Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.912

СИМЕТРІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ТА ДЕЯКІ ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНОГО ДВОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ РЕАКЦІЇ-КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

М. І. Сєров, Ю. В. Приставка
Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка; 36011, м. Полтава,Першотравневий проспект, 24; тел. 0993063636; e-mail: YuliaPrystavka@rambler.ru

Ліївську симетрію двовимірного рівняння реакції-конвекції-дифузії використано для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

Ключові слова: *двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії, симетрія, метод Лі, максимальна алгебра інваріантності, інваріантний анзац, редукована система, точні розв'язки.*

Математичні моделі багатьох фізичних процесів найчастіше описуються за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними та їх систем. До таких рівнянь відносять рівняння реакції-конвекції-дифузії.

Розглянемо двовимірне рівняння реакції-конвекції-дифузії

$$w_0 = \partial_a (f(w) w_a) + g^a(w) w_a + H(w), \tag{1}$$

де $w = w(x_0, x_1, x_2)$, x_0 – часова змінна, x_1, x_2 – просторові змінні, $f(w_a)$, $g^a(w)$, $H(w)$ – коефіцієнти дифузії, конвекції та реакції відповідно, індекс біля функції внизу означає диференціювання за відповідною змінною, за індексами, які повторюються, розуміється сумування, $a \in \{1,2\}$.

Рівняння (1) описує багато фізичних процесів. Воно використовується для моделювання переносу енергії в плазмі, розподілу розчинів у ґрунті, руху рідин в пористому середовищі, процесів хемотаксису та інших фізичних та біохімічних процесів.

Заміна $$u = \int f(w) dw$$

де $u = u(x_0, x_1, x_2)$ – нова невідома функція, зводить рівняння (1) до вигляду

$$\Delta u = f^0(u)u_0 + f^a(u)u_a + h(u). \tag{2}$$

в якому ми і будемо його досліджувати.

Найбільш цікавим із симетрійної точки зору рівнянням класу (2) є рівняння

$$\Delta u = u^k u_0 + \lambda_a u_a - \frac{1}{4}\vec{\lambda}^2, \tag{3}$$

де λ_a, k – довільні сталі.

Теорема 1. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (3) є наступна алгебра

$$< \partial_0, \partial_1, \partial_2, D = kx_0\partial_0 + u\partial_u, Q_1, Q_2 >, \tag{4}$$

де $Q_1 = e^{\frac{k}{4}w}[(\lambda_a cos\frac{k}{4}\omega - \lambda_a^{\perp} sin\frac{k}{4}\omega)\partial_a + \frac{\vec{\lambda}^2}{2}cos\frac{k}{4}\omega],$

$$Q_2 = e^{\frac{k}{4}w}[(\lambda_a^{\perp} cos\frac{k}{4}\omega + \lambda_a sin\frac{k}{4}\omega)\partial_a + \frac{\vec{\lambda}^2}{2}sin\frac{k}{4}\omega],$$

$$w = \vec{\lambda}\vec{x},\ \omega = \vec{\lambda}^{\perp}\vec{x},\ \vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2),\ \vec{\lambda}^{\perp} = (-\lambda_2, \lambda_1).$$

Теорема 1 доводиться стандартним методом Лі (див. [2], [4]).

Поставимо задачу використати симетрійні властивості рівняння (3) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв'язків.

Використавши заміну

$$\frac{16}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0 \to x_0,\ \frac{k}{4}\vec{\lambda}\vec{x} \to x_1,\ \frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x} \to x_2,\ u \to u$$

перейдемо до рівняння

$$\Delta u = u^k u_0 + \frac{4}{k}u_1 - \frac{4}{k^2}u. \tag{5}$$

Оператори (4) в нових змінних набудуть вигляду

$$< \partial_0, \partial_1, \partial_2,\ D = kx_0\partial_0 + u\partial_u, Q_1, Q_2 >$$

де $Q_1 = e^{x_1}(cosx_2\partial_1 - sinx_2\partial_1 + \frac{2}{k}cosx_2 u\partial_u),$

$$Q_2 = e^{x_1}(sinx_2\partial_1 + cosx_2\partial_1 + \frac{2}{k}sinx_2 u\partial_u).$$

Проведемо редукцію рівняння (5) до диференціального рівняння з меншою кількістю незалежних змінних, використовуючи найзагальніший вигляд оператора інваріантності

$$X = d_0\partial_0 + d_a\partial_a + c_0 D + c_1 Q_1 + c_2 Q_2. \tag{6}$$

Один з анзаців (див., наприклад, [6]), отриманий за допомогою оператора (6) має вигляд

$$u = e^{\frac{2}{k}x_1}\varphi(x_0,\omega),\ \omega = \dot z(x_2)e^{x_1} + me^{2x_1},\ \ddot z + z = 0\ .$$

Він редукує рівняння (5) до диференціального рівняння

$$\varphi^k\varphi_0 = (4m\omega + \vec c^{\,2})\varphi_{\omega\omega} + 4m\varphi_\omega .$$

Припустивши, що $m = 0$, прийдемо до рівняння

$$\frac{1}{\vec c^{\,2}}\varphi^k\varphi_0 = \varphi_{\omega\omega}.$$

Використавши заміну

$$x_0 \to \frac{1}{\vec c^{\,2}}x_0, \omega \to \omega, \varphi \to \varphi,$$

одержимо рівняння

$$\varphi^k\varphi_0 = \varphi_{\omega\omega}. \qquad (7)$$

Теорема 2 [3]. Максимальною алгеброю інваріантності рівняння(7) є алгебра

$$1) < \partial_0, \partial_\omega, D_1 = x_0\partial_0 + \frac{1}{k}\varphi\partial_\varphi, D_2 = x_\omega\partial_\omega - \frac{2}{k}\varphi\partial_\varphi >, \qquad (8)$$

якщо $k \neq -4$.

$$2) < \partial_0, \partial_\omega, D_1 = x_0\partial_0 - \frac{1}{4}\varphi\partial_\varphi, D_2 = x_\omega\partial_\omega + \frac{1}{2}\varphi\partial_\varphi,$$
$$K = x_\omega^2\partial_\omega + \omega x_\omega\partial_\omega >, \qquad (9)$$

якщо $k = -4$.

Використаємо ліївську симетрію рівняння (7) для побудови його інваріантних анзаців, редукції та знаходження розв’язків (див., [7]).

Розв’язок рівняння (7) будемо шукати у вигляді

$$\varphi = A(x_0,\omega)\psi(y), \qquad (10)$$

де $A(x_0,\omega), y = y(x_0,\omega)$ – деякі гладкі функції, які знаходяться після розв’язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_0}{\xi^0} = \frac{d\omega}{\xi^1} = \frac{d\varphi}{\eta} = d\tau, \qquad (11)$$

$\varphi(y)$ – нова невідома функція.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (7) при $k \neq -4$ є алгебра (8). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами:

$$\xi^0 = c_0x_0 + d_0;$$
$$\xi^1 = c_1\omega_1 + d_1;$$
$$\eta = \frac{1}{k}(c_0 - 2c_1)\varphi,$$

де c_0, c_1, d_0, d_1 – довільні групові параметри. Система (11) має вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0 = c_0 x_0 + d_0, \\ &\dot{\omega} = c_1\omega + d_1, \\ &\dot{\varphi} = \frac{1}{k}(c_0 - 2c_1)\varphi, \end{aligned} \tag{12}$$

де c_0, c_1, d_0, d_1 – довільні числові параметри. Зінтегрувавши систему (12) методом, розглянутим наприклад у роботах [7], [5] наведемо вигляд інваріантних анзаців, які одержуються в результаті:

$$\varphi = \psi(y),\ y = \omega + m x_0; \tag{13}$$

$$\varphi = x_0^{\frac{1}{k}}\psi(y),\ y = \omega + m\ln x_0;$$

$$\varphi = e^{\frac{2m}{k}x_0}\psi(y),\ y = e^{m x_0}\omega;$$

$$\varphi = x_0^{\frac{1+2m}{k}}\psi(y),\ y = x_0^m\omega,$$

де m – довільна стала, яка виражається через сталі c_0, c_1, d_0, d_1.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (7). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\ddot{\psi} - m\psi^k\dot{\psi} = 0, \tag{14}$$

$$\ddot{\psi} - m\psi^k\dot{\psi} - \frac{1}{k}\psi^k\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - m\psi^k\omega\dot{\psi} - \frac{2m}{k}\psi^k\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - m\psi^k\omega\dot{\psi} - \frac{2m+1}{k}\psi^k\psi = 0.$$

Розв’язками редукованого рівняння (14) є

$$\psi = \left(-\frac{mk}{k+1}y + c\right)^{-\frac{1}{k}},\ k \in R; \tag{15}$$

$$\psi = -th\left(\frac{m}{2}y + c\right),\ k = 1; \tag{16}$$

$$\psi = tg\left(\frac{m}{2}y + c\right),\ k = 1; \tag{17}$$

$$arcth\,\psi + arctg\ \psi = -\frac{m}{2}y + c,\ k = 3, \tag{18}$$

де c – довільна стала.

Використавши анзац (13) та розв’язки (15)-(18), знаходимо розв’язки рівняння (3):

$$u = e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}\left[-\frac{mk}{k+1}(\dot{z}(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{\frac{k}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{16m\vec{c}^{\,2}}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right]^{-\frac{1}{k}};$$

$$u = -e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}th\left[\frac{m}{2}(\dot{z}(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{\frac{k}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{16m\vec{c}^{\,2}}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right];$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}tg\left[\frac{m}{2}(\dot{z}(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{\frac{k}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{16m\vec{c}^{\,2}}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right];$$

$$arcth\left(e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}u\right) + arctg\left(e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}u\right) = -\frac{m}{2}\left[(\dot{z}(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})e^{\frac{k}{4}\vec{\lambda}\vec{x}} + \frac{16m\vec{c}^{\,2}}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)\right] + c.$$

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння(7) при $k = -4$ є алгебра (9). Координати інфінітезимального оператора цієї алгебри задаються формулами:

$$\xi^0 = c_0 x_0 + d_0,$$
$$\xi^1 = c_1\omega^2 + c_2\omega + d_1,$$
$$\eta = -\frac{1}{4}(c_0 - 4c_1x_1 - 2c_2)\varphi,$$

де c_0, c_1, c_2, d_0, d_1 – довільні групові параметри. Система (11) має вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= c_0 x_0 + d_0, \\ \dot{\omega} &= c_1\omega^2 + c_2\omega + d_1, \\ \dot{\varphi} &= -\frac{1}{4}(c_0 - 4c_1x_1 - 2c_2)\varphi, \end{aligned} \tag{19}$$

де c_0, c_1, c_2, d_0, d_1 – довільні числові параметри.

Не вдаючись у деталі інтегрування системи (19), наведемо вигляд інваріантних анзаців, які одержуються в результаті.

$$\begin{gathered} \varphi = (\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\psi(y),\ y = arcth\,\omega + mx_0; \\ \varphi = (\omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\psi(y),\ y = -arcth\,\omega + mx_0; \\ \varphi = \omega\psi(y),\ y = \frac{1}{\omega} + mx_0; \\ \varphi = x_0^{-\frac{1}{4}}(\omega^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\psi(y),\ y = arcth\,\omega + \ln x_0; \\ \varphi = x_0^{-\frac{1}{4}}(\omega^2 + 1)^{\frac{1}{2}}\psi(y),\ y = -\arctan\omega - \ln x_0; \\ \varphi = x_0^{-\frac{1}{4}}\omega\psi(y),\ y = \frac{1}{\omega} + \ln x_0, \end{gathered} \tag{20}$$

де m – довільна стала, яка виражається через сталі c_0, c_1, c_2, d_0, d_1.

Для знаходження невідомих функцій ψ необхідно одержані вище анзаци підставити у рівняння (7). У результаті отримаємо відповідно такі редуковані рівняння:

$$\begin{gathered}\ddot{\psi} - m\psi^{-4}\dot{\psi} - \psi = 0,\\ \ddot{\psi} - m\psi^{-4}\dot{\psi} + \psi = 0,\\ \ddot{\psi} - m\psi^{-4}\dot{\psi} = 0,\\ \ddot{\psi} - \psi^{-4}\dot{\psi} - (\frac{1}{4} - 1)\psi = 0,\\ \ddot{\psi} - \psi^{-4}\dot{\psi} - (\frac{1}{4} + 1)\psi = 0,\\ \ddot{\psi} - \psi^{-4}\dot{\psi} - \frac{1}{4}\psi = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Одним із розв'язків редукованого рівняння (21) є

$$\psi = (-\frac{4}{3}my + c)^{\frac{1}{4}}. \tag{22}$$

Використавши анзац (20) та розв'язок (22), знаходимо розв'язок рівняння (3):

$$u = e^{-\frac{1}{2}\vec{\lambda}\vec{x}}\dot{z}(-\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})\left[\frac{1}{3}m(\frac{e^{\vec{\lambda}\vec{x}}}{\dot{z}(-\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x})} + \frac{m\vec{c}^{\,2}}{\vec{\lambda}^2}x_0) + c\right]^{\frac{1}{4}},$$

Проведемо лінеаризацію рівняння (7) при умові $k = -2$. Застосуємо до даного рівняння сукупність двох перетворень (див., наприклад, [7], [9]):

$$x_0 = x_0,\ \omega = \omega,\ \varphi = v_\omega^{-1},$$

де $v = v(x_0, \omega)$ – нова невідома функція,

$$x_0 = t, \omega = w, v = x,$$

де t, x – нові незалежні змінні, $w = w(t, x)$ – нова залежна змінна.

У результаті одержимо рівняння

$$w_t = w_{xx}. \tag{23}$$

Це лінійне рівняння теплопровідності. Його симетрійні властивості добре відомо.

Максимальною алгеброю інваріантності рівняння (23) є нескінченно вимірна алгебра, підалгеброю якої є узагальнена алгебра Галілея

$$\begin{gathered}< \partial_t, \partial_x, D = 2t\partial_t + x\partial_x, Q = -\frac{1}{2}w\partial_w, G = t\partial_x + xQ,\\ \Pi = t^2\partial_t - tx\partial_x + (\frac{x^2}{2} + t)Q, X^\infty = \beta(t,x), \beta_t = \beta_{xx} >\end{gathered}.$$

Використаємо лієвську симетрію рівняння для побудови його інваріантних анзаців. Розв'язок рівняння (23) будемо шукати у вигляді

$$w = A(t, y)\psi(y),$$

де $A(t, y), y = y(t, x)$ – деякі гладкі функції, які знаходяться після розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dt}{\xi^0} = \frac{dx}{\xi^1} = \frac{dw}{\eta} = d\tau, \tag{24}$$

$w(t, x)$ – нова невідома функція.

Якщо обмежитися лише узагальненою алгеброю Галілея, то маємо чотири нееквівалентні випадки:

1) $\partial_x + m\partial_t + pQ$,

2) $D + pQ$,

3) $G + p\partial_t$,

4) $\Pi + \partial_t + pQ$.

Для даних чотирьох випадків система (24) має вигляд

$$\dot{t} = -\frac{1}{m}, \dot{x} = 1, \dot{w} = -\frac{p}{m}w. \tag{25}$$

$$\dot{t} = 2t, \dot{x} = x, \dot{w} = 2pw. \tag{26}$$

$$\dot{t} = -\frac{1}{p}, \dot{x} = t, \dot{w} = -\frac{1}{2}xw. \tag{27}$$

$$\dot{t} = t^2 + 1, \dot{x} = tx, \dot{w} = -\frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} + p)w. \tag{28}$$

Проаналізувавши та розв’язавши системи (25)-(28), одержимо інваріантні ліївські анзаци для рівняння (23)

$$w = e^{pt}\psi(y), y = x + nt; \tag{29}$$

$$w = t^p\psi(y), y = \frac{x}{\sqrt{t}};$$

$$w = e^{xt + \frac{2}{3}t^3}\psi(y), y = x + t^2;$$

$$w = e^{-\frac{1}{4}\frac{x^2 t}{t^2+1} p\,\mathrm{arctg}\,t}(t^2 + 1)^{-\frac{1}{4}}\psi(y), y = \frac{x}{t^2 + 1}. \tag{30}$$

Підставивши анзац (29) у рівняння (23), одержимо наступні редуковані рівняння:

$$\ddot{\psi} - n\dot{\psi} - p\psi = 0, \tag{31}$$

$$\ddot{\psi} + \frac{1}{2}y\dot{\psi} - p\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - y\psi = 0,$$

$$\ddot{\psi} - (\frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{2})\psi = 0, \tag{32}$$

Розв’язками редукованого рівняння (31) в залежності від значень сталих n і p є

$$\psi = c_1 e^{k_1 y} + c_2 e^{k_2 y}, \tag{33}$$

$$\psi = (c_1 + c_2 y)e^{k_3 y}, \tag{34}$$

$$\psi = (c_1 \cos\beta y + c_2 \sin\beta y)e^{\alpha y}. \tag{35}$$

Використавши анзац (29) та розв'язки (33)-(35), знаходимо розв'язки рівняння (3), записані у параметричному вигляді:

$$\vec{\lambda}\vec{x} = \frac{4}{k}\ln\frac{e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}\left(c_3 e^{k_1(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)} + c_4 e^{k_2(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}\right)}{\dot{z}\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)},$$

$$u = \left[\frac{e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}\left(c_3 e^{k_1(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)} + c_4 e^{k_2(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}\right)}{\dot{z}\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)}\right]^{\frac{2}{k}} \times$$

$$\times e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}\left(c_3 k_1 e^{k_1(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)} + c_4 k_2 e^{k_2(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}\right);$$

$$\vec{\lambda}\vec{x} = \frac{4}{k}\ln\frac{e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0 + k_3(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}(c_3 + c_4(\tau + \frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}{\dot{z}\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)},$$

$$u = \left[\frac{e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0 + k_3(\tau+n\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}(c_3 + c_4(\tau + \frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}{\dot{z}\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)}\right]^{\frac{2}{k}} \times$$

$$\times e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0 + k_3(\tau+n\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}(c_3 + c_4(\tau + n\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0);$$

$$\vec{\lambda}\vec{x} = \frac{4}{k}\ln\frac{e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0 + \alpha(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}(c_3\cos\beta(\tau + \frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}) + c_4\sin(\tau + \frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2})}{\dot{z}\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)},$$

$$u=\left[\frac{e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0+\alpha(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}\left(c_3\cos\beta(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)+c_4\sin(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)\right)}{\dot{z}\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)}\right]^{\frac{2}{k}}\times$$

$$\times e^{\frac{16p\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0+\alpha(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)}\left[\alpha c_3\cos\beta(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)+\alpha c_4\sin(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0-\right.$$

$$\left.-c_3\sin\beta(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)+c_4\cos(\tau+\frac{16n\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0)\right],$$

де τ – довільний параметр.

Розв’язком редукованого рівняння (32) (див. [1]) є

$$\psi=e^{\frac{1}{4}y^2}\left(c_1+c_2\int e^{-\frac{1}{2}y^2}dy\right). \tag{36}$$

Використавши анзац (30) та розв’язок (36), знаходимо розв’язок рівняння (3), записаний у параметричному вигляді:

$$\vec{\lambda}\vec{x}=\frac{4}{k}\ln\left(\dot{z}^{-1}\delta^{-\frac{1}{4}}e^{\tau^2\frac{1-\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}{4\delta}-\frac{1}{2}arctg\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}W\right),$$

$$u=\left(\dot{z}^{-1}\delta^{-\frac{1}{4}}e^{\tau^2\frac{1-\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}{4\delta}-\frac{1}{2}arctg\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}W\right)^{\frac{2}{k}}e^{\tau^2\frac{1-\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}{4\delta}-\frac{1}{2}arctg\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}\times$$

$$\times\delta^{-\frac{3}{4}}\left(-\tau\frac{1-\frac{16\vec{c}^2}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0}{2\delta}W+c_4e^{-\frac{\tau^2}{2\delta}}\right),$$

де $\delta=\delta(x_0)=\frac{16\vec{c}^4}{k^2\vec{\lambda}^2}x_0^2+1$, $z=z\left(\frac{k}{4}\vec{\lambda}^{\perp}\vec{x}\right)$, $W=c_3+c_4\int\limits_0^{\frac{\tau}{\sqrt{\delta}}}e^{-\frac{v^2}{2}}dv$,

τ – довільний параметр.

Таким чином,ми використали симетрійні властивості рівняння (3) для побудови інваріантних анзаців, редукції та знаходження його точних розв’язків. Знайдені нами точні розв’язки рівняння (3) містять довільні сталі $m,c,c_1,c_2,c_3,c_4,k_1,k_2,k_3,p,n,\alpha,\beta$. Отже, можна стверджувати, що ми побудували декілька багатопараметричних класів точних розв’язків даного рівняння. Це дає можливість застосувати одержані розв’язки для розв’язування різноманітних граничних та початкових задач.

Література

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М.: Наука, 1965. – 704 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
3. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений нелинейной теплопроводности. Доклады АН СССР / Л.В. Овсянников. – Т.125, 1959. – С. 492-495.
4. Олвер П. Приложения груп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. – М.: Мир, 1989. – 581с.
5. Омелян О.М. Редукція та розв’язки систем нелінійних рівнянь дифузії, інваріантних відносно алгебри Галілея / О.М. Омелян // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: “Математика. Механіка”. – 2004. – № 11-12. – С. 95-100.
6. Фущич В.И. О нелокальних анзацах для одного нелинейного одномерного уравнения теплопроводности / В.И. Фущич, Н.И. Сєров, Т.К. Амеров. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
7. Фущич В.И. Симметрийний анализ и точне решения уравнений нелинейной математической физики / В.И.Фущич, В.М. Штелень, Н.И. Серов. – К.: Наук. думка, 1989. – 339 с.
8. Сєров М.І. Симетрійні властивості системи нелінійних рівнянь хемотаксису: монографія / М.І. Сєров, О.М. Омелян. – Полтава: ПолтНТУ, 2011. – 236 с.
9. King J.R. Some non-local transformations between nonlinear diffusion equation/ монографія / J.R. King // Journal of Mathematical Phisics. – 1990. – V. 23. – P. 5441-5464.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2016 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
*д.ф.-м.н., професором **Перестюком М.О.** (м. Київ),*
*д.ф.-м.н., професором **Королем І.І.** (м. Ужгород)*

SYMMETRY PROPERTIES AND SOME EXACT SOLUTIONS OF TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR EQUATION OF REACTION-CONVECTION-DIFFUSION

M. I. Serov, Yu. V. Prystavka
Poltava National Technical Yuriy Kondratyuk University;
36011, Poltava, Pershotravneva Avenue, 24;
ph. 0993063636; e-mail: YuliaPrystavka@rambler.ru

Li's symmetry of two-dimensional equation of reaction-convection-diffusion used to build invariantanzatze, reduction and finding its exactsolutions.

Key words: *two-dimensional equation of reaction-convection-diffusion, symmetry, the method of Lie, maximalinvariance algebra, invariant anzatz, reduced system, exactsolutions.*