МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.53

АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ В $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ ОБМЕЖЕНОГО ІНДЕКСУ ЗА СУКУПНІСТЮ ЗМІННИХ

А. І. Бандура[1], О. Б. Скасків[2], В. Л. Цвігун[2]
[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2]Львівський національний університет ім. Івана Франка$
м. Львів, вул. Університетська, 1;
e-mail: olskask@gmail.com, 12lvan@ukr.net

Поняття обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних узагальнено для аналітичних функцій в $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$. Доведено критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних, який описує локальне поводження частинних похідних таких функцій та дає оцінку максимуму модуля цих похідних кістяку бікруга через їх значення в центрі бікруга.

Ключові слова: *аналітична функція, бікруг, обмежений $\mathbf{L}$-індекс за сукупністю змінних, максимум модуля, частинна похідна, інтегральна формула Коші.*

1. Вступ. Поняття цілої функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу в $\mathbb{C}^n$ у найзагальнішому вигляді стосовно вектор-функції $\mathbf{L}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}_+^n$ введене у статті [1]. Воно, з однієї сторони, зберігає всі характеристичні властивості класів цілих функцій обмеженого індексу в $\mathbb{C}^n$, а з іншої сторони, природньо узагальнює і містить в собі подібні класи в сенсі всіх попередніх означень, а також є природним узагальненням відповідних понять у випадку функцій від однієї змінної (бібліогр. див. [2-8]). У випадку аналітичних функцій в одиничному крузі відповідне поняття введене і досліджене у статтях [9, 10] (див. також. [2]).

У даному повідомленні ми розглядаємо аналітичні функції $F:\mathbb{T}:=\mathbb{D}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ і вводимо для них відповідне поняття, яке є комбінацією згаданого вище поняття цілої функції обмеженого L-індексу за сукупністю змінних з **Ошибка! Источник ссылки не найден.** і аналітичної функції обмеженого l-індексу в одиничному крузі. Зазначимо, що аналітичні у полікрузі функції обмеженого $\mathbf{L}$-індексу за сукупністю змінних вивчалися в [11].

2. Означення і позначення. Нам потрібно ввести деякі стандартні позначення. Нехай для $R=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}^2_+$, $z^0=(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{C}^2$, $\mathbb{T}(z^0,R)=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1-z_1^0|=r_1,|z_2-z_2^0|=r_2\}$, $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $\mathbb{T}=\mathbb{D}\times\mathbb{C}, \mathbf{0}=(0,0)\in\mathbb{D}\times\mathbb{C}, \mathbf{1}=(1,1)\in\mathbb{D}\times\mathbb{C}$.

Для $A=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, $B=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$, вживаємо такі скорочення запису

$$AB=(a_1b_1,a_2b_2),\ A/B=(a_1/b_1,a_2/b_2),\ b\neq\mathbf{0},\ A^B=a_1^{b_1}a_2^{b_2},\ b\in\mathbb{Z}^2_+,$$

а запис $A<B$ означає, що $a_j<b_j$ для $j\in\{1,2\}$; співвідношення $A\le B$ означуємо подібно. Для $K=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2_+$ вживаємо також позначення $\|K\|=k_1+k_2$, $K!=k_1!\cdot k_2!$, а для часткових похідних аналітичної функції F в $\mathbb{T}$ пишемо

$$F^{(K)}(z)=F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2):=\frac{\partial^{k_1+k_2}F(z_1,z_2)}{\partial z_1^{k_1}\partial z_2^{k_2}},\ z\in\mathbb{T}.$$

Нехай $\mathbf{L}(z)=\mathbf{L}(z_1,z_2)=(l_1(z_1,z_2),l_2(z_1,z_2)):\mathbb{T}\to(0,+\infty)$ – неперервна функція. Аналітичну функцію $F:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ називатимемо *функцією обмеженого* $\mathbf{L}$*-індексу (за сукупністю змінних),* якщо існує $n_0\in\mathbb{Z}_+$ таке, що $\forall(z_1,z_2)\in\mathbb{T}$ і $\forall(p_1,p_2)\in\mathbb{Z}^2_+$

$$\frac{1}{p_1!p_2!}\frac{|F^{(p_1,p_2)}(z_1,z_2)|}{l_1^{p_1}(z_1,z_2)l_2^{p_2}(z_1,z_2)}\le\max\left\{\frac{1}{k_1!k_2!}\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{l_1^{k_1}(z_1,z_2)l_2^{k_2}(z_1,z_2)}:0\le k_1+k_2\le n_0\right\}.\quad(1)$$

Найменше з таких n_0 називатимемо $\mathbf{L}$*-індексом за сукупністю змінних функції* F і позначатимемо $N(F,\mathbf{L},\mathbb{T})=n_0$.

Якщо $F(z_1,z_2)\equiv f_1(z_1)$, $l_1(z_1,z_2)\equiv l(z_1)$ то ми приходимо до поняття аналітичної функції обмеженого l-індексу в одиничному крузі, якщо ж $F(z_1,z_2)\equiv f_2(z_2)$, $l_1(z_1,z_2)\equiv l(z_2)$ то ми приходимо до поняття цілої функції обмеженого l-індексу (при $l(z_2)\equiv1$ приходимо до поняття цілої функції обмеженого індексу).

У даному повідомленні для спрощення викладок обмежимося випадком $\mathbf{L}(z)=(l(z),1)$ і з огляду на цю обставину вживатимемо термін обмежений l-індекс. При цьому вважатимемо, що l задовольняє таку умову (див. [2, 9])

$$(\forall(z_1,z_2)\in \mathbb{T}):\quad l(z_1,z_2)>\frac{\beta}{1-|z_1|},$$

де $\beta>1$ – деяка стала, а також належить до класу Q функцій l, які задовольняють умову

$$(\forall R=(r_1,r_2)\in[0,1)\times[0,+\infty)):\quad 0<\lambda_1(R)\le 1\le\lambda_2(R)<\infty,$$

де

$$\lambda_1(R)=\inf_{(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{T}}\inf\left\{\frac{l(z_1,z_2)}{l(z_1^0,z_2^0)}:|z_1-z_1^0|\le r_1/l(z_1^0,z_2^0),|z_2-z_2^0|\le r_2\right\},\ (2)$$

$$\lambda_2(R)=\sup_{(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{T}}\sup\left\{\frac{l(z_1,z_2)}{l(z_1^0,z_2^0)}:|z_1-z_1^0|\le r_1/l(z_1^0,z_2^0),|z_2-z_2^0|\le r_2\right\}.\ (3)$$

3. Один критерій обмеженості $\mathbf{L}$-індексу. У цьому підрозділі доведемо один критерій обмеженості l-індексу.

Позначимо $T_\beta=[0,\beta)\times[0,+\infty)$, $\beta>1$. Нехай $l\in Q$. Для того, щоб аналітична функція F в $\mathbb{T}$ мала обмежений l-індекс необхідно і досить, щоб для кожного $R\in T_\beta$ існували $n_0\in\mathbb{Z}_+$ і $p_0>0$ такі, що для кожного $z^0=(z_1^0,z_2^0)\in\mathbb{T}$ існує $(k_1^0,k_2^0)\in\mathbb{Z}_+^2$, $0\le k_1^0+k_2^0\le n_0$, і

$$\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}:k_1+k_2\le n_0,|z_1-z_1^0|=r_1/l(z_1^0,z_2^0),|z_2-z_2^0|=r_2\right\}\le$$

$$\le\frac{p_0}{k_1^0!k_2^0!}\frac{|F^{(k_1^0,k_2^0)}(z_1^0,z_2^0)|}{l^{k_1^0}(z_1^0,z_2^0)}.\qquad(4)$$

Доведення. Нехай F має обмежений l-індекс $N=N(F,l,\mathbb{T})<\infty$. Для кожного фіксованого $R\in T_\beta$ позначимо

$$q=q(R)=\lfloor 2(N+1)(r_1+r_2)(\lambda_1(R))^{-N}(\lambda_2(R))^{N+1}\rfloor+1,$$

де $\lfloor x\rfloor$ – ціла частина дійсного числа x. Для $p\in\{0,\ldots,q\}$ і $z^0\in\mathbb{T}$ позначимо

$$S_p(z^0,R)=\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}:0\le k_1+k_2\le N,|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\},$$

$$S_p^*(z^0,R)=\max\left\{\frac{|F^{(K)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1^0,z_2^0)}:0\le k_1+k_2\le N,|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\}.$$

Використовуючи (2), виводимо

$$S_p(z^0,R)=$$

$$=\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}\frac{l^{k_1}(z_1^0,z_2^0)}{l^{k_1}(z_1^0,z_2^0)}:0\le k_1+k_2\le N,|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\}\le$$

$$\le S_p^*(z^0,R)\max\left\{\frac{l^N(z_1^0,z_2^0)}{l^N(z_1,z_2)}:|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\}\le$$

$$\le S_p^*(z^0,R)(\lambda_1(R))^{-N}.$$

також для (3), ми маємо

$$S_p^*(z^0,R)=$$

$$=\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|\,l^{k_1}(z_1,z_2)}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)\,l^{k_1}(z_1^0,z_2^0)}:k_1+k_2\le N,|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}(\lambda_2(R))^{k_1}:k_1+k_2\le N,|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\}\le$$

$$\le S_p(z^0,R)(\lambda_2(R))^N. \tag{5}$$

Нехай $K^{(p)}=(k_1^{(p)},k_2^{(p)})$, $k_1^{(p)}+k_2^{(p)}\le N$ і $(z_1^{(p)},z_2^{(p)})$, $|z_1^{(p)}-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)}$, $|z_2^{(p)}-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}$, таке, що

$$S_p^*(z^0,R)=\frac{|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)})}(z_1^{(p)},z_2^{(p)})|}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0,z_2^0)}. \tag{6}$$

Вибираємо $\widetilde{z}_1^{(p)}=z_1^0+\frac{p-1}{p}(z_1^{(p)}-z_1^0)$ і $\widetilde{z}_2^{(p)}=z_2^0+\frac{p-1}{p}(z_2^{(p)}-z_2^0)$.

Тоді отримаємо

$$|\widetilde{z}_1^{(p)}-z_1^0|=\frac{p-1}{p}|z_1^{(p)}-z_1^0|=\frac{p-1}{p}\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|\widetilde{z}_2^{(p)}-z_2^0|=\frac{p-1}{p}|z_2^{(p)}-z_2^0|=\frac{(p-1)r_2}{q}, \tag{7}$$

$$|\widetilde{z}_1^{(p)}-z_1^{(p)}|=|z_1^0+\frac{p-1}{p}(z_1^{(p)}-z_1^0)-z_1^{(p)}|=\frac{1}{p}|z_1^0-z_1^{(p)}|=\frac{r_1}{ql(z_1^0,z_2^0)}, \tag{8}$$

$$|\widetilde{z}_2^{(p)}-z_2^{(p)}|=|z_2^0+\frac{p-1}{p}(z_2^{(p)}-z_2^0)-z_2^{(p)}|=\frac{1}{p}|z_2^0-z_2^{(p)}|=\frac{r_1}{q}.$$

З умови (7) ми маємо

$$S_{p-1}^*(z^0,R)\ge\frac{|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0,z_2^0)}.$$

З умови (6) ми маємо

$$0\le S_p^*(z^0,R)-S_{p-1}^*(z^0,R)\le\frac{|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)})}(z^{(p)})|-|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)})|}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0,z_2^0)}=$$

$$=\frac{1}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0,z_2^0)}\int_0^1\frac{d}{dt}|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)}+t(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))|\,dt\le$$

$$\le \frac{1}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0,z_2^0)}\int_0^1 (|z_1^{(p)}-\widetilde{z}_1^{(p)}|\cdot|F^{(k_1^{(p)}+1,k_2^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)}+t(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))|+$$

$$+|z_2^{(p)}-\widetilde{z}_2^{(p)}|\cdot|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)}+1)}(\widetilde{z}^{(p)}+t(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))|)dt=$$

$$=\frac{1}{k_1^{(p)}!k_2^{(p)}!l^{k_1^{(p)}}(z_1^0,z_2^0)}(|z_1^{(p)}-\widetilde{z}_1^{(p)}|\cdot|F^{(k_1^{(p)}+1,k_2^{(p)})}(\widetilde{z}^{(p)}+t^*(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))|+$$

$$+|z_2^{(p)}-\widetilde{z}_2^{(p)}|\cdot|F^{(k_1^{(p)},k_2^{(p)}+1)}(\widetilde{z}^{(p)}+t^*(z^{(p)}-\widetilde{z}^{(p)}))|),$$

де $0\le t^*\le 1$ і $|\widetilde{z}_1^{(p)}+t^*(z_1^{(p)}-\widetilde{z}_1^{(p)})-z_1^0|\le \frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)}$, $|\widetilde{z}_2^{(p)}+t^*(z_2^{(p)}-\widetilde{z}_2^{(p)})-z_2^0|\le \frac{pr_2}{q}$. Для (z_1,z_2) таких, що $|z_1-z_1^0|\le \frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)}$, $|z_2-z_2^0|\le \frac{pr_2}{q}$ і $j=(j_1,j_2)$, $j_1+j_2\le N+1$ ми маємо

$$\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1,z_2)|\,l^{j_1}(z_1,z_2)}{j_1!\,j_2!\,l^{j_1}(z_1^0,z_2^0)l^{j_1}(z_1,z_2)}\le$$

$$\le(\lambda_2(R))^{j_1}\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}:0\le k_1+k_2\le N\right\}\le$$

$$\le(\lambda_2(R))^{N+1}(\lambda_1(R))^{-N}\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1^0,z_2^0)}:0\le k_1+k_2\le N\right\}\le$$

$$\le(\lambda_2(R))^{N+1}(\lambda_1(R))^{-N}S_p^*(z^0,R).$$

З умови (9) і (8) ми отримаємо

$$0\le S_p^*(z^0,R)-S_{p-1}^*(z^0,R)\le$$

$$\le(\lambda_2(R))^{N+1}(\lambda_1(R))^{-N}S_p^*(z^0,R)((k_1^{(p)}+1)l_1(z_1^0,z_2^0)|z_1^{(p)}-\widetilde{z}_1^{(p)}|+(k_2^{(p)}+1)|z_2^{(p)}-\widetilde{z}_2^{(p)}|)=$$

$$=(\lambda_2(R))^{N+1}(\lambda_1(R))^{-N}\frac{S_p^*(z^0,R)}{q(R)}((k_1^{(p)}+1)r_1+(k_2^{(p)}+1)r_2)\le$$

$$\le(\lambda_2(R))^{N+1}(\lambda_1(R))^{-N}\frac{S_p^*(z^0,R)}{q(R)}(N+1)(r_1+r_2)\le\frac{1}{2}S_p^*(z^0,R).$$

З цього випливає нерівність $S_p^*(z^0,R)\le 2S_{p-1}^*(z^0,R)$, а зважаючи на нерівності (5) і (6), ми отримаємо

$$S_p(z^0,R)\le 2(\lambda_1(R))^{-N}S_{p-1}^*(z^0,R)\le 2(\lambda_1(R))^{-N}(\lambda_2(R))^N S_{p-1}(z^0,R).$$

Тому,

$$\max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1,z_2)}:0\le k_1+k_2\le N,|z_1-z_1^0|=\frac{pr_1}{ql(z_1^0,z_2^0)},|z_2-z_2^0|=\frac{pr_2}{q}\right\}=$$

$$= S_p(z^0,R) \le 2(\lambda_1(R))^{-N}(\lambda_2(R))^N S_{p-1}(z^0,R) \le \ldots \le$$

$$\le (2(\lambda_1(R))^{-N}(\lambda_2(R))^N)^p S_0(z^0,R) =$$

$$= (2(\lambda_1(R))^{-N}(\lambda_2(R))^N)^p \max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1^0,z_2^0)|}{k_1!k_2!l^{k_1}(z_1^0,z_2^0)} : 0 \le k_1+k_2 \le N\right\}. \quad (10)$$

З умови (10) ми отримали (4) для $p_0 = (2(\lambda_1(R))^{-N}(\lambda_2(R))^N)^q$ і деякого $k^0 = k_1^0 + k_2^0 \le N$. Необхідність умови (4) є доведино.

Доведемо достатність. Припустимо, що для кожного $R \in T_\beta$ $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+, p_0 > 1$ таке, що $\forall z_0 \in \mathbb{T}$ і деякого $k_0 \in \mathbb{Z}_+^2, k_1^0 + k_2^0 \le n_0$, нерівність (4) виконується.

З формули Коші випливає, що для $\forall z^0 \in \mathbb{T}$ $\forall k \in \mathbb{Z}_+^2$ $\forall s \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\frac{F^{(k_1+s_1,k_2+s_2)}(z_1^0,z_2^0)}{s_1!s_2!} = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\mathbb{T}\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)} \frac{F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)}{(z_1-z_1^0)^{s_1+1}(z_2-z_2^0)^{s_2+1}}dz_1dz_2.$$

Тому, застосовуючи (4), ми маємо

$$\frac{|F^{(k_1+s_1,k_2+s_2)}(z_1^0,z_2^0)|}{s_1!s_2!} \le \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)} \frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|}{|z_1-z_1^0|^{s_1+1}|z_2-z_2^0|^{s_2+1}}|dz_1||dz_2| \le$$

$$\le \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{T}\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)} |F^{(k_1,k_2)}(z_1,z_2)|\frac{l^{s_1+1}(z^0)}{r_1^{s_1+1}r_2^{s_2+1}}|dz_1||dz_2| \le$$

$$\le \int_{\mathbb{T}\left(z^0,\frac{R}{\mathbf{L}(z^0)}\right)} |F^{(k_1^0,k_2^0)}(z_1^0,z_2^0)|\frac{k_1!k_2!p_0(\lambda_2(R))^{n_0}l^{s_1+k_1+1}(z^0)}{(2\pi)^2k_1^0!k_2^0!r_1^{s_1+1}r_2^{s_2+1}l^{k_1^0}(z^0)}|dz_1||dz_2| =$$

$$= |F^{(k_1^0,k_2^0)}(z_1^0,z_2^0)|\frac{k_1!k_2!p_0(\lambda_2(R))^{n_0}l^{s_1+k_1}(z^0)}{k_1^0!k_2^0!r_1^{s_1}r_2^{s_2}l^{k_1^0}(z^0)}.$$

З цього випливає

$$\frac{|F^{(k_1+s_1,k_2+s_2)}(z_1^0,z_2^0)|}{(k_1+s_1)!(k_2+s_2)!l^{s_1+k_1}(z^0)} \le \frac{(\lambda_2(R))^{n_0}p_0k_1!k_2!s_1!s_2!}{(k_1+s_1)!(k_2+s_2)!r_1^{s_1}r_2^{s_2}}\frac{|F^{(k_1^0,k_2^0)}(z_1^0,z_2^0)|}{k_1^0!k_2^0!l^{k_1^0}(z^0)}. \quad (11)$$

Очевидно, що

$$\frac{k_1!k_2!s_1!s_2!}{(k_1+s_1)!(k_2+s_2)!} = \frac{s_1!}{(k_1+1)\cdot\ldots\cdot(k_1+s_1)}\frac{s_2!}{(k_2+1)\cdot\ldots\cdot(k_2+s_2)} \le 1.$$

Вибираємо $r_1 \in (1,\beta]$, $r_2 = \beta$.

$$\text{Отже, } \frac{(\lambda_2(R))^{n_0}p_0}{r_1^{s_1}r_2^{s_2}} \to 0 \text{ } при \text{ } s_1+s_2 \to +\infty.$$

Таким чином, існує s_0 таке, що при $s_1+s_2 \ge s_0$ справедлива нерівність:

$$\frac{(\lambda_2(R))^{n_0} p_0 k_1! k_2! s_1! s_2!}{(k_1+s_1)!(k_2+s_2)! r_1^{s_1} r_2^{s_2}} \le 1.$$

Тоді із нерівності (11) випливає така нерівність

$$\frac{|F^{(k_1+s_1,k_2+s_2)}(z_1^0,z_2^0)|}{(k_1+s_1)!(k_2+s_2)! l^{k_1+s_1}(z^0)} \le \frac{|F^{(k_1^0,k_2^0)}(z_1^0,z_2^0)|}{k_1^0! k_2^0! l^{k_1^0}(z^0)}.$$

Це означає, що для кожного $j \in \mathbb{Z}_+^2$

$$\frac{|F^{(j_1,j_2)}(z_1^0,z_2^0)|}{j_1! j_2! l^{j_1}(z^0)} \le \max\left\{\frac{|F^{(k_1,k_2)}(z_1^0,z_2^0)|}{k_1! k_2! l^{k_1}(z^0)} : k_1+k_2 \le s_0+n_0\right\}.$$

де s_0 і n_0 не залежать від z_0. Тому, функція F має обмежений l-індекс $N \le s_0 + n_0$.

Література

1. Bandura A.I., Bordulyak M.T., Skaskiv O.B. *Sufficient conditions of boundedness of L-index in joint variables,* Mat. Stud. **45** (2016), no. 1, 12-26. dx.doi.org/10.15330/ms.45.1.12-26
2. M. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index,* Lviv: VNTL Publishers, 1999, 141 p.
3. Bandura A., Skaskiv O. *Entire functions of several variables of bounded index,* Lviv: Publisher I. E. Chyzhykov, 2016, 128 p.
4. Bandura A.I., Skaskiv O.B. *Analytic functions in the unit ball of bounded L-index: asymptotic and local properties,* Mat.Stud. **48** (2017), no. 1, 37--73. dx.doi.org/10.15330/ms.48.1.37-73
5. Bandura A., Skaskiv O. *Entire functions of bounded L-index: Its zeros and behavior of partial logarithmic derivative,* Journal of Complex Analysis, **2017** (2017), Article ID 3253095, 10 p. doi: 10.1155/2017/32530953253095
6. Bandura A., Skaskiv O. *Analytic in an unit ball functions of bounded L-index in joint variables,* J. of Math. Sci. **227** (2017), no. 1, 1--12. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3570-6
7. Bandura A., Skaskiv O. Analytic functions in the unit ball. Bounded L-index in joint variables and solutions of systems of PDE's. Beau-Bassin: LAP Lambert Academic Publishing, 2017, 100 p.
8. Gopala J. Krishna, S.M. Shah *Functions of bounded indices in one and several complex variables,* In: Mathematical essays dedicated to A.J. Macintyre, Ohio Univ. Press, Athens, Ohio, 1970, 223--235.
9. Строчик С.Н., Шеремета М. М., Аналітичні в одиничному крузі функції обмеженого індексу, Допов. Акад. Наук України **1** (1993), 19--22.
10. V. O. Kushnir and M. M. Sheremeta, Analytic functions of bounded l-index, Mat. Stud. **12** (1999), no. 1, 59-66.

11. A.I. Bandura, N.V. Petrechko, O.B. Skaskiv, *Analytic in a polydisc functions of bounded L-index in joint variables,* Mat.Stud. **46** (2016), no. 1, 72-80. dx.doi.org/10.15330/ms.46.1.72-80

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.06.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,*** *д.ф.-м.н., професором* ***Чижиковим І.Е.*** *(м. Львів)*

ANALYTIC FUNCTIONS IN $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$ OF BOUNDED INDEX IN JOINT VARIABLES

A. I. Bandura[1], O. B. Skaskiv[2], V. L. Tsvigun[2]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 15; e-mail: andriykopanytsia@gmail.com
[2]Ivan Franko National University of Lviv; Lviv, Universytetska str., 1; e-mail: 12lvan@ukr.net

A concept of boundedness of $\mathbf{L}$*-index in joint variables is generalised for analytic functions in* $\mathbb{D}\times\mathbb{C}$*. We proved criteria of boundedness of* $\mathbf{L}$*-index in joint variables which describes local behaviour of partial derivative of the function and gives an estimate of maximum modulus of the derivative on a skeleton of polydisc by its value at the center of the bidisc.*

Key words*: analytic function, bidisc, bounded* $\mathbf{L}$*-index in joint variables, maximum modulus, partial derivative, Cauchy's integral formula, main polynomial*