Механіка

УДК 539.3

МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ПРИ МОНОГАРМОНІЧНОМУ ЗБУДЖЕННІ

В. В. Михайленко[1], С. В. Михайленко[2]
[1]Житомирський державний університет імені Івана Франка;
10008, м. Житомир, вул. Велика Бердичівська, 40;
e-mail: algeb.and.geom@gmail.com
[2]Київський національний торговельно-економічний університет;
02156, м. Київ, вул. Кіото, 19; e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

Пропонується метод побудови стаціонарних розв'язків рівнянь, що описують поведінку нелінійної системи при моногармонічному навантаженні.

Ключові слова: *нелінійна система, коефіцієнти Фур'є, моногармонічне навантаження, стаціонарні коливання,гармонічний баланс, нелінійний осцилятор.*

1. Ідея методу. Нехай деяка нелінійна система піддається моногармонічному збудженню

$$f_1(\tau) = f_1^{'}\cos\vartheta\tau - f_1^{''}\sin\vartheta\tau \tag{1}$$

з частотою ϑ і амплітудою навантаження $|f_1| = \sqrt{f_1^{'2} + f_1^{''2}}$.

Будемо вважати, що величини, які описують стаціонарну реакцію системи на таке збудження, можна розвинути у ряд Фур'є.

Нехай

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\varepsilon_n^{'}\cos n\vartheta\tau - \varepsilon_n^{''}\sin n\vartheta\tau] = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau} \tag{2}$$

– одна з таких величин.

Тут $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon_n^{'} + i\varepsilon_n^{''}, i = \sqrt{-1}, n \ge 1;\quad \tilde{\varepsilon}_{-n} = \overline{\tilde{\varepsilon}}_n; \tilde{\varepsilon}_0 = \varepsilon_0.$

Риска зверху означає комплексно-спряжену величину.

Очевидно, що коефіцієнти в (2) є деякими функціями величин $f_1^{'}, f_1^{''}$

$$\tilde{\varepsilon}_n = \tilde{F}_n(f_1^{'}, f_1^{''}), n = 0,1,2... \ . \tag{3}$$

Ці функції мають бути інваріантними відносно перетворення зсуву у часі, а саме, у разі заміни в (1) і (2) τ на $\tau+\Delta\tau$

$$f_1(\tau+\Delta\tau)=(f_1^{'}\cos\varphi-f_1^{''}\sin\varphi)\cos\vartheta\tau-(f_1^{'}\sin\varphi+f_1^{''}\cos\varphi)\sin\vartheta\tau,$$

$$\varepsilon(\tau+\Delta\tau)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\tilde{\varepsilon}_n e^{in\varphi}e^{in\vartheta\tau},$$

де $\varphi=\vartheta\Delta\tau$, і введення позначень

$$x=f_1^{'}\cos\varphi-f_1^{''}\sin\varphi,\ y=f_1^{'}\sin\varphi+f_1^{''}\cos\varphi$$

мають виконуватись рівності

$$\tilde{\varepsilon}_n e^{in\varphi}=\tilde{F}_n(x,y)\ \text{або}\ \tilde{\varepsilon}_n=\tilde{F}_n(x,y)e^{-in\varphi},\ n=0,1,2,\dots, \tag{4}$$

де $\tilde{F}_n$ – ті самі функції, що й у (3).

Шляхом виключення параметра φ з другого співвідношення (4) дістанемо рівняння

$$\frac{\partial\tilde{\varepsilon}_n}{\partial f_1^{'}}f_1^{''}-\frac{\partial\tilde{\varepsilon}_n}{\partial f_1^{''}}f_1^{'}+in\tilde{\varepsilon}_n=0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд

$$\tilde{\varepsilon}_n=\tilde{E}_n(|f_1|^2)\tilde{f}_1^{\,n},\ n=0,1,2,\dots, \tag{5}$$

де $\tilde{E}_0$ – довільна дійсна, а $\tilde{E}_1,\tilde{E}_{2,\dots}$ – довільні комплекснозначні функції квадрата амплітуди навантаження.

Представлення коефіцієнтів Фур'є у вигляді (5) дає можливість звести ту чи іншу нескінченну систему рівнянь гармонічного балансу відносно коефіцієнтів Фур'є до нескінченної системи рівнянь відносно функцій $\tilde{E}_n$ з (5), яка допускає розв'язки у вигляді рядів за парними степенями амплітуди навантаження. Це дає можливість будувати наближення стаціонарних розв'язків у вигляді аналітичних виразів.

Сказане демонструється нижче на прикладі нелінійного осцилятора з моногармонічним збудженням.

2. Рівняння нелінійного осцилятора. Розглянемо осцилятор типу стержня, один кінець якого закріплений, а інший з'єднаний з масою M. Нехай матеріал стержня описується моделлю Фойгта з нелінійною пружністю і лінійною в'язкістю. Маса збуджується силою

$$F=F^{'}\cos\omega t-F^{''}\sin\omega t\,.$$

Поведінка осцилятора описується системою рівнянь

$$M\frac{d^2u}{dt^2}=F-\sigma S,\quad \varepsilon=\frac{u}{l},\quad \sigma=E(\varepsilon+d_0\varepsilon^{\beta})+\eta\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Тут позначено: u – зміщення маси, σ – механічне напруження, S – площа поперечного перерізу стержня, ε – деформація стержня, l – його довжина, E – модуль Юнга, η – коефіцієнт в'язкості, d_0 – коефіцієнт нелінійності.

Нижче розглядається осцилятор з квадратичною $(\beta = 2)$ і кубічною $(\beta = 3)$ нелінійностями.

Увівши безрозмірні параметри

$$\vartheta = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 t, \quad \delta_0 = \frac{\eta\omega_0}{E}, \quad f_1^{'} = \frac{F^{'}}{SE}, \quad f_1^{''} = \frac{F^{''}}{SE},$$

де $\omega_0^2 = \dfrac{SE}{Ml}$, зводимо систему рівнянь до одного рівняння [1, 2]

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\tau^2} + \delta_0\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \varepsilon - (f_1^{'}\cos\vartheta\tau - f_1^{''}\sin\vartheta\tau) = -d_0\varepsilon^{\beta}. \qquad (6)$$

Періодичні розв'язки рівняння (6) шукатимемо у вигляді ряду Фур'є (2).

3. Осцилятор з квадратичною нелінійністю. Якщо підставити (2) в (6), взявши $\beta = 2$ і увівши позначення

$$\widetilde{\theta}_n = 1 - (n\vartheta)^2 + i\delta_0 n\vartheta, \widetilde{f}_1 = f_1^{'} + if_1^{''}, \qquad (7)$$

дістанемо

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{\theta}_n\widetilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau} - (\overline{\widetilde{f}}_1 e^{-i\vartheta\tau} + \widetilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau}) = -\frac{d_0}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\widetilde{\varepsilon}_k\widetilde{\varepsilon}_l e^{i(k+l)\vartheta\tau}. \qquad (8)$$

Помножимо ліву та праву частини (8) на $\dfrac{\vartheta}{2\pi}e^{-in\vartheta\tau}$ і зінтегруємо по τ від 0 до $\dfrac{2\pi}{\vartheta}$. Після необхідних викладок одержимо нескінчену систему нелінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\widetilde{\varepsilon}_n, n \ge 0$ з (2)

$$\widetilde{\theta}_n\widetilde{\varepsilon}_n - \widetilde{f}_n = -d_o[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{\varepsilon}_k\widetilde{\varepsilon}_{n-k} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\widetilde{\varepsilon}}_k\widetilde{\varepsilon}_{n+k}], \quad n = 0,1,2,..., \qquad (9)$$

де $\widetilde{f}_n = 0,$ якщо $n \ne 1.$

Якщо в (9) скористатись представленням (5), то після скорочення на $\widetilde{f}_1^{\,n}$ одержимо нескінченну систему рівнянь відносно величин $\widetilde{E}_n$

$$\widetilde{\theta}_n\,\widetilde{E}_n - \eta_n = -d_0[\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\widetilde{E}_k\widetilde{E}_{n+k} + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\widetilde{E}}_k\widetilde{E}_{n+k}\left|f_1\right|^{2k}], \quad n = 0,1,2,.... \qquad (10)$$

Тут $\eta_1 = 1$ і $\eta_n = 0$, якщо $n \ne 1.$

Розв'язки системи (10) шукаємо у вигляді

$$\widetilde{E}_n = \widetilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{\alpha}_n^{(j)}\left|f_1\right|^{2j}, n = 0,1,2,.... \qquad (11)$$

Якщо підставити (11) у (10) і зібрати коефіцієнти при однакових степенях амплітуди навантаження, то можна показати, що:

а) для величини $\widetilde{E}_0^{(0)}$ можливі два значення

$$\widetilde{E}_0^{(0)} = 0 \text{ та } \widetilde{E}_0^{(0)} = -\frac{2}{d_0}; \qquad (12)$$

б) кожна наступна величина $\widetilde{E}_n^{(0)}$ визначається попередніми за формулою

$$\widetilde{E}_n^{(0)} = \frac{1}{\widetilde{\theta}_n + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\eta_n - \frac{d_0}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \widetilde{E}_k^{(0)} \widetilde{E}_{n-k}^{(0)}), \quad n \geq 1 \qquad (13)$$

(тут і нижче знак суми $\sum$ береться до уваги лише в тому разі, коли число над цим знаком не менше числа, що стоїть під ним), так

$$\widetilde{E}_1^{(0)} = \frac{1}{\widetilde{\theta}_1 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}}, \quad \widetilde{E}_2^{(0)} = -\frac{d_0 (\widetilde{E}_1^{(0)})^2}{2(\widetilde{\theta}_2 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)})}, \quad \widetilde{E}_3^{(0)} = -\frac{d_0 \widetilde{E}_1^{(0)} \widetilde{E}_2^{(0)}}{\widetilde{\theta}_3 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} \quad (14) \text{ і т.д.}$$

в) коефіцієнти $\widetilde{\alpha}_n^{(j)}$ знаходяться послідовно за формулою

$$\widetilde{\alpha}_n^{(j)} = -\frac{d_0}{\widetilde{\theta}_n + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\alpha}_k^{(j)} \widetilde{E}_{n-k}^{(0)} + \overline{\widetilde{E}}_j^{(0)} \widetilde{E}_{n+j}^{(0)} + \sum_{i=1}^{j-1} [\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\alpha}_k^{(j-i)} \widetilde{\alpha}_{n-k}^{(i)} +$$

$$+ \overline{\widetilde{\alpha}}_i^{(j-i)} \widetilde{E}_{n+i}^{(0)} + \widetilde{\alpha}_{n+1}^{(j-i)} \overline{\widetilde{E}}_i^{(0)}] + \sum_{i=1}^{j-2} \sum_{k=1}^{j-i-1} \overline{\widetilde{\alpha}}_k^{(j-i-k)} \widetilde{\alpha}_{n+k}^{(i)}), \quad n \geq 0, j \geq 1 \qquad .(15)$$

у порядку збільшення j, так

$$\widetilde{\alpha}_n^{(1)} = -\frac{d_0}{\widetilde{\theta}_n + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{\alpha}_k^{(1)} \widetilde{E}_{n-k}^{(0)} + \overline{\widetilde{E}}_1^{(0)} \widetilde{E}_{n+1}^{(0)}), \quad n = 0,1,2,...,.$$

зокрема

$$\widetilde{\alpha}_0^{(1)} = -\frac{d_0 \left| \widetilde{E}_1^{(0)} \right|^2}{1 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}}, \quad \widetilde{\alpha}_1^{(1)} = -\frac{d_0}{\widetilde{\theta}_1 + d_0 \widetilde{E}_0^{(0)}} (\widetilde{\alpha}_0^{(1)} \widetilde{E}_1^{(0)} + \overline{\widetilde{E}}_1^{(0)} \widetilde{E}_2^{(0)}) \quad (16) \text{ і т.д.}$$

Коефіцієнти $\widetilde{E}_n^{(0)}, \widetilde{\alpha}_n^{(j)}$ з (11) визначаються формулами (13), (15) однозначно. Фактично можна будувати два розв'язки системи (10) залежно від того, якого значення (12) набуває величина $\widetilde{E}_0^{(0)}$.

Назвемо $\widetilde{E}_n^{(0)}$ нульовим, а

$$\widetilde{E}_n^{(k)} = \widetilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\alpha}_n^{(j)} \left| f_1 \right|^{2j}, n = 0,1,2,... \qquad (17)$$

k-им наближенням розв'язку системи (10), $k = 0,1,2, \ldots$.

Якщо скористатись (17) у виразах для комплексних амплітуд (5), а потім у сумі (2), яку перепишемо у вигляді

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} + \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau}, \qquad (18)$$

де Re – дійсна частина, то немає сенсу утримувати в цій сумі доданки, абсолютні величини яких містять як множники $\left| f_1 \right|^{2k+2}$ і вищі степені амплітуди навантаження.

У результаті з умови $2j + n \leq 2k + 1$ одержимо

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\widetilde{E}_0^{(0)} + \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\alpha}_0^{(j)} \left| f_1 \right|^{2j}) + \mathrm{Re} \{ \sum_{n=1}^{2k+1} (\widetilde{E}_n^{(0)} + \sum_{j=1}^{[k - \frac{n-1}{2}]} \widetilde{\alpha}_n^{(j)} \left| f_1 \right|^{2j}) \widetilde{f}_1^{\,n} e^{in\vartheta\tau} \}, \qquad (19)$$

де $[k-\frac{n-1}{2}]$ – ціла частина.

Назвемо (19) k-им наближенням періодичного (стаціонарного) розв'язку рівняння (6), де $\beta=2$.

Згідно з (12) таких розв'язків два.

Як приклад, запишемо формулу 1-го наближення для випадку $\widetilde{E}_0^{(0)}=0$.

Згідно з (14), (16)

$$\widetilde{E}_1^{(0)}=\frac{1}{\widetilde{\theta}_1},\quad \widetilde{E}_2^{(0)}=-\frac{d_0}{2\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,2}},\quad \widetilde{E}_3^{(0)}=\frac{d_0^{\,2}}{2\widetilde{\theta}_3\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,3}},$$
$$\widetilde{\alpha}_0^{(1)}=-\frac{d_0}{\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2},\quad \widetilde{\alpha}_1^{(1)}=\frac{d_0^2}{\widetilde{\theta}_1^{\,2}\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2}(1+\frac{1}{2\widetilde{\theta}_2}). \tag{20}$$

Якщо в (19) взяти $k=1$ і скористатись виразами (20), будемо мати

$$\varepsilon=-\frac{d_0}{2\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2}\left|f_1\right|^2+\mathrm{Re}\{(\frac{1}{\widetilde{\theta}_1}+\frac{d_0^2\left|f_1\right|^2}{\widetilde{\theta}_1^{\,2}\left|\widetilde{\theta}_1\right|^2}(1+\frac{1}{2\widetilde{\theta}_2}))\widetilde{f}_1e^{i\vartheta\tau}-$$
$$-\frac{d_0}{2\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,2}}\widetilde{f}_1^{\,2}e^{i2\vartheta\tau}+\frac{d_0^{\,2}}{2\widetilde{\theta}_3\widetilde{\theta}_2\widetilde{\theta}_1^{\,3}}\widetilde{f}_1^{\,3}e^{i3\vartheta\tau}\}$$

На закінчення відзначимо, що з кожним наступним наближенням стаціонарного розв'язку уточнюються комплексні амплітуди гармонік попереднього наближення і з'являються дві нові гармоніки.

4. Осцилятор з кубічною нелінійністю. Якщо підставити (2) в рівняння (6), де слід покласти $\beta=3$ і врахувати позначення (7), дістанемо:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widetilde{\theta}_n\widetilde{\varepsilon}_n e^{in\vartheta\tau}-(\bar{\widetilde{f}}_1e^{-i\vartheta\tau}+\widetilde{f}_1e^{i\vartheta\tau})=-\frac{d_0}{4}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\widetilde{\varepsilon}_k\widetilde{\varepsilon}_l\widetilde{\varepsilon}_m e^{i(k+l+m)\vartheta\tau}.$$

Проведемо описану вище процедуру гармонічного балансу.

Після необхідних викладок, пов'язаних з усередненням потрійної суми, одержимо нескінчену систему нелінійних рівнянь відносно коефіцієнтів $\widetilde{\varepsilon}_n, n\geq 0$ з (2)

$$\widetilde{\theta}_n\widetilde{\varepsilon}_n-\widetilde{f}_n=-\frac{d_o}{4}[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\widetilde{\varepsilon}_k\widetilde{\varepsilon}_l\widetilde{\varepsilon}_{n-k-l}+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n+k}\bar{\widetilde{\varepsilon}}_k\widetilde{\varepsilon}_l\widetilde{\varepsilon}_{n+k-l}+$$
$$+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\bar{\widetilde{\varepsilon}}_k\bar{\widetilde{\varepsilon}}_l\widetilde{\varepsilon}_{n+k+l}],\ n=0,1,2,..., \tag{21}$$

де $\widetilde{f}_n=0$, якщо $n\neq 1$.

Якщо скористатися зображенням (5), то після скорочення на $\widetilde{f}_1^{\,n}$ одержимо нескінченну систему рівнянь відносно величин $\widetilde{E}_n$

$$\widetilde{\theta}_n\,\widetilde{E}_n-\eta_n=-\frac{d_0}{4}[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\widetilde{E}_k\widetilde{E}_l\widetilde{E}_{n-k-l}+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n+k}\overline{\widetilde{E}}_k\widetilde{E}_l\widetilde{E}_{n+k-l}\left|f_1\right|^{2k}+$$
$$+3\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\overline{\widetilde{E}}_k\overline{\widetilde{E}}_l\widetilde{E}_{n+k+l}\left|f_1\right|^{2(k+l)}],\quad n=0,1,2,.... \tag{22}$$

Тут $\eta_1=1$ і $\eta_n=0$, якщо $n\neq1$.

Якщо розв'язки системи (22) шукати у вигляді (11), то як і вище, можна знайти загальні формули для обчислення коефіцієнтів $\widetilde{E}_n^{(0)}$, $\widetilde{\alpha}_n^{(j)}$. Проте формула для $\widetilde{\alpha}_n^{(j)}$ виходить громіздкою.

Оскільки, зазвичай, доводиться обмежуватись скінченними сумами типу (17), застосуємо підхід, який дає ті самі результати.

Знехтуємо в правій частині (22) тими доданками, які містять, як множники, степені амплітуди навантаження. Розв'язок $\widetilde{E}_n^{(0)}, n\geq0$ системи, що отримується, назвемо нульовим наближенням розв'язку системи (22).

Отже, для нульового наближення

$$\widetilde{\theta}_n\,\widetilde{E}_n^{(0)}-\eta_n=-\frac{d_0}{4}\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\widetilde{E}_k^{(0)}\widetilde{E}_l^{(0)}\widetilde{E}_{n-k-l}^{(0)},\quad n=0,1,2,.... \tag{23}$$

Кубічне рівняння, яке дістаємо з (23) у разі $n=0$, має один дійсний розв'язок

$$\widetilde{E}_0^{(0)}=0 \tag{24}$$

при $d_0>0$ і три дійсних розв'язки

$$\widetilde{E}_0^{(0)}=0,\quad \widetilde{E}_0^{(0)}=\frac{2}{\sqrt{|d_0|}},\quad \widetilde{E}_0^{(0)}=-\frac{2}{\sqrt{|d_0|}} \tag{25}$$

при $d_0<0$.

Інші величини нульового наближення однозначно визначаються загальною формулою

$$\widetilde{E}_n^{(0)}=\frac{1}{\widetilde{\theta}_n+\frac{3}{4}d_0(\widetilde{E}_0^{(0)})^2}(\eta_n-\frac{d_0}{4}[\sum_{k=1}^{n-1}\widetilde{E}_0^{(0)}\widetilde{E}_k^{(0)}\widetilde{E}_{n-k}^{(0)}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-k}\widetilde{E}_k^{(0)}\widetilde{E}_l^{(0)}\widetilde{E}_{n-k-l}^{(0)}]),\quad n\geq1. \tag{26}$$

Систему рівнянь

$$\widetilde{\theta}_n\,\widetilde{E}_n-\eta_n=-\frac{d_0}{4}[\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k}\widetilde{E}_k\widetilde{E}_l\widetilde{E}_{n-k-l}+3\sum_{l=0}^{n+1}\overline{\widetilde{E}}_1\widetilde{E}_l\widetilde{E}_{n+1-l}\left|f_1\right|^2],\, n=0,1,2,...., \tag{27}$$

яку дістанемо, якщо знехтувати в правій частині (22) доданками, що містять як множники $|f_1|^4$ і вищі степені амплітуди навантаження, назвемо системою першого наближення.

Якщо розв'язок системи (27) шукати у вигляді

$$\widetilde{E}_n = \widetilde{E}_n^{(0)} + \widetilde{\alpha}_n^{(1)} \left| f_1 \right|^2, n = 0,1,2,\ldots, \tag{28}$$

то після підстановки (28) у (27), урахування (23) і нехтування степенями $\left| f_1 \right|^m, m \geq 4$ дістанемо

$$\widetilde{\theta}_n \, \widetilde{\alpha}_n^{(1)} = -\frac{3}{4} d_0 [\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \widetilde{\alpha}_k^{(1)} \widetilde{E}_l^{(0)} \widetilde{E}_{n-k-l}^{(0)} + \sum_{l=0}^{n+1} \overline{\widetilde{E}}_1^{(0)} \widetilde{E}_l^{(0)} \widetilde{E}_{n+1-l}^{(0)}], n = 0,1,2,\ldots \tag{29}$$

Із (29) випливає, що коефіцієнти $\widetilde{\alpha}_n^{(1)}$ однозначно визначаються формулою

$$\widetilde{\alpha}_n^{(1)} = -\frac{\frac{3}{4} d_0}{\widetilde{\theta}_n + \frac{3}{4} d_0 (\widetilde{E}_0^{(0)})^2} \cdot [\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-k} \widetilde{\alpha}_k^{(1)} \widetilde{E}_l^{(0)} \widetilde{E}_{n-k-l}^{(0)} + \\ + \sum_{l=0}^{n+1} \overline{\widetilde{E}}_1^{(0)} \widetilde{E}_l^{(0)} \widetilde{E}_{n+1-l}^{(0)}], n = 0,1,2,\ldots. \tag{30}$$

Назвемо (28) першим наближенням розв’язку системи (22).

Систему другого наближення дістанемо, якщо знехтуємо у правій частині (22) доданками, що містять як множники $\left| f_1 \right|^6$ і вищі степені амплітуди навантаження.

Якщо розв’язок системи другого наближення шукати у вигляді

$$\widetilde{E}_n = \widetilde{E}_n^{(0)} + \widetilde{\alpha}_n^{(1)} \left| f_1 \right|^2 + \widetilde{\alpha}_n^{(2)} \left| f_1 \right|^4, n = 0,1,2,\ldots, \tag{31}$$

то після підстановки (31) у цю систему, урахування (23), (29) і нехтування степенями $\left| f_1 \right|^m, m \geq 6$ одержимо загальну формулу, яка однозначно визначає коефіцієнти $\widetilde{\alpha}_n^{(2)}$.

Назвемо (31) другим наближенням розв’язку системи (22).

Аналогічно, за попередніми наближеннями будується будь-яке наступне наближення розв’язку системи (22), яке має вигляд (17).

Якщо, як і раніше, скористатися (17) у виразах для комплексних амплітуд (5), а потім у сумі (2), яку записати у вигляді (18), дістанемо співвідношення (19), яке назвемо k-им наближенням періодичного (стаціонарного) розв’язку рівняння (6), де $\beta = 3$. Згідно з (24), (25) у разі $d_0 > 0$ таких розв’язків один, а в разі $d_0 < 0$ – три.

Для 1-го наближення

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\widetilde{E}_0^{(0)} + \widetilde{\alpha}_0^{(1)} \left| f_1 \right|^2) + \operatorname{Re} \{ (\widetilde{E}_1^{(0)} + \widetilde{\alpha}_1^{(1)} \left| f_1 \right|^2) \widetilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau} + \\ + \widetilde{E}_2^{(0)} \widetilde{f}_1^2 e^{i2\vartheta\tau} + \widetilde{E}_3^{(0)} \widetilde{f}_1^3 e^{i3\vartheta\tau} \}. \tag{32}$$

Якщо $\widetilde{E}_0^{(0)} = 0$, то згідно з (26), (30)

$$\widetilde{E}_1^{(0)} = \frac{1}{\widetilde{\theta}_1}, \quad \widetilde{E}_2^{(0)} = 0, \quad \widetilde{E}_3^{(0)} = \frac{d_0}{4 \widetilde{\theta}_3 \widetilde{\theta}_1^3}, \quad \widetilde{\alpha}_0^{(1)} = 0, \widetilde{\alpha}_1^{(1)} = -\frac{3 d_0}{4 \widetilde{\theta}_1^2 \left| \widetilde{\theta}_1 \right|^2}$$

і формула 1-го наближення набуває вигляду

$$\varepsilon = \mathrm{Re}\{(\frac{1}{\widetilde{\theta}_1} - \frac{3d_0|f_1|^2}{4\widetilde{\theta}_1^2|\widetilde{\theta}_1|^2})\widetilde{f}_1 e^{i\vartheta\tau} + \frac{d_0}{4\widetilde{\theta}_3\widetilde{\theta}_1^3}\widetilde{f}_1^3 e^{i3\vartheta\tau}\}.$$

З кожним наступним наближенням розв’язку рівняння (6), де $\beta = 3$, уточняються комплексні амплітуди гармонік попереднього наближення шляхом врахування вищих степенів амплітуди навантаження, і з’являється нова непарна гармоніка.

Відсутність парних гармонік у 1-му і всіх наступних наближеннях характерна лише для випадку $\widetilde{E}_0^{(0)} = 0$.

У разі ненульових значень $\widetilde{E}_0^{(0)}$ (див.(25)) всі наближення містять як непарні, так і парні гармоніки, зокрема, нульову гармоніку.

5. Висновки. Запропоновано метод знаходження стаціонарних розв’язків рівнянь, що описують поведінку нелінійної системи при моногармонічному навантаженні.

Метод ґрунтується на зображеннях комплексних коефіцієнтів Фур’є як функцій складових комплексної амплітуди навантаження. Загальний вигляд цих функцій з’ясовується з використанням умови їхньої інваріантності відносно перетворення зсуву у часі. У результаті кожен комплексний коефіцієнт Фур’є зображується як добуток деякої комплекснозначної функції квадрата амплітуди навантаження на відповідний степінь комплексної амплітуди навантаження. Таке представлення коефіцієнтів Фур’є дає можливість звести нескінченну систему рівнянь гармонічного балансу відносно коефіцієнтів Фур’є до нескінченної системи рівнянь відносно невідомих функцій квадрата амплітуди навантаження. Ця система допускає розв’язки у вигляді рядів за парними степенями амплітуди навантаження.

Як приклад, метод демонструється на побудові наближень стаціонарних розв’язків осцилятора з квадратичною та кубічною нелінійностями.

Література

1. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Карнаухов В.Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / В.Г.Карнаухов, И.К.Сенченков, Б.П.Гуменюк. – К.: Наукова думка, 1985. – 288 с

Стаття надійшла до редакційної колегії 5.12.2017 р.
*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,*
*д.т.н., професором **Олійником А.П.***

RESEARCH METHOD OF STATIONARY VIBRATIONS FOR NONLINEAR SYSTEMS WITH MONOHARMONIC PERTURBATION

V. V. Mikhailenko[1], S. V. Mikhailenko[2]
[1]Ivan Franko State University of Zhytomyr;
10008, Zhytomyr, Velyka Berdychivska Str., 40;
e-mail: algeb.and.geom@gmail.com
[2]Kyiv national university of trade and economics;
02156, Kyiv, Kyoto Str., 19; e-mail: s.mikhaylenko@ukr.net

Stationary solutions of equations that describe the behavior of nonlinear system in a monoharmonic load are studied.

Key words: *nonlinear system, Fourier coefficients, monoharmonic load, stationary vibrations, harmonic balance, nonlinear oscillator.*