УДК 539.3

КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНОЮ ШАРНІРНО ОПЕРТИХ ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ

Т. В. Шопа

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України;
79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б; e-mail: tetyana.sh@gmail.com

В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною кількістю абсолютно жорстких включень довільної геометричної форми, орієнтації та розташування, які шарнірно з'єднані з панеллю. Границя панелі є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на зовнішній границі панелі. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Крайову задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: *ортотропна панель подвійної кривини, коливання, включення, власні частоти, послідовнісний підхід, функція Гріна, непрямий метод граничних елементів, метод колокацій.*

Постановка проблеми. В сучасному авіа- та кораблебудуванні, широко використовуються анізотропні оболонкові елементи з включеннями різної форми та розташування, які працюють за змінних в часі навантажень. Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів.

Аналіз відомих результатів досліджень. Коливанням суцільних тонкостінних елементів конструкцій багато уваги приділяють чимало фахівців з механіки деформівного твердого тіла [1-3]. Однак недостатньо є опублікованих матеріалів, які стосуються динамічної поведінки ортотропних тонкостінних елементів конструкцій з включеннями, зокрема, панелей. В даній роботі узагальнено результати, отримані в роботі [4].

Мета роботи − побудувати розв'язок узагальненої задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної форми орієнтації та розташування, які шарнірно з'єднані з панеллю, з довільними гармонічними в часі граничними умовами на зовнішній довільної форми границі панелі ефективним методом в рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви і всі інерційні компоненти.

Постановка задачі. Розглянути задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини. Панель містить N абсолютно жорстких включень довільної форми та розташування, які шарнірно з'єднані з панеллю. Контурами включень є криві $L^{(j)}$, $j=\overline{1,N}$. Нехай на включення маси $\tilde{m}^{(j)}$ діють сили з головним вектором $P^{(j)}=P_0^{(j)}\sin(\omega t)$, який є нормальним до серединної поверхні панелі і діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснює поступальний рух вздовж нормальному напрямку до серединної поверхні панелі. Зовнішня границя панелі є також довільної форми, а її контуром − дві взаємодоповнюючі криві $L^{(0)}$ та $L^{(N+1)}$. Можна уявити таку панель, яка в термінах серединної поверхні займає багатозв'язну область Ω, як результат довільного вирізу з суцільної панелі, яка в термінах серединної поверхні займає однозв'язну область Π канонічної форми (прямокутну в плані). Криволінійну систему координат з метрикою, близькою до евклідової, розміщено в уявно розширеній області. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають з напрямками головних кривин та осями ортотропії матеріалу панелі. Використовуватимемо позначення статті [8]

Нехай на одній частині границі панелі задано розподілені компоненти переміщень

$$w=w_0(\alpha)\sin(\omega t),\quad u_n=u_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_n=\gamma_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),$$

$$u_\tau=u_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \gamma_\tau=\gamma_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad \alpha\in L^{(0)}, \tag{1}$$

а на другій − задано розподілені компоненти зусиль

$$Q_n=Q_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad M_n=M_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad N_n=N_{n0}(\alpha)\sin(\omega t),$$

$$N_\tau=N_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\quad M_\tau=M_{\tau 0}(\alpha)\sin(\omega t),\ \alpha\in L^{(N+1)}. \tag{2}$$

Граничні умови на контурах включень мають вигляд

$$w(\alpha,t)=\tilde{w}^{(j)}(\alpha,t),\ u_\tau(\alpha,t)=0,\ \gamma_\tau(\alpha,t)=0, M_n(\alpha,t)=0,\ N_n(\alpha,t)=0,$$

$$\alpha\in L^{(j)},\ j=\overline{1,N}, \tag{3}$$

де $\tilde{w}^{(j)}=\tilde{w}_0^{(j)}\sin(\omega t)$ − переміщення j-ого включення.

Якщо покласти

$$w_0(\alpha)=u_{n0}(\alpha)=\gamma_{n0}(\alpha)=u_{\tau 0}(\alpha)=\gamma_{\tau 0}(\alpha)=0,$$

$$Q_{n0}(\alpha)=M_{n0}(\alpha)=N_{n0}(\alpha)=N_{\tau 0}(\alpha)=M_{\tau 0}(\alpha)=0,$$

то матимемо випадок жорсткого закріплення однієї частини границі панелі та вільної від навантаження другої частини панелі.

Розв'язок задачі. Для дослідження використано рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви [8]

$$\left[\mathbf{L}\right]\mathbf{U}=-\mathbf{P}\,,\quad \mathbf{U}=\left\{u_1,\,u_2,\,w,\,\gamma_1,\,\gamma_2\right\}^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{P}=\left\{q_1,\,q_2,\,q_3,\,m_1,\,m_2\right\}^{\mathrm{T}},\qquad (4)$$

$$\mathbf{L}_{11}=B_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+B_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-k_1^2\Lambda_1-2h\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{22}=B_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+B_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-k_2^2\Lambda_2-2h\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{33}=\Lambda_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\Lambda_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-\left[k_1B_1\left(k_1+\nu_{12}k_2\right)+k_2B_2\left(k_2+\nu_{21}k_1\right)\right]-2h\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{44}=D_1\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-\Lambda_1-\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{55}=D_{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+D_2\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}-\Lambda_2-\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{14}=\mathbf{L}_{41}=k_1\Lambda_1,\ \ \mathbf{L}_{25}=\mathbf{L}_{52}=k_2\Lambda_2\,,\ \mathbf{L}_{24}=\mathbf{L}_{42}=0,\ \ \mathbf{L}_{15}=\mathbf{L}_{51}=0\,,$$

$$\mathbf{L}_{12}=\left(B_1\nu_{12}+B_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \ \mathbf{L}_{21}=\left(B_{12}+B_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{45}=\left(D_1\nu_{12}+D_{12}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2},\ \ \mathbf{L}_{54}=\left(D_{12}+D_2\nu_{21}\right)\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{34}=-\mathbf{L}_{43}=\Lambda_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\ \ \mathbf{L}_{35}=-\mathbf{L}_{53}=\Lambda_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,,$$

$$\mathbf{L}_{13}=\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_1k_2\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1},\ \ \mathbf{L}_{31}=-\left(k_1\Lambda_1+B_1k_1+B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,,$$

$$\mathbf{L}_{23}=\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_2k_2\nu_{21}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,,\ \mathbf{L}_{32}=-\left(k_2\Lambda_2+B_2k_2+B_1k_1\nu_{12}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,.$$

Рівняння руху включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)}\frac{\partial^2\tilde{w}^{(j)}\left(\alpha,t\right)}{\partial t^2}=P^{(j)}+\int\limits_{L^{(j)}}p^{(j)}\left(\xi,t\right)dl\left(\xi\right),\ \ j=\overline{1,N},\qquad (5)$$

де $p^{(j)}\left(\alpha,t\right)=-Q_n\left(\alpha,t\right),\ \ \alpha\in L^{(j)}$ − контактні сили взаємодії оболонки та включення.

У випадку усталених коливань $p\left(\alpha,t\right)=-Q_n\left(\alpha\right)\sin\left(\omega t\right)$. У результаті маємо крайову задачу (1), (2), (3), (4), (5).

Розв'язок крайової задачі знаходимо на основі непрямого методу граничних елементів за використання функцій Гріна, знайдених в роботі [8] на основі послідовнісного представлення дельта-функції Дірака [5-7].

Вводимо узагальнений контур $L = L^{(0)} \cup L^{(1)} \cup ..... \cup L^{(N)} \cup L^{(N+1)}$ і такі функції на ньому:

$$\mathbf{T}(\xi) = \left\{T_1(\xi),....,T_5(\xi)\right\}^{\mathrm{T}} = \begin{cases} \mathbf{T}^{(0)}(\xi) = \left\{T_1^{(0)}(\xi),...,T_5^{(0)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, \ \xi \in L^{(0)}, \\ \mathbf{T}^{(1)}(\xi) = \left\{T_1^{(1)}(\xi),...,T_5^{(1)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, \ \xi \in L^{(1)}, \\ .... \\ \mathbf{T}^{(N)}(\xi) = \left\{T_1^{(N)}(\xi),...,T_5^{(N)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, \ \xi \in L^{(N)}, \\ \mathbf{T}^{(N+1)}(\xi) = \left\{T_1^{(N+1)}(\xi),...,T_5^{(N+1)}(\xi)\right\}^{\mathrm{T}}, \ \xi \in L^{(N+1)}, \end{cases}$$

Розв’язок шукаємо у вигляді потенціалу простого шару

$$\mathbf{U}(\alpha,t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{E}_{km}(\alpha)\right]\left[\mathbf{U}_{km}\right]\left[\mathbf{E}_{km}(\xi)\right]\mathbf{T}(\xi)\,dl(\xi)\sin(\omega t), \quad (6)$$

$$\mathbf{U}(\alpha,t) = \left\{u_1(\alpha,t), u_2(\alpha,t), w(\alpha,t), \gamma_1(\alpha,t), \gamma_2(\alpha,t)\right\}^{\mathrm{T}}.$$

Для побудови інтегральних рівнянь крайової задачі використовуємо представлення розв’язку (6), крайові умови (1), (2), (3) та співвідношення (5). У випадку крайових умов, коли на контурах задано компоненти зусиль, використовуємо метод фіктивного контуру для уникнення стрибка похідної від потенціалу простого шару на границі, який полягає в тому, що крайові умови задовольняємо не на реальній границі, а на границі фіктивно зміщеній всередину розглядуваної області на малу відстань ε. Криві зміщених контурів позначатимемо $L^{\varepsilon(j)}$. Тоді система 5(N+2)+N інтегральних рівнянь та інтегральних співвідношень відносно невідомих функцій густин $\mathbf{T}(\xi)$ та відносно невідомих переміщень включень $\tilde{w}_0^{(j)}$ набуває вигляду

$$\left\{u_{n0}(\alpha),\ u_{\tau 0}(\alpha),\ w_0(\alpha),\ \gamma_{n0}(\alpha),\ \gamma_{\tau 0}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}(\xi)\right]\mathbf{T}(\xi)\,dl(\xi), \quad \alpha \in L^{(0)}$$

$$\tilde{w}_0^{(j)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{ss}(\alpha) w_{km}^i \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon) u_{i\tau}(\alpha)\Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi)\,dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}(\alpha)\Phi_{km}^{i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)M_{in}(\alpha)\Phi_{km}^{i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$0=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)N_{in}(\alpha)\Phi_{km}^{i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\alpha\in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$\left\{N_{n0}(\alpha),\ N_{\tau 0}(\alpha),\ Q_{n0}(\alpha),\ M_{n0}(\alpha),\ M_{\tau 0}(\alpha)\right\}^{\mathrm{T}}=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}(\xi)\right]\mathbf{T}(\xi)\,dl(\xi),\quad \alpha\in L^{\varepsilon(N+1)},$$

$$-\omega^2\tilde{m}^{(j)}\tilde{w}_0^{(j)}=P_0^{(j)}-\int_{L^{(j)}} Q_n(\zeta)\,dl(\zeta),\ \ j=\overline{1,N},$$

де

$$Q_n(\zeta)=\int_L \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)Q_{in}(\zeta)\Phi_{km}^{i}(\xi)T_i(\xi)dl(\xi),$$

$$\Phi_{km}^{1}(\xi)=\Phi_{km}^{4}(\xi)=\Phi_{km}^{cs}(\xi),\ \Phi_{km}^{2}(\xi)=\Phi_{km}^{5}(\xi)=\Phi_{km}^{sc}(\xi),\ \Phi_{km}^{3}(\xi)=\Phi_{km}^{ss}(\xi),$$

а $\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha)\right],\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)\right],u_{in}(\alpha),u_{i\tau}(\alpha),\gamma_{in}(\alpha),\gamma_{i\tau}(\alpha),w_i,$
$M_{in}(\alpha),M_{i\tau}(\alpha),N_{in}(\alpha),N_{i\tau}(\alpha),Q_{in},i=\overline{1,5}$ – такі ж, як в статті [8].

Розв'язок систем інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних схем методу колокацій. Для відшукування розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду необхідно використовувати регуляризовані алгоритми, оскільки це є традиційно некоректна задача. Для контурів з кутовими точками необхідно використовувати нерівномірну сітку з достатньо сильним ущільненням біля кутів з метою отримання збіжних розв'язків. Для прикладу, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої L замінюємо ламаними ($S^{(j)}$ – кількість відрізків розбиття j-ого контуру, $\alpha^{(j)r}$ – середини відрізків розбиття j-ого контуру, $l^{(j)r}$ – довжини відрізків розбиття $L^{(j)r}$, $r=\overline{1,S^{(j)}}$), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо такий розподіл невідомих густин $\mathbf{T}^{(j)}(\xi)=\mathbf{T}^{(j)r}\delta\left(\alpha^{(j)r},\xi\right)$. Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій $\alpha^{(j)q}$, які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів або точками, які є на відстані ε від них з боку розглядуваної області.

Звідси система $5\sum_{j=0}^{N+1} S^{(j)} + N$ лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $\tilde{w}_0^{(j)}, j=\overline{1,N}$ та $\mathbf{T}^{(j)r}$, $j=\overline{0,N+1}$, $r=\overline{1,S^{(j)}}$ набуде вигляду

$$\left\{u_{n0}\left(\alpha^{(0)q}\right),\ u_{\tau 0}\left(\alpha^{(0)q}\right),\ w_0\left(\alpha^{(0)q}\right),\ \gamma_{n0}\left(\alpha^{(0)q}\right),\ \gamma_{\tau 0}\left(\alpha^{(0)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}\left(\alpha^{(0)q}\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\mathbf{T}^{(f)r},$$

$$\alpha^{(0)q} \in L^{(0)}, q=\overline{1,S^{(0)}},$$

$$\tilde{w}_0^{(j)} = \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)\Phi_{km}^{ss}\left(\alpha^{(j)q}\right) w_{km}^{i}\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0 = \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)u_{i\tau}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0 = \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)\gamma_{i\tau}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$0 = \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)M_{in}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$0 = \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)N_{in}\left(\alpha^{(j)q}\right)\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r},$$

$$\alpha^{(j)q} \in L^{\varepsilon(j)},\ \ j=\overline{1,N},$$

$$\left\{N_{n0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), N_{\tau 0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), Q_{n0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), M_{n0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right), M_{\tau 0}\left(\alpha^{(N+1)q}\right)\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= \sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M} C_{km}(\varepsilon)\left[\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}\left(\alpha^{(N+1)q}\right)\right]\left[\mathbf{E}_{km}\left(\alpha^{(f)r}\right)\right]\mathbf{T}^{(f)r},$$

$$\alpha^{(N+1)q} \in L^{\varepsilon(N+1)},\ \ q=\overline{1,S^{(N+1)}},$$

$$P_0^{(s)} = \sum_{p=1}^{S^{(s)}}\sum_{f=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(f)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}\sum_{i=1}^{5} C_{km}(\varepsilon)\Psi_{in}\left(\alpha^{(s)p}\right)\Phi_{km}^{i}\left(\alpha^{(f)r}\right)T_i^{(f)r} - \omega^2\tilde{m}^{(s)}\tilde{w}_0^{(s)},$$

$$s=\overline{1,N},$$

де

$$\Psi_{in}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\Lambda_1\Psi^{cs}_{km}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\gamma^i_{1km}+\lambda_{1k}w^i_{km}-k_1u^i_{1km}\right)+$$
$$+\Lambda_2\Psi^{sc}_{km}\left(\alpha^{(s)p}\right)\left(\gamma^i_{2km}+\lambda_{2m}w^i_{km}-k_2u^i_{2km}\right),$$
$$\Psi^{sc}_{km}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\int\limits_{L^{\varepsilon(s)p}}n_2(\zeta)\Phi^{sc}_{km}(\zeta)dl(\zeta),\ \Psi^{cs}_{km}\left(\alpha^{(s)p}\right)=\int\limits_{L^{\varepsilon(s)p}}n_1(\zeta)\Phi^{cs}_{km}(\zeta)dl(\zeta),$$
$$s=\overline{1,N},\ i=\overline{1,5}.$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв’язку відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю $\mathbf{n}(\alpha)=\{n_1(\alpha),n_2(\alpha)\}$ та дотичною $\boldsymbol{\tau}(\alpha)=\{\tau_1(\alpha),\tau_2(\alpha)\}$ можна отримати на основі знайдених дискретних значень фіктивних зусиль на зовнішніх контурах та контурі включень, використовуючи наступні формули

$$\begin{Bmatrix}u_n(\alpha,t)\\u_\tau(\alpha,t)\\w(\alpha,t)\\\gamma_n(\alpha,t)\\\gamma_\tau(\alpha,t)\end{Bmatrix}=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\left[\boldsymbol{\Omega}^{(U)}_{km}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\mathbf{T}^{(j)r}\sin(\omega t);$$

$$\begin{Bmatrix}N_n(\alpha,t)\\N_\tau(\alpha,t)\\Q_n(\alpha,t)\\M_n(\alpha,t)\\M_\tau(\alpha,t)\end{Bmatrix}=\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{r=1}^{S^{(j)}}\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{km}(\varepsilon)\left[\boldsymbol{\Omega}^{(P)}_{km}(\alpha)\right]\left[\mathbf{E}_{km}\left(\alpha^{(j)r}\right)\right]\mathbf{T}^{(j)r}\sin(\omega t).$$

Висновки. Використовуючи побудовані в роботі інтегральні рівняння, можна отримати розв’язки для довільних мішаних випадків крайових умов на зовнішній границі панелі, розглядаючи довільні комбінації амплітуд $w(\alpha), u_n(\alpha),\ \gamma_n(\alpha),\ u_\tau(\alpha),\ \gamma_\tau(\alpha),\ Q_n(\alpha),\ M_n(\alpha),$ $N_n(\alpha),\ M_\tau(\alpha),\ N_\tau(\alpha)$. Також дозволяються довільні різні мішані крайові умови на всіх складових зовнішньої границі. Тому в рамках поставленої задачі не обов’язково, щоб цілий зовнішній контур панелі був закріплений. Одна або декілька складових зовнішнього контуру можна розглядати якимось чином закріпленим. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення зовнішньої границі у випадку анізотропних матеріалів. На етапі числового розрахунку необхідним є дослідження збіжності й оптимального вибору значень параметрів апроксимації $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$ в рамках кожного конкретного випадку для отримання достатньо точних числових результатів. Запропонована в статті схема дає розв'язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових граничних випадків, отриманими іншими методами.

Література

1. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. / под. ред. А.Н. Гузя. − Т.1. Механика материалов. − К., 1982. − 368 с.; Т.2. Механика элементов конструкций − К., 1983. − 464 с.; Т.3. Прикладные исследования. − К., 1983. − 262 с
2. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. − К.: Наук. думка, 1986. − 172 с.
3. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко. − К.: Изд. дом «Академпериодика», 2006. − 472 с.
4. Шопа Т. До побудови розв'язку задачі про коливання ортотропної непологої циліндричної панелі з включенням довільної конфігурації / Т. Шопа // Машинознавство. − 2010. − №7 − С. 38-42.
5. Бурак, Я.Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок / Я.Й. Бурак, Ю.К. Рудавський, М.А. Сухорольський . − Львів: Інтелект-Захід, 2007. − 240 с.
6. Lighthill, J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / J. Lighthill. − Cambridge University Press, 1958. − 79 p.
7. Сухорольський, М.А. Послідовності і ряди / М.А. Сухорольський. − Львів:Растр-7, 2010. − 346 с.
8. Шопа Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації / Т. Шопа // Вісник ТНТУ. − 2012. − № 3. − С. 63-74.

Стаття надійшла до редакційної колегії 1.02.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Лисканичем М.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Максимуком О.В.*** *(м. Львів)*

VIBRATION OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED PANEL WITH A SET OF HINGED INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION

T. V. Shopa

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine;
79060, L'viv, Naukova Str., 3-b; e-mail:tetyana.sh@gmail.com

In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation, the solution of the problem on the steady state vibrations of the orthotropic doubly curved panel with the arbitrary number of simply supported rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. External boundary of the panel is of the arbitrary geometrical configuration. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered on the external boundary of the panel. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method and the sequential approach to the representation of the Green's function. The boundary value problem is reduced to the system of algebraic equations.

Key words: *orthotropic doubly curved panel, vibration, inclusions, natural frequencies, sequential approach, Green function, indirect boundary elements method, collocation method.*