A)$ за означенням – це індуктивна границя сім'ї банахових просторів $\{E_m : m \in \mathbf{Q}\}$, то сума "+" і добуток "*" є неперервними у $B_b(A)$. Отже, $B_b(A)$ – алгебра. ■

2. Умови нерегулярності за Аренсом передспряженого простору до алгебри аналітичних функцій обмеженого типу.

Теорема 3[2]. *Якщо для деякого $P \in P({}^n A)$ і деяких напрямленостей (x_α), (y_β), збіжних у n-поліноміальній топології алгебри A виконується умова*

$$\lim_{\alpha} \lim_{\beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta} \lim_{\alpha} P(x_\alpha y_\beta),$$

тоді симетричний проективний n-тий тензорний степінь $\otimes_{s,\pi}^n A$ банахової алгебри A не є регулярним за Аренсом.

Теорема 4. *Нехай (x_α), (y_β) – n-поліноміально збіжні напрямленості такі, що для довільного $P \in P({}^n A)$ виконується $\lim_{\alpha} \lim_{\beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta} \lim_{\alpha} P(x_\alpha y_\beta)$, тоді для кожного $n \in \mathbf{N}$ передспряжений простір до $H_b(A)$ не є регулярним за Аренсом, тобто існує білінійне відображення, яке не є регулярним за Аренсом.*

Доведення.

Нехай (x_α), (y_β) – n-поліноміально збіжні напрямленості такі, що

$$\lim_{\alpha} \lim_{\beta} P(x_\alpha y_\beta) \neq \lim_{\beta} \lim_{\alpha} P(x_\alpha y_\beta),$$

для деякого n-однорідного полінома $P \in P({}^n A)$. Згідно із теоремою 3, симетричний проективний n-тий тензорний степінь $\otimes_{s,\pi}^n A$ банахової алгебри A, який також є банаховою алгеброю є нерегулярним за

Аренсом і $B(u,v)$ – відповідне білінійне відображення, яке є нерегулярним за Аренсом.

Це означає, що на $\left(\otimes_{s,\pi}^{n} A\right)^{**}$ існує білінійне відображення $\widetilde{B}(\varphi,\psi)$, для якого

$$\widetilde{B}(\varphi,\psi)=\lim_{\alpha}\lim_{\beta} B\left(u_{\alpha},v_{\beta}\right)\neq \lim_{\beta}\lim_{\alpha} P\left(u_{\alpha},v_{\beta}\right)=\widetilde{B}(\psi,\varphi),$$

напрямленості $\left(u_{\alpha}\right)$, $\left(v_{\beta}\right)$ збіжні у *-слабкій топології до φ, ψ відповідно. Для функціоналів $\varphi,\psi=\left(\otimes_{s,\pi}^{n} A\right)^{**}$, який ізоморфний до $P\left({}^{n}A\right)^{*}$, білінійне відображення $\widetilde{B}$ залежить від порядку взяття границі по напрямленості, а, отже, є нерегулярним за Аренсом. Оскільки $P\left({}^{n}A\right)^{*}$ є доповнювальним підпростором в $H_{b}^{*}(A)$, то ми можемо продовжити $\widetilde{B}$ до неперервного білінійного відображення на $H_{b}^{*}(A)=B_{b}(A)^{**}$. Нехай $\overline{B}$ – продовження відображення $\widetilde{B}$, яке є нерегулярним за Аренсом. Отже, алгебра $B_{b}(A)$ є нерегулярної за Аренсом. ■

Література

1. Galindo P. Holomorphic mappings of bounded type / P. Galindo, D. Garcia, M. Maestre // J. Math. Anal. Appl. – 1992. – V.166. – P. 236-246.
2. Taras O. On Continuity of Algebraic Operationsin the Gelfand Topologies Generated by Algebras of Analytic Functions on Banach Spaces/ O. Taras, A. Zagorodnyuk // International Journal of Mathematical Analysis. – 2015. – 9 (22). – P. 1073-1076.
3. Taras O. A generalization of the Arensextension for Banach algebras / O. Taras, A. Zagorodnyuk // IndagationesMathematicae. – 2015. – 26(2). – P. 324-328.
4. Taras O. On Continuity of Algebraic Operationsin the Gelfand Topologies Generated by Algebras of Analytic Functionson Banach Spaces / O. Taras, A. Zagorodnyuk // International Journal of Mathematical Analysis. – 2015. – 9 (22). – P. 1073-1076.
5. Загороднюк А.В. Оператор мультиплікативної згортки в просторі аналітичних функцій на банаховій алгебрі / А.В. Загороднюк, О.Г. Тарас // Буковинський математичний журнал. – 2014. – 2(2-3). – С. 90-93.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.12.2016 року

Рекомендовано до друку к.ф.-м.н.,

*ст. наук. співробітником ІППММ **Чернегою І.В.**,*

*д. ф.-м. н, професором **Філевичем П.В.***

ARENS REGULARITY OF PREDUAL SPACE TO ALGEBRA OF ANALYTIC FUNCTIONS OF BOUNDED TYPE ON BANACH SPACE

O. Taras, A. Zagorodnyuk

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: elena_taras@ukr.net, andriyzag@yahoo.com.

In this paper we investigate conditions of Arens irregularity of predual space to analgebra of analytic functions of bounded type on complex Banach algebra. It was shown that the predual space is an algebra relatively addition operation and "multiplicative" convolution for linear continuous functionals.

Key words: *algebra of analytic functions of bounded type, predual space, Arens regularity.*