

ТОЧКИ НЕПЕРЕРВНОСТІ \mathbf{L} -ЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ І ЛОКАЛЬНІ ЕКСТРЕМУМИ

В. К. Маслюченко, О. Д. Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;

58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2;

e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; myronyk.oks@gmail.com.

Досліджується питання про тип множини точок неперервності функцій зі значеннями в прямій Зоргенфрея \mathbf{L} . У зв'язку з цим для довільної множини A у топологічному просторі X з певними вимогами вказано спосіб побудови функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, у якій множина $E_m(f)$ всіх її точок локального мінімуму дорівнює A . Для повнометризовного простору X з'ясовано, що коли $E_m(f) = X$, то $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ має хоча б одну точку локального максимуму.

***Ключові слова:** пряма Зоргенфрея, точки неперервності, локального екстремуму і локальної сталості.*

1. Вступ. Добре відомо, що для топологічного простору X множина $C(f)$ всіх точок неперервності довільної дійснозначної функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, чи навіть функції $f: X \rightarrow Y$ зі значеннями у метризовному просторі Y , є множиною типу G_δ . Навпаки для кожної G_δ -множини A на числовій прямій можна побудувати функцію $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, у якій $C(f) = A$ (див., наприклад, [1]). *Пряма Зоргенфрея \mathbf{L}* , тобто множина \mathbf{R} з топологічною структурою, у якій околами точки x будуть підмножини U множини \mathbf{R} , для яких $U \supseteq [x, x + \varepsilon)$ для деякого $\varepsilon > 0$, докорінно відрізняється своїми властивостями від числової прямої \mathbf{R} , зокрема, не є метризовною, хоча є нормальним простором і задовольняє першу аксіому зліченності [2, с. 47, с. 80]. Втім, як і для дійснозначних функцій, якщо X – топологічний простір, Y – топологічний простір з першою аксіомою зліченності, то у кожній нарізно неперервної функції $f: X \times Y \rightarrow \mathbf{L}$ для довільного $y \in Y$ множина

$$C_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in C(f)\}$$

є залишковою в X (див. [3]). У праці [3] вивчалася і обернена задача про побудову для даної залишкової множини A в \mathbf{L} і точки $b \in \mathbf{Q}$ нарізно неперервної функції $f: \mathbf{L} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{L}$, у якій $C_b(f) = A \times \{b\}$. Її вдалося розв'язати для залишкових G_δ -множин в \mathbf{L} . Але повного опису множин $C(f)$ для нарізно неперервних функцій $f: \mathbf{L} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{L}$ не було знайдено. І у зв'язку з цим виникла

Проблема 1. Нехай X – топологічний простір і $f: X \rightarrow \mathbf{L}$ – довільна функція. Чи буде множина $C(f)$ борелівською і якщо так, то до якого адитивного чи мультиплікативного класу вона може належати?

Функція $f: X \rightarrow \mathbf{L}$ буде неперервною в точці x_0 , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X , що $f(x_0) \leq f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Множину таких точок ми позначатимемо $C(f)$. Очевидно, що кожна точка x_0 з $C(f)$ є точкою локального мінімуму функції f як дійсно значної функції. Множину всіх точок локального мінімуму /максимуму/ функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ ми позначатимемо символом $E_m(f)$ / $E_M(f)$ /. Нехай $S(f)$ – множина всіх точок неперервності функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, тобто таких точок x_0 з X , що для кожного $\varepsilon > 0$ існує такий окіл U точки x_0 в X , що $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, як тільки $x \in U$. Зрозуміло, що

$$C(f) = S(f) \cap E_m(f).$$

Ця формула показує, що вивчення типу множини $C(f)$ для функцій $f: X \rightarrow \mathbf{L}$ тісно пов'язане з вивченням типу множини $E_m(f)$. У зв'язку з цим виникла

Проблема 2. Для яких множин A у топологічному просторі X існує така функція $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, для якої $E_m(f) = A$?

Виявляється, що для кожної підмножини A числової прямої \square можна побудувати функцію $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, у якої $E_m(f) = A$. Тут ми здійснюємо таку побудову навіть у загальнішому випадку для топологічних просторів з \aleph_0 -розкладними непорожніми відкритими множинами (теорема 1).

Природно поставити і загальнішу задачу.

Проблема 3. Для яких підмножин A і B довільного топологічного простору X існує функція $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, така, що $E_m(f) = A$ і $E_M(f) = B$?

Ця задача не розв'язана навіть у випадку $X = \mathbf{R}$.

Множини $E_m(f)$ і $E_M(f)$ пов'язані з множиною $L_c(f)$ всіх точок локальної сталості функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, тобто таких точок x_0 з X , для яких існує їх окіл U в X і число $\gamma \in \mathbf{R}$, такі, що $f(x) = \gamma$ на U . Очевидно, що $L_c(f) = E_m(f) \cap E_M(f) = \text{int}(E_m(f) \cap E_M(f))$. Виявляється, що для локально зв'язного простору X і неперервної функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ має місце і включення

$$\text{int } E_m(f) \cup \text{int } E_M(f) \subseteq L_c(f),$$

а значить, і рівності $L_c(f) = \text{int } E_m(f) = \text{int } E_M(f)$ (теорема 2).

Нарешті, для повнометризовного простору X ми встановлюємо (теорема 3), що коли $E_m(f) = X$ для функції $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, то $E_M(f) \neq \emptyset$.

У зв'язку з проблемою 1 зазначимо, що залишається нерозв'язаною і

Проблема 4. Чи існує така функція $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{L}$, що для неї $C(f) = \mathbf{Q}$?

Зауважимо, що для відомої функції Рімана [4, с.172], яку ми інтерпретуємо як відображення $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{L}$ множина $C(f) = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Додамо до цього, що множини $E_m(f)$ і $E_M(f)$ вивчалися у працях [5-9].

2. Побудова функції з даними локальними мінімумами. Підмножину A топологічного простору X ми називатимемо \aleph_0 -розкладною, якщо її можна подати у вигляді диз'юнктного об'єднання послідовності множин A_n , всюди щільних у множині A .

Теорема 1. Нехай X – топологічний простір, в якому кожна непорожня відкрита множина є \aleph_0 -розкладною, і A – довільна підмножина X . Тоді існує функція $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, у якій $E_m(f) = A$.

Доведення. Розглянемо замикання \bar{A} множини A в X , множину $B = \bar{A} \setminus A$ і відкриту множину $G = X \setminus \bar{A}$. Якщо $G = \emptyset$, тобто множина A всюди щільна в X , то ми покладемо $f = \chi_B$, тобто $f(x) = 0$ на A і $f(x) = 1$ на B . Ясно, що $A \subseteq E_m(f)$. Крім того, $B \cap E_m(f) = \emptyset$, бо в довільному околі U точки x з B можна знайти точку u з множини A . Оскільки $f(x) = 1$ і $f(u) = 0 < 1$, то $x \notin E_m(f)$. Таким чином, $E_m(f) = A$.

Нехай $G \neq \emptyset$. Оскільки множина $G \in \aleph_0$ -розкладною, то існує така послідовність множин A_n , що $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $G \subseteq \bar{A}_n$ для кожного n .

Розглянемо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in A, \\ 1, & x \in B, \\ 1 + 1/n, & x \in A_n \text{ для деякого } n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Покажемо, що $E_m(f) = A$. Включення $A \subseteq E_m(f)$ очевидне, співвідношення $E_m(f) \cap B = \emptyset$ перевіряється як і раніше. Доведемо, що і $E_m(f) \cap G = \emptyset$.

Нехай $x \in G$. Тоді існує такий номер n , що $x \in A_n$. В такому разі $f(x) = 1 + \frac{1}{n}$. Множина A_{n+1} щільна в G , зокрема, $A_n \subseteq \bar{A}_{n+1}$. Тому в ко-

жному околі U точки x існує точка u з A_{n+1} . Оскільки $f(u) = 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n} = f(x)$, то $x \notin E_m(f)$, отже, $E_m(f) \cap G = \emptyset$.

Таким чином, $E_m(f) \cap (B \cup G) = \emptyset$, тому $E_m(f) = A$.

Приклад 1. Кожна відкрита непорожня множина G на числовій прямій \mathbf{R} є \aleph_0 -розкладною. Щоб це довести, досить розглянути випадок $G = (a, b)$, де $-\infty < a < b < +\infty$.

Перенумеруємо всі прості числа у послідовність $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ у порядку зростання, тобто $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ і т.д. Нехай

$$A_n = \left\{ r \in (a, b) \cap \mathbf{Q} : r = \frac{m}{p_n^k}, m \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{N}, \frac{m}{p_n^k} - \text{нескоротний дріб} \right\}.$$

Ясно, що $A_n \cap A_l = \emptyset$ при $n \neq l$. Доведемо, що $G \subseteq \overline{A_n}$ для кожного n .

Зафіксуємо n і розглянемо довільний інтервал $U = (\alpha, \beta) \subseteq G$. Візьме-

мо такий номер k , що $\frac{1}{p_n^{k-1}} < \beta - \alpha$. Нехай $m = [\alpha p_n^k]$, де $[x]$ – ціла частина числа x . Тоді $m \in \mathbf{Z}$ і $m \leq \alpha p_n^k < m+1$, звідки $\frac{m}{p_n^k} \leq \alpha < \frac{m+1}{p_n^k}$. За

вибором числа k маємо, що $\alpha + \frac{p_n}{p_n^k} = \alpha + \frac{1}{p_n^{k-1}} < \alpha + \beta - \alpha = \beta$. Але

$p_n \geq 2$, тому

$$\alpha < \frac{m+1}{p_n^k} < \frac{m+2}{p_n^k} = \frac{m}{p_n^k} + \frac{2}{p_n^k} \leq \alpha + \frac{p_n}{p_n^k} < \beta.$$

Число p_n просте, тому хоча б одне з чисел $m+1$ і $m+2$ не ділиться на

p_n . Позначимо його через s . Тоді дріб $\frac{s}{p_n^k}$ належить до перетину

$U \cap A_n$, а значить, $G \subseteq \overline{A_n}$.

Доповнення $A_0 = G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ містить всі ірраціональні числа, тому і

$G \subseteq \overline{A_0}$. Таким чином, $G = \prod_{n=0}^{\infty} A_n$ і $G \subseteq \overline{A_n}$ для кожного $n = 0, 1, \dots$. Це

показує, що G – \aleph_0 -розкладна множина.

Наслідок 1. Для довільної підмножини A числової прямої \square існує така функція $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, що $E_m(f) = A$.

3. Точки локальної сталості. Розглянемо множину $L_c(f)$ всіх точок локальної сталості функції $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, тобто таких точок $x \in X$,

у яких є окіл U , такий, що звуження $f|_U$ – це стала функція. Оскільки кожний окіл U точки x містить деякий відкритий окіл V цієї точки, то множина $L_c(f)$ відкрита. Легко пояснити, що $L_c(f) = E_m(f) \cap E_M(f) = \text{int}(E_m(f) \cap E_M(f))$. Для неперервних функцій, заданих на локально зв'язному просторі, ці співвідношення можна уточнити.

Нагадаємо, що топологічний простір X називається *локально зв'язним*, якщо кожний окіл U довільної точки x з X містить деякий зв'язний окіл V цієї точки. Добре відомо, що компоненти зв'язності локально зв'язного простору відкриті, тому в кожному околі U довільної точки x з X міститься на віть відкритий зв'язний окіл V точки x .

Теорема 2. *Нехай X – локально зв'язний простір і $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ – неперервна функція. Тоді $L_c(f) = \text{int } E_m(f) = \text{int } E_M(f)$.*

Доведення. Доведемо, що $\text{int } E_m(f) \subseteq L_c(f)$. Нехай $x_0 \in \text{int } E_m(f)$. Тоді існує такий відкритий зв'язний окіл U точки x_0 в X , що $U \subseteq E_m(f)$ і $f(x) \geq f(x_0)$ на U . Покажемо, що звуження $f|_U$ стале, тобто, що $f(x) = f(x_0)$ на U .

Нехай це не так. Тоді існує така точка x_1 в U , що $f(x_0) < f(x_1)$. Візьмемо довільне число γ , для якого $f(x_0) < \gamma < f(x_1)$ і розглянемо множину $A = \{x \in U : f(x) \geq \gamma\}$. Оскільки функція f неперервна, то множина A замкнена в U . Покажемо, що вона і відкрита в U . Нехай $x \in A$. Тоді існує такий окіл V , точки x в X , що $V \subseteq U$ і $f(u) \geq f(x)$ на V . Але $f(x) \geq \gamma$, тому $f(u) \geq \gamma$ на V , отже, $V \subseteq A$, що і дає нам відкритість A і в X , і в U .

Але $\emptyset \neq A \neq U$, адже $x_1 \in A$ і $x_0 \in U \setminus A$. Таким чином, A – це нетривіальна відкрито-замкнена підмножина U , що суперечить зв'язності множини U .

Так само доводиться включення $\text{int } E_M(f) \subseteq L_c(f)$. Оскільки завжди $L_c(f) \subseteq \text{int } E_m(f)$ і $L_c(f) \subseteq \text{int } E_M(f)$, то

$$\text{int } E_m(f) = L_c(f) = \text{int } E_M(f).$$

4. Функції з суцільними локальними мінімумами. На завершення встановимо ще такий результат.

Теорема 3. *Нехай X – повнометризовний топологічний простір, $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ – функція, G – відкрита непорожня множина в X , така, що $G \subseteq E_m(f)$. Тоді $E_M(f) \cap G \neq \emptyset$.*

Доведення. Нехай d – метрика на X , яка породжує топологічну структуру на просторі X і метричний простір (X, d) повний. Для точки $x \in X$ і числа $r > 0$ нехай

$B(x, r) = \{u \in X : d(u, x) < r\}$ і $B[x, r] = \{u \in X : d(u, x) \leq r\}$ – це відповідно відкрита і замкнена кулі з центром у точці x і радіусом r у метричному просторі (X, d) .

Припустимо, що $E_M(f) \cap G = \emptyset$. Оскільки $G \neq \emptyset$, то існує точка $x_1 \in G = G_0$. Множина G – відкрита і $G \subseteq E_m(f)$. Тому існує таке число $r_1 > 0$, що $r_1 \leq 1$, $B_1 = B[x_1, r_1] \subseteq G$ і $f(x) \geq f(x_1)$ на B_1 . Розглянемо відкриту кулю $G_1 = B(x_1, r_1)$. Оскільки $x_1 \in G$, то $x_1 \notin E_M(f)$, тому в околі G_1 точки x_1 знайдеться така точка x_2 , що $f(x_2) > f(x_1)$. Далі існує $r_2 > 0$, що $r_2 \leq \frac{1}{2}$, $B_2 = B[x_2, r_2] \subseteq G_1$ і $f(x) \geq f(x_2)$ на B_2 . Як і раніше, у відкритій кулі $G_2 = B(x_2, r_2)$ знайдеться точка x_3 , така що $f(x_3) > f(x_2)$. Продовжуючи цей процес до нескінченності, ми побудуємо послідовність замкнених куль $B_n = B[x_n, r_n]$ і відкритих куль $G_n = B(x_n, r_n)$, таких, що $0 < r_n \leq \frac{1}{n}$, $B_{n+1} \subseteq G_{n+1} \subseteq B_n \subseteq G_{n-1}$, $f(x) \geq f(x_n)$ на B_n і $f(x_{n+1}) > f(x_n)$ для кожного $n \in \mathbf{N}$. За лемою про вкладені кулі $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{x_0\}$ для деякої точки $x_0 \in X$. Оскільки $x_0 \in B_1 \subseteq G$, то $x_0 \in E_m(f)$. Але це не так. Справді. Нехай U – довільний окіл точки x_0 в X . За побудовою $x_n \rightarrow x_0$, отже, існує такий номер N , що $x_n \in U$, як тільки $n \geq N$. Зафіксуємо якийсь номер n , такий, що $n \geq N$. Тоді і $n+1 \geq N$. Оскільки $x_0 \in B_{n+1}$, то $f(x_0) \geq f(x_{n+1})$. Але $f(x_{n+1}) > f(x_n)$, тому $f(x_0) > f(x_n)$ і $x_n \in U$. Отже, $x_0 \notin E_m(f)$, що приводить до суперечності.

Таким чином, $E_M(f) \cap G \neq \emptyset$.

Наслідок 2. Нехай X – повнометризований топологічний простір і $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ – така функція, що $E_m(f) = X$. Тоді множина $E_M(f)$ всюди щільна в X .

Доведення. Для довільної відкритої непорожньої множини G в X будемо мати, що $G \subseteq E_m(f)$, отже $E_M(f) \cap G \neq \emptyset$ за теоремою 3, а це і означає, що $\overline{E_M(f)} = X$.

Література

1. Окстоби Дж. Мера и категория / Дж. Окстоби. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
2. Энгелькинг Р. Общая топология / Р. Энгелькинг. – М.: Мир, 1986. – 752 с.
3. Маслюченко В.К. Розриви нарізно неперервних відображень зі значеннями в прямій Зоргенфрея / В.К. Маслюченко, О.Д. Мироник // Мат. студії. – 2016. – 45, №1. – С. 67-75.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1 / Г.М. Фихтенгольцю – М.: ФИЗМАТЛИТ, Лабор. знаний, 2003. – 680 с.
5. Posey E.E., Vaughan J.E. Extrema and nowhere differentiable functions / E.E. Posey, J.E. Vaughan // Rocky Mountain J. Math. – 1986. – **16**, №4. – P. 661-668.
6. Bella A. Many continuous functions have many proper local extrema / A. Bella, J. Charatonik, A. Villani // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **154**, №2. – P. 558-571.
7. Behrends E. Functions for which all points are a local minimum or maximum / E. Behrends, S. Geschke, T. Natkaniec // Real Analysis Exchange. – 2007/2008. – **33**, №2. – P. 1-4
8. Behrends E. Functions for which all points are local extrema / E. Behrends, S. Geschke, T. Natkaniec // Real Analysis Exchange. – 2007/2008. – **33**, №2. – P. 467-470.
9. Banach T. Connected economically metrizable spaces / T. Banach, M. Vovk, M.R. Wójcik // Fund. Math. – 2011. – 212. – P. 145-173.
*Стаття надійшла до редакційної колегії 12.01.2017 р.
 Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,
 д.ф.-м.н., професором Плічком А.М. (м. Кропивницький)*

THE POINTS OF CONTINUITY OF FUNCTIONS WITH VALUES IN THE SORGENFREY LINE AND LOCAL EXTREMA

V. K. Maslyuchenko, O. D. Myronyk

Chernivtsa National University

58012, Chernivtsi, Kotsyubyns'ky Str. 2;

e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; myronyk.oks@gmail.com

We investigate the continuity points set of functions $f : X \rightarrow \mathbf{L}$ with values in the Sorgenfrey line \mathbf{L} . We construct the function $f : X \rightarrow \mathbf{R}$, such that for any subset A of a topological space X with certain requirements, the set of all local minimum points $E_m(f)$ is equal to A . We prove that if X is a completely metric space and a function $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ such that $E_m(f) = X$ then f has at least one local maximum point.

Key words: *the Sorgenfrey line, point of continuity, point of local extremum and local stability.*