УДК 517.76

ЦІЛІ РЯДИ ДІРІХЛЕ ТА h-МІРА ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ

О. Б. Скасків[1], Т. М. Сало[2]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка;*
79001, Львів, вул. Університетська, 1, e-mail: olskask@gmail.com
[2]*Національний університет "Львівська політехніка";*
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12, e-mail: tetyan.salo@gmail.com

Для цілих рядів Діріхле вигляду $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$, $0\le\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$, *знайдено необхідні умови для того, щоб*

$$\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}=\big(1+o(1)\big)\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n\ge 0\}$$

при $x\to+\infty$ *зовні деякої множини* E *такої, що* $\int_E dh(x)<+\infty$, *де* h *додатна неперервна зростаюча до* $+\infty$ *на* $[0;+\infty)$ *функція з незростаючою похідною.*

Ключові слова: *ряд Діріхле, максимальний член, максимум модуля, мінімум модуля, виняткова множина,* h*-міра.*

Нехай $D(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n} \qquad (1)$$

з фіксованою послідовністю показників $\Lambda=(\lambda_n)$, $0=\lambda_0<\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\le n\to+\infty)$. Для $F\in D(\Lambda)$ і $x\in\mathbb{R}$ позначимо

$\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n\ge 0\}$ – максимальний член ряду (1),

$\nu(x,F)=\max\{n:|a_n|e^{x\lambda_n}=\mu(x,F)\}$ – центральний індекс,

а також $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}$, $m(x,F)=\inf\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}$.

В [1] (див. також [2]) доведено таку теорему.

Теорема A (О.Б. Скасків, 1984 [1]). Для того, щоб для кожної функції $F\in D(\Lambda)$ співвідношення

$$F(x+iy)=(1+o(1))a_{\nu(x,F)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x,F)}} \qquad (2)$$

виконувалось при $x\to+\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри Лебега $\left(\int_E dx<+\infty\right)$ рівномірно по $y\in\mathbb{R}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}<+\infty. \qquad (3)$$

Нескладно помітити, що співвідношення (2) виконується при $x \to +\infty$ $(x \notin E)$ рівномірно по $y \in \mathrm{R}$ тоді і тільки тоді, коли

$$M(x,F) = (1+o(1))\mu(x,F), \quad M(x,F)(1+o(1))m(x,F) \quad (x \to +\infty,\, x \notin E).$$

Нехай L – клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ на $[0;+\infty)$ функцій, L^{+} – його підклас, в який входять диференційовні функції з неспадною до $+\infty$ похідною, а L^{-} – з незростаючою похідною.

Для вимірної множини E і диференційовної функції $h \in L$ величину

$$h - \mathrm{meas}(E) \stackrel{def}{=} \int_E dh(x)$$

назвемо $h-$мірою множини E (див. h-міра Хаусдорфа [3]).

Скінченність міри Лебега виняткової множини E з теореми А є непокращуваним описанням її величини. Це випливає з такої теореми.

Теорема B (Т.М. Сало, О.Б. Скасків, О.М.Тракало 2001 [4]). Для кожної послідовності $\Lambda = (\lambda_k)$ (зокрема, такої, що задовольняє умову (3)) і для кожної функції $h \in L^{+}$ існують цілий ряд Діріхле $F \in D(\Lambda)$, стала $\beta > 0$ і вимірна множина $E_1 \subset [0,+\infty)$ така, що $\mathrm{h} - \mathrm{meas}(E) = +\infty$ і для всіх $x \in E_1$ виконується

$$M(x,F) > (1+\beta)\mu(x,F), \qquad M(x,F) > (1+\beta)m(x,F). \tag{4}$$

У зв'язку з Теоремою В виникає природне запитання: *які умови повинен задовольняти цілий ряд Діріхле для того, щоб співвідношення (2) виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної h-міри?*

У випадку, коли $h \in L^{+}$ відповідь на це питання можна знайти в [5]. Зокрема для підкласу

$$D(\Lambda,\Phi) = \{F \in D(\Lambda) : (\exists K_1 > 0)(\exists K_2 > 0) : \ln \mu(x,\Phi) \ge K_1 x \Phi(K_2 x) \quad (x > x_0)\},$$

де $\Phi \in L$, доведено таку теорему.

Теорема C (Т.М. Сало, О.Б. Скасків, 2015 [5]). Нехай $\Phi \in L$, $h \in L^{+}$, а φ – обернена до Φ функція. Для того, щоб для кожної функції $F \in D(\Lambda,\Phi)$ співвідношення (2) виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної h-міри рівномірно по $y \in \mathrm{R}$ необхідно і досить, щоб

$$(\forall b > 0) : \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{h'(b\varphi(b\lambda_n))}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty.$$

У даній статті знайдено необхідні умови виконання співвідношення (2) зовні виняткової множини скінченної h-міри у випадку, коли $h \in L^{-}$.

Нехай

$$D_{\varphi}(\Lambda) = \{F \in D(\Lambda) : (\exists K > 0) : |a_n| \le \exp\{-\lambda_n \varphi(K\lambda_n)\} \quad (n > n_0)\},\ \varphi \in L,$$

$$D_{\varphi}^{0}(\Lambda) = \bigcap_{0<\delta<1} D_{\varphi_0}, \text{ де } \varphi_0(x) = \delta\varphi(x).$$

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай* $h \in L^-$, $\varphi \in L$, *а послідовність* Λ *така, що*

$$(\exists q > 1): \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'(q\varphi(\lambda_n))}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = +\infty, \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = O(\varphi(\lambda_{n+1})) \qquad (n \to +\infty). \tag{6}$$

Тоді існують функція $F \in D_\varphi^0(\Lambda)$, *множина* $E \subset [0,+\infty)$, *стала* $\beta > 0$ *такі, що нерівності (4) виконуються для всіх* $x \in E$ *і* $\mathrm{h}-\mathrm{meas}(E) = +\infty$.

Доведення теореми 1. З умови (6) випливає, що

$$\left(\exists C > 0\right) \ (\forall n \geq n_0): \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \leq C\varphi(\lambda_{n+1}). \tag{7}$$

Нехай $p = \left(q-1\right)/C$. Визначимо наступну послідовність

$$r_n = \max\left\{\varphi(\lambda_{n+1}) - \varphi(\lambda_n)\,, \frac{p}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\right\} \quad (n \geq 0).$$

Покладемо $\varkappa_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} r_k \ \ (n \geq 2)$,

$$a_0 = a_1 = 1, \qquad a_n = exp\left\{-\sum_{k=2}^{n} \varkappa_k (\lambda_k - \lambda_{k-1})\right\} \qquad (n \geq 2).$$

Покажемо, що ряд Діріхле вигляду (1) з так визначеними коєфіцієнтами (a_n) і показниками (λ_n) визначає функцію $F \in H_\varphi^0(\Lambda)$.

За побудовою $\varkappa_n = \dfrac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$ $(n \geq 2)$ і $\varkappa_n \uparrow +\infty \ (n \to +\infty)$, тоді за теоремою Штольца $-\dfrac{\ln a_n}{\lambda_n} \to +\infty \ (n \to +\infty)$, і за теоремою Валірона ([6, с. 85]) абсциса абсолютної збіжності ряду дорівнює $+\infty$, тобто $F \in D(\Lambda)$.

Нехай тепер $m_n = \min\{k : \lambda_k \geq (1-\delta)\lambda_n\}$, $0 < \delta < 1$; тоді $\lambda_{m_n - 1} < (1-\delta)\lambda_n$. Тому

$$-\ln|a_n| = \sum_{k=2}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{s=0}^{k-1} r_s \geq \sum_{k=2}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \sum_{s=0}^{k-1} (\varphi(\lambda_{s+1}) - \varphi(\lambda_s)) =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})\varphi(\lambda_k) \geq \sum_{k=m_n}^{n} (\lambda_k - \lambda_{k-1})\varphi(\lambda_k) \geq$$

$$\geq \varphi(\lambda_{m_n})(\lambda_n - \lambda_{m_n - 1}) \geq \delta\lambda_n \varphi((1-\delta)\lambda_n),$$

тобто $F \in D_\varphi^0(\Lambda)$.

Враховуючи, що для всіх $x \in [x_n, x_{n+1})$ виконується $\mu(x,F) = |a_n| e^{x\lambda_n}$ та

$$x_{n+1} - x_n = r_n \geq \frac{p}{\lambda_{n+1} - \lambda_n},$$

то для $x \in E_n \stackrel{def}{=} [x_{n+1} - \frac{p}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}; x_{n+1})$ маємо

$$\frac{|a_{n+1}| e^{x\lambda_{n+1}}}{\mu(x,F)} = exp\{-(x_{n+1} - x)(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\} \geq e^{-p} = \beta > 0 \qquad (n \geq 2).$$

Тобто для всіх $x \in E \stackrel{def}{=} \bigcup_{n=2}^{+\infty} E_n$

$$F(x) \geq (1+\beta)\mu(x,F)$$

і, отже, виконується перша з нерівностей (4). Щоб отримати другу нерівність, досить розглянути функцію $F_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n e^{z\lambda_n}$ і повторити відповідні міркування з доведення теореми В (див. [5]).

Покажемо, що $\mathrm{h} - \mathrm{meas}(E) = +\infty$.

З побудови x_n і нерівності (7) випливає, що

$$\mathrm{x}_n \leq \varphi(\lambda_n) + p\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} \leq \varphi(\lambda_n)(1 + pC) = q\varphi(\lambda_n) \quad (n \geq n_0).$$

Беручи до уваги теорему Лагранжа про скінченні прирости, умову $h \in L^-$, останню нерівність і (5) отримуємо

$$m_h E = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} dh(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \left(h(x_{n+1}) - h(x_{n+1} - \frac{p}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}) \right) \geq$$

$$\geq p\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'(x_{n+1})}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \geq p\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h'(q\varphi(\lambda_{n+1}))}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = +\infty.$$

Теорему 1 доведено.

Література

1. Скаскив О.Б. Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле / О.Б. Скаскив // Доп. АН УРСР, сер. А. – 1984. – 11. – С. 22-24.
2. Srivastava R.P. On the entire functions and their derivatives represented by Dirichlet series / R.P. Srivastava // Ganita. – 1958. – V.9, 2. – P.82-92.
3. Карлесон Л. Избранные проблемы теории исключительных множеств / Л. Карлесон. – М.: Мир, 1971. – 128 с.
4. Salo T.M. On the best possible description of exceptional set in Wiman–Valiron theory for entire functions / T.M. Salo, O.B. Skaskiv, O.M. Trakalo // Mat. Stud. – 2001. – V.16, №2. – P. 131-140.

5. Salo T.M. The minimum modulus of gap power series and h-measure of exceptional sets / T.M. Salo, O.B. Skaskiv // arXiv: 1512.05557v2 [math. CV] 21 Dec 2015. – 13 p.
6. Леонтьев А.Ф. Целые функции. Ряды експонент / А.Ф. Леонтьев. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 6.12.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.****,*
д.ф.-м.н., професором ***Чижиковим І.Е.*** *(м. Львів)*

ENTIRE DIRICHLET SERIES AND h – MEASURE OF EXCEPTIONAL SETS

O. B. Skaskiv[1], T. M. Salo[2]
[1]Ivan Franko National University of Lviv;
79001, Lviv, Universytetska Str., 1; e-mail: olskask@gmail.com
[2]National University "Lvivs'ka Polytehnika";
79013, Lviv, Stepan Bandera Str., 12; e-mail: tetyan.salo@gmail.com

For entire Dirichlet series $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ $0\le\lambda_n\uparrow+\infty$ $(n\to+\infty)$, *we establish necessary conditions for the relation*

$$\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}=(1+o(1))\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n\ge 0\}$$

to hold when $x\to+\infty$ *outside some set* E *such that* $\int_E dh(x)<+\infty$, *where* h *is positive continuous function increasing to* $+\infty$ *on* $[0;+\infty)$ *with non-increasing derivative.*

Key words: *Dirichlet series, maximal term, maximum modulus, minimum modulus, exceptional set, h-measure.*