МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.5

ПРО СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ РЯДІВ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

О. Б. Скасків [1], **О. Ю. Тарновецька** [2], **О. М. Трусевич** [3]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка; e-mail: olskask@gmail.com*

[2] *Чернівецький факультет НТУ “Харківський політехнічний інститут”; e-mail: savinska.olga@gmail.com*

[3] *Львівський державний університет безпеки життєдіяльності; e-mail: trusev14@gmail.com*

У статті отримані достатні умови для того, щоб співвідношення $\ln F(x)\le(1+o(1))\ln\mu(x,F)$ *мало місце для кожної функції виду* $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} f_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}$ *при* $x\to+\infty$ *зовні деякої множини* E *нульової лінійної щільності або нижньої нульової лінійної щільності, де* (f_n), (λ_n), (β_n) *– послідовності невід'ємних чисел, а диференційовна функція* $\tau:\mathrm{R}_+\to\mathrm{R}_+$ *задовольняє умові* $\tau'(x)\ge 1$ $(x\ge x_0)$, $\mu(x,F)= =\max\{f_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}: n\ge 0\}$.

Ключові слова: *ряд Тейлора-Діріхле, співвідношення Бореля, виняткова множина, максимальний член.*

Нехай L – клас додатних неспадних до $+\infty$ на $\mathrm{R}_+:=[0;+\infty)$ функцій, а через L^+ позначимо клас неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функцій $\psi\in L$; скрізь надалі через ψ^{-1} позначаємо обернену функцію до функції $\psi \in L^{+}$. Для $\Phi \in L$ означимо клас $L(\Phi) := \{\psi_1 \in L^{+} : \forall b > 0 \ \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{R}\int_0^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(x)}{x} = 0\}$.

Нехай $\mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$ клас збіжних для всіх $x \ge 0$ рядів вигляду

$$F(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n}, \quad a_n \ge 0 \ (n \ge 0), \tag{1}$$

де $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ невід'ємні послідовності, тобто, $\lambda = \{\lambda_n : n \ge 0\} \subset \mathrm{R}_+$, $\beta = \{\beta_n : n \ge 0\} \subset \mathrm{R}_+$, а функція $\tau \in L$. Для $\Phi \in L$ через $\mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau,\Phi)$ позначимо підклас класу $\mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$, в який входять функції F, для яких $\ln F(x) \le \Phi(x)$ $(x \ge x_0)$, а через $\underline{\mathrm{S}}(\lambda,\beta,\tau,\Phi)$ позначимо клас функцій $F \in \mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$ таких, що $(\exists x_j \uparrow +\infty) : \ln F(x_j) \le \Phi(x_j)$ $(j \ge 1)$; $\mathrm{S}(\lambda) := \mathrm{S}(\lambda,0,\tau)$, $\mathrm{S}(\lambda) := \mathrm{S}(\lambda,0,\tau)$, $\mathrm{S}(\lambda,\Phi) := \mathrm{S}(\lambda,0,\tau,\Phi)$, $\underline{\mathrm{S}}(\lambda,\Phi) := \underline{\mathrm{S}}(\lambda,0,\tau,\Phi)$ – відповідні класи збіжних для всіх $x \ge 0$ рядів Діріхле $F(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{x\lambda_n}$, $a_n \ge 0 \ (n \ge 0)$. Для $F \in \mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$ і $x \ge 0$ визначимо $\mu(x,F) = \max\{a_n e^{x\lambda_n + \tau(x)\beta_n} : n \ge 0\}$. Відомо (див. [1]-[5]), що задача отримання оцінок зверху для досить широкого класу регулярно збіжних функціональних рядів (Тейлора, Діріхле, Тейлора-Діріхле, за системою функцій Міттаг-Леффлера і т.п.) зводиться до подібної задачі для рядів $F \in \mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$. В [4, 5] встановлено наступні два твердження, що є аналогами відповідних тверджень, встановлених в [6] в класі цілих рядів Діріхле $\mathrm{S}(\lambda)$.

Теорема А [5]. *Нехай $\tau \in L$ – диференційовна функція. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty, \tag{2}$$

то для кожної для функції $F \in \mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$ співвідношення

$$\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x,F) \tag{3}$$

у випадку $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge x_0)$ справджується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної міри, тобто, $\int_{E\cap[0;+\infty)} dx < +\infty$, а у випадку $\tau'(x) \le 1$ $(x \ge x_0)$ – зовні деякої множини E такої, що $\int_{E\cap[0;+\infty)} d\tau(x) < +\infty$.

На необхідність умови (2) вказує наступна теорема.

Теорема В [5]. *Нехай функція $\tau \in L$ така, що $0 \le \tau'(x) \le 1$. Якщо послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ – довільні неспадні такі, що $\ln n = O(\lambda_n + \beta_n)$ $(n \to +\infty)$, а умова (2) не виконується, то існують функція $F \in \mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau)$ і стала $h > 0$ такі, що*

$$(\forall x \ge x_0) : \ln F(x) \ge (1 + h) \ln \mu(x,F). \tag{4}$$

Якщо застосувати теорему В до функції $F_1(x) = F(\tau^{-1}(x))$, то з теореми В отримується такий наслідок.

Наслідок [5]. *Нехай послідовності* λ, β *такі, як в теоремі В, а* $\tau'(x) \ge 1$ $(x \ge x_1)$. *Тоді існує функція* $F \in \mathsf{S}(\lambda, \beta, \tau)$, *для якої для всіх* $x \ge x_0$ *виконується нерівність (4) з деяким* $h > 0$.

У даній статті умову (2) теореми А ослабимо, розглядаючи співвідношення (3) у підкласах $\mathsf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$, $\underline{\mathsf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi)$. При цьому, як і у випадку класів цілих рядів Діріхле $\mathsf{S}(\lambda, \Phi)$, $\underline{\mathsf{S}}(\lambda, \Phi)$ (стосовно класу $\mathsf{S}(\lambda, \Phi)$ див., наприклад, [7]) доведеться “пожертвувати” якістю описання величини виняткової множини E. Методика наших доведень відрізняється від методу, що застосовувався у статтях [6, 7] і, як і в цілому ряді інших статей (див., наприклад, [3-5], [8], [10-22]), в її основі лежать оцінки, які отримуються на основі ймовірнісних нерівностей Чебишова або, як у нашому випадку, Маркова. Встановимо спочатку наступні твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\tau \in L, \tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$, $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$. *Якщо для деякої функції* $\psi_1 \in L(\Phi)$ *виконується умова*

$$\ln n_\alpha(t) = o(\psi_1^{-1}(t)) \quad (t \to +\infty) \tag{5}$$

і $F \in \mathsf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, *то співвідношення (3) справджується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *нульової лінійної щільності, тобто,*

$$DE = \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{R} meas(E \cap [0, R]) = 0;$$

тут $n_\alpha(t) = \sum_{\lambda_n + \beta_n \le t} 1$ *– лічильна функція послідовності* $\alpha_n = \lambda_n + \beta_n$.

Твердження 2. *Нехай* $\tau \in L, \tau'(x) \ge 1$ $(x > 0)$, $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$. *Якщо для деякої функції* $\psi_1 \in L(\Phi)$ *виконується умова (5) і* $F \in \underline{\mathsf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, *то співвідношення (3) справджується при* $x \to +\infty$ *зовні деякої множини* E *нульової нижньої лінійної щільності, тобто,*

$$dE = \underline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{R} meas(E \cap [0, R]) = 0.$$

Нам потрібне таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Нехай* $\Phi \in L^+$, $\Phi_1(x) := x\Phi(x)$, $\psi_1 \in L$, $E = \{x > 0 : \psi_1(g(x)) \le g'(x)\}$.

1^0. *Якщо* $F \in \mathsf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ *і* $\psi_1 \in L(\Phi)$, *то* $DE = 0$.

2^0. *Якщо* $F \in \underline{\mathsf{S}}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$ *і* $\psi_1 \in L(\Phi)$, *то* $dE = 0$.

Доведення леми 1 отримаємо за допомогою наступного твердження з [9, 11], яке можна сформулювати у такому вигляді.

Лема 2 [9, 11] *Нехай* $\varphi, \psi \in L^{+}$ *функції такі, що*

$$A_1(R) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int^{R} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = o(1) \quad (R \to +\infty, R \in G),$$

$G \subset \mathrm{R}_{+}$, та $R = o(\psi(R\varphi(R)))\,(R \to +\infty)$. Тоді,

$$A_2(R) \stackrel{def}{=} \frac{1}{\varphi(R)} \int^{R\psi(R)} \frac{dx}{\psi(x)} = o(1) \quad (R \to +\infty, R \in G).$$

Доведення леми 1. Переконаємось спочатку, що для функції $\psi \in L(\Phi)$ виконується умова $R = o(\psi(R\varphi(R)))\,(R \to +\infty)$ з леми 2 з функцією $\varphi = \Phi^{-1}$, оберненою до функції Φ. Справді, для довільного $b > 0$

$$\frac{1}{R} \int_1^{b\Phi(R)} \frac{d\psi^{-1}(t)}{t} = \frac{\psi^{-1}(t)}{Rt}\Big|_1^{b\Phi(R)} + \int_1^{b\Phi(R)} \frac{\psi^{-1}(t)}{t^2}\,dt,$$

звідки, $\psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R)) \quad (R \to +\infty)$ для довільного $b > 0$, тобто, $\Phi(R) = \dfrac{1}{b}\psi(o(R\Phi(R))) \quad (R \to +\infty)$ для довільного $b > 0$, що дає $R = o(\psi(R\varphi(R)))\,(R \to +\infty)$. Оскільки для $x \notin E$ виконується нерівність $g'(x) \le \psi_1(g(x))$, то у випадку $\ln F(x) \le x\Phi(x) \;\; (x \in G)$ отримуємо

$$\frac{meas(E \cap [0,R])}{R} = \frac{1}{R} \int_{E \cap [0,R]} dx \le \frac{1}{R} \int_E \frac{g'(x)}{\psi_1(g(x))}\,dx =$$

$$= \frac{1}{R} \int_{g(E \cap [0,R])} \frac{dx}{\psi_1(x)} \le \frac{1}{R} \int_0^{g(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \le \frac{1}{R} \int_0^{R\Phi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \quad (R \in G).$$

Звідки у випадку 1^0 за лемою 2, застосованою у випадку, коли φ – обернена функція до функції Φ, а $G = [x_0, +\infty)$, виводимо

$$0 \le DE \le \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{R} \int_0^{R\Phi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

позаяк $\psi_1 \in L(\Phi)$. У випадку 3^0 подібно для $G = \{\Phi(x_j) : j \ge 1\}$, де послідовність (x_j) з умови $\ln F(x_j) \le x_j \Phi(x_j)$, отримуємо

$$0 \le dE \le \overline{\lim_{j \to +\infty}} \frac{1}{x_j} \int_0^{x_j \Phi(x_j)} \frac{dx}{\psi_1(x)} \le \overline{\lim_{R \to +\infty}} \frac{1}{\varphi(R)} \int_0^{R\varphi(R)} \frac{dx}{\psi_1(x)} = 0,$$

тобто $dE = 0$. Лему 1 доведено.

Зауваження 1. Нескладно зрозуміти, що насправді

$R = o(\psi(R\varphi(R)))\,(R \to +\infty) \Leftrightarrow (\forall b > 0) : \psi^{-1}(b\Phi(R)) = o(R\Phi(R)) \quad (R \to +\infty)$

(див. також [12]).

Доведення тверджень 1-2. Нехай $g(x) = \ln F(x)$. Доведення тверджень 1-2 подібне до доведення теореми з [5]. Отже, застосовуючи лему

1 з [10] та лему 1 з $\psi_2(x)=\frac{1}{2}\psi_1(x)$ замість $\psi_1(x)$, для всіх $x\notin E$ (E – деяка множина така, що $DE=0$ за умов твердження 1 і $dE=0$ за умов твердження 2) отримаємо

$$F(x)\le 2\sum_{\lambda_n+\tau'(x)\beta_n\le 2g'(x)} b_n\exp(x\lambda_n+\tau(x)\beta_n)\le 2n_\alpha(\psi_1(g(x)))\mu(x,F). \quad (6)$$

Звідки, використовуючи умову (5), негайно при $x\to+\infty$ $(x\notin E)$ отримуємо

$$\ln F(x)\le \ln 2+\ln n_\alpha(\psi_1(g(x)))+\ln\mu(x,F)=o(g(x))+\ln\mu(x,F),$$

тобто, твердження 1-2 доведено.

Теорема 1. *Нехай* $\tau'(x)\ge 1$ $(x>0)$. *Якщо* $\Phi\in L^+$ *і виконується умова*

$$(\forall b>0):\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\sum_{0<\alpha_k\le b\Phi(R)}\frac{1}{k\alpha_k}=0,\quad \alpha_k=\lambda_k+\beta_k, \quad (7)$$

то для кожної функції $F\in \mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$, $\Phi_1(x)\equiv x\Phi(x)$, *співвідношення (3) справджується при* $x\to+\infty$ *зовні деякої множини* E *нульової лінійної щільності, тобто* $DE=0$.

Зауваження 2. Теорему 1 раніше [8] було встановлено в класі $\mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau,\Phi)$, який, наприклад, у випадку $\Phi(x)=x^\rho$, $\rho>0$, є істотно вужчим за клас $\mathrm{S}(\lambda,\beta,\tau,\Phi_1)$, де $\Phi_1(x)=x^{1+\rho}$. Зрозуміло також, що у випадку виконання умови $\Phi_1(x)=\Phi(O(x))$ $(x\to+\infty)$ обидва результати є рівносильними.

Доведення. Перевіримо можливість застосування твердження 1. Справді, застосовуючи нерівність $1/n\ge\ln(n+1)-\ln n$ $(n\ge 1)$ з умови (7) отримуємо

$$(\forall b>0):\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^{b\Phi(R)}\frac{d\ln n_\alpha(t)}{t}=0. \quad (8)$$

Оскільки $\int_{t_0}^{u}\frac{d\ln n_\alpha(t)}{t}=\frac{\ln n_\alpha(t)}{t}\Big|_{t_0}^{u}+\int_{t_0}^{u}\frac{dt\ln n_\alpha(t)}{t^2}$, то з (8) маємо, що одночасно виконуються рівності

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{\ln n_\alpha(\Phi(R))}{R\Phi(R)}=0,\quad \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_{t_0}^{\Phi(R)}\frac{\ln n_\alpha(t)}{t^2}dt=0. \quad (9)$$

Нехай $\varphi(x)$ – обернена функція до функції $\Phi(R)$. Визначимо

$$\psi_2(x)=\frac{1}{\sqrt{l_1(x)}},\quad l_1(x)=\max\{\frac{1}{\varphi(R)}\int_0^R\frac{\ln n_\alpha(t)}{t^2}dt:R\ge x\},$$

$$\psi_3(x)=\frac{1}{\sqrt{l_2(x)}},\quad l_2(x)=\max\{\frac{\ln n_\alpha(R)}{R\varphi(R)}:R\ge x\}.$$

Зауважимо, що $\psi_2(x)$ і $\psi_3(x)$ строго зростають до $+\infty$ $(x\to+\infty)$. Крім того, якщо $l(R)=\int_0^R t^{-2}\ln n_\alpha(t)dt$, то з (9)

$$\frac{1}{R}\int_0^{\Phi(R)}\frac{\psi_2(t)\ln n_\alpha(t)dt}{t^2}=\frac{1}{R}\int_0^{\Phi(R)}\psi_2(t)dl(t)\le$$

$$\le\frac{1}{R}\psi_2(\Phi(R))l(\Phi(R))\le\{\frac{1}{R}\int_0^{\Phi(R)}\frac{\ln n_\alpha(t)dt}{t^2}\}^{\frac{1}{2}}=o(1)\quad(R\to+\infty),\quad(10)$$

та

$$\frac{\psi_3(\Phi(R))}{R\Phi(R)}\ln n_\alpha(\Phi(R))\le\psi_3(\Phi(R))l_2(\Phi(R))=\frac{1}{\sqrt{\psi_3(\Phi(R))}}=o(1)\,(R\to+\infty).(11)$$

Виберемо тепер додатну неперервну зростаючу до $+\infty$ функцію ψ_4 таку, що $a(x)\le\psi_4(x)\le a(x)+1$, де

$$a(x)=\min\{\psi_2(x)\ln n_\alpha(x),\psi_3(x)\ln n_\alpha(x)\}\quad(x\to+\infty).$$

Тоді із співвідношень (10) і (11) отримуємо для $t_0>0$, що

$$\psi_4(\Phi(R))=o(R\Phi(R)),\quad\int_{t_0}^{\Phi(R)}\frac{\psi_4(t)}{t^2}dt=o(R).\qquad(12)$$

Із співвідношень (12) отримуємо

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_{t_0}^{\Phi(R)}\frac{d\psi_4(t)}{t}=\overline{\lim_{R\to+\infty}}\left(\frac{\psi_4(\Phi(R))}{R\Phi(R)}+\frac{1}{R}\int_{t_0}^{\Phi(R)}\frac{\psi_4(t)}{t^2}dt\right)=0.\qquad(13)$$

Тобто, досить вибрати $\psi_1(x)=\psi_4^{-1}(x)$ при $x\ge\psi_4^{-1}(t_0)$ – обернену функцію до функції $\psi_4(t)$ при $t\ge t_0$. Для $x\in[0,\psi_4^{-1}(t_0)]$ можна вибрати $\psi_1(x)=\frac{\psi_4^{-1}(t_0)}{2}+\frac{x}{2}$. Залишається зауважити, що $\ln n_\alpha(t)\le\frac{\psi_4(t)}{a_1(t)}=\frac{\psi_1^{-1}(t)}{a_1(t)}$, де $a_1(t)=\min\{\psi_2(t),\psi_3(t)\}\to+\infty$ $(t\to+\infty)$, і застосувати твердження 0, оскільки $\psi_1\in L(\Phi)$. Справді, із співвідношення (13) маємо

$$\frac{1}{R}\int^{\Phi(R)}\frac{d\psi_1^{-1}(x)}{x}=\frac{1}{R}\int^{\Phi(R)}\frac{d\psi_4(x)}{x}=o(1)\ (r\to+\infty).$$

Теорему 1 доведено.

Повністю повторюючи міркування з першої частини доведення теореми 1 і застосовуючи потім твердження 2, доводимо таку теорему.

Теорема 2. *Нехай* $\tau'(x)\ge1$ $(x>0)$. *Якщо* $\Phi\in L^+$, $F\in\underline{S}(\lambda,\beta,\Phi)$ *і виконується умова (7), то співвідношення (3) справджується при* $x\to+\infty$ *зовні деякої множини E нульової нижньої лінійної щільності, тобто* $dE=0$.

Доведення. Як вже відзначалося перед формулюванням теореми 2, доведення теореми 2 відрізняється від доведення теореми 1 лише застосуванням твердження 2 замість твердження 1, застосованого у доведенні теореми 1. Справді, у доведенні теореми 1 встановлено, що з умови (7) випливає, що існує функція $\psi_1 \in L(\Phi)$, для якої виконується співвідношення (5). Оскільки за умовою теореми 2, $F \in \underline{S}(\lambda, \beta, \Phi)$, то всі умови твердження 2 виконуються. Застосування твердження 2 завершує доведення теореми 2.

Зауважимо, що у теоремі 1, взагалі кажучи, послідовність (α_n) мусить мати єдину точку скупчення у $+\infty$, а ні λ, ні β не зобов'язані такими бути. У наступній теоремі послідовність λ мусить мати єдину точку скупчення у $+\infty$. Але, ця обставина дозволяє істотно послабити умови теореми 1. Умови теореми 1 допускають таку варіацію.

Теорема 3. *Нехай* $\tau'(x) \ge 0$ $(x > 0)$. *Якщо* $F \in \mathsf{S}(\lambda, \beta, \tau, \Phi_1)$, $\Phi_1(x) \equiv x\Phi(x)$, $\Phi \in L$, *і виконується умова*

$$(\forall b > 0): \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \sum_{0<\lambda_k \le b\Phi(R)} \frac{1}{k\lambda_k} = 0, \tag{14}$$

то співвідношення (3) виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E нульової лінійної щільності.

Доведення теореми 3 в цілому повторює доведення теореми 1 з тією відмінністю, що замість нерівності (6) воно використовує нерівність

$$F(x) \le 2 \sum_{\lambda_n \le 2g'(x)} b_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) \le 2n_\lambda(\psi_1(g(x)))\mu(x, F),$$

де $n_\lambda(t) = \sum_{\lambda_n \le t} 1$, яка отримується з леми 2 з [10]. З огляду на ці обставини ми не наводимо тут доведення теореми 3.

Література

1. Осколков В.А. О росте целых функций, представленных регулярно сходящимися функциональными рядами / В.А. Осколков // Матем. сб. – 1976. – Т.100, №2. – С. 312-334.
2. Величко С.Д. Асимптотичні властивості одного класу функціональних рядів / С.Д. Величко, О.Б. Скасків // Вісник. Львів. ун-ту. – 1989. – Вип. 32. – С. 50-51.
3. Скасків О.Б. Максимальний член і сума регулярно збіжного функціонального ряду / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Вісник Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.49. – С. 75-79.
4. Скасків О.Б. Теореми типу Бореля для регулярно збіжних функціональних рядів / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №4. – С. 60-63.
5. Скасків О.Б. Про теорему типу Бореля для рядів, подібних до рядів Тейлора-Діріхле / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Мат. Студ. – 2000. – Т.13, №1. – С. 79-82.
6. Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / О.Б. Скасків // Мат. заметки. – 1985. – Т.37, №1. – С. 41-47. Eng. transl. in Math. Notes, **37** 1985, 24-28.

7. Шеремета М.Н. Об эквивалентности логарифмов максимума модуля и максимального члена целого ряда Дирихле / М.Н. Шеремета // Мат. заметки. – 1987. – Т.42, №2. – С. 215-226.
8. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості регулярно збіжних функціональних рядів / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Препринт №17-1. – Львів: Інститут прикл. пробл. мех. і мат. НАН України, 1999. – 18 с.
9. Скасків О.Б. Асимптотичні властивості аналітичних функцій представлених степеневими рядами і рядами Діріхле / О.Б. Скасків // Докт. дис. – Львів, 1995. – 299 с.
10. Скасків О.Б. Про стійкість рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле / О.Б.Скасків, О.Ю. Тарновецька // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, №2. – С. 77-83.
11. Зікрач Д.Ю. Про опис виняткової множини у співвідношенні Бореля для кратних рядів Діріхле з обмеженням на зростання зверху / Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків // Матем.Студії. – 2009. – Т.32, №2. – С.139-147.
12. Kuryliak A.O. On Borel's type relation for the Laplace-Stieltjes integrals / A.O. Kuryliak, O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2014. – V.42, №2. – C. 134-142.
13. Скаскив О.Б. О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле / О.Б. Скаскив // Матем. заметки. – 1999. – Т.66, №2. – С. 282-292. English transl. in Math. Notes, **66** (1999), 223-232.
14. Скасків О.Б. Про стійкість максчимального члена цілого ряду Діріхле / О.Б. Скасків, О.М. Тракало // Укр. мат. журн. – 2005. – Т.57, №4. – С. 571-576. English transl. in Ukr. Math. J., **57** (2005), 686-693.
15. Kuryliak A.O. Wiman's inequality for Laplace integrals / A.O. Kuryliak, I.E. Ovchar, O.B. Skaskiv // Int. Journal of Math Analysis. – 2014. – V.8, №8. – P. 381-385.
16. Скасків О.Б. Співвідношення типу Бореля для узагальнень ряду експонент / О.Б. Скасків, О.М. Трусевич // Укр. мат. журн. – 2001. – Т.53, №11. – С. 1570-1581.
17. Скасків О.Б. Асимптотичні оцінки для інтегралів Лапласа / О.Б. Скасків, О.М. Тракало // Матем. Студії. – 2002. – Т.18, №2. – С. 125-146.
18. Скасків О.Б. Швидкість збіжності додатних рядів / О.Б. Скасків // Укр. мат. журн. – 2004. – Т.56, №12. – С. 1695-1674.
19. Скасків О.Б. Стійкість максимума послідовності лінійних функцій / О.Б. Скасків // Мат. вісн. НТШ. – 2004. – Вип.1. – С. 120-129.
20. Skaskiv O.B. The best possible description of exceptional set in Borel's relation for multiple Dirichlet series / O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2008. – V.30, №2. – P. 189-194.

21. Skaskiv O.B. On the best possible description of an exceptional set in asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals / O.B. Skaskiv, D.Yu. Zikrach // Mat. Stud. – 2011. – V.35, №2. – P. 131-141.
22. Зікрач Д.Ю. Нерівність типу Вімана для інтегралів Лапласа-Стілт'єса / Д.Ю. Зікрач, О.Б. Скасків // Буковинський математичний журнал. – 2013. – Т.1, №1-2. – С. 58-63.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.10.2016 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Чижиковим І.Е.*** *(м. Львів)*

ON BOREL'S TYPE RELATION FOR THE LAPLACE-STIELTJES INTEGRALS

O.B. Skaskiv[1], **O. Yu. Tarnovetska**[2], **O. M. Trusevych**[3]
[1] *Lviv National University named by Ivan Franko;*
e-mail: olskask@gmail.com
[2] *Chernivtsi faculty of NTU "Kharkiv polytechnic institute";*
e-mail: savinska.olga@gmail.com
[3] *Lviv State University of Safety of Vital Functions;*
e-mail: trusev14@gmail.com

In article it is obtained sufficient conditions in order that relation $\ln F(x)\le(1+o(1))\ln\mu(x,F)$ *holds for each function of the form* $F(x)=\sum_{n-0}^{+\infty} f_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}$ *as* $x\to+\infty$ *outside some set* E *of zero linear density or of zero lower linear density, where* (f_n), (λ_n), (β_n) *are positive sequences, and a differentiable function* $\tau:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *such that* $\tau'(x)\ge 1$ $(x\ge x_0)$, $\mu(x,F)=\max\{f_n e^{x\lambda_n+\tau(x)\beta_n}:n\ge 0\}$.

Key words: *Taylor-Dirichlet series, Borel relation, exceptional set, maximal term*