

## ФРИКЦІЙНА ВЗАЄМОДІЯ ПРОРІЗНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ПРУЖНИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ ПРИ НЕОДНОРІДНОМУ ТЕРТІ

**О. О. Бедзір, В. М. Шоп**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б;  
e-mail: olbedzir@gmail.com*

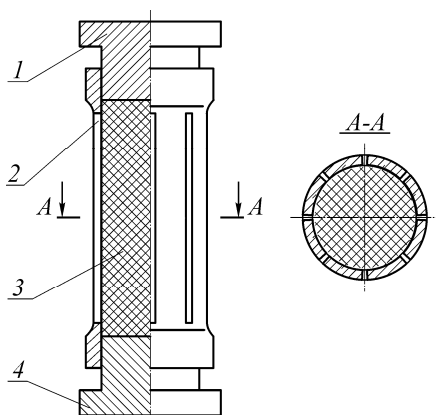
*Сформульовано постановку змішаної контактної задачі фрикційної взаємодії деформівного заповнювача з прорізною циліндричною оболонкою з врахуванням неоднорідного тертя. З використанням одновимірних моделей оболонки і заповнювача отримано інтегральне рівняння для знаходження контактних напружень. На основі чисельного розв'язку досліджено вплив геометричних розмірів, кількості розрізів в оболонці та трибологічних властивостей взаємодіючих тіл на жорсткість та міцність системи.*

**Ключові слова:** *оболонкова пружина, прорізна циліндрична оболонка, контактна задача, неоднорідне тертя.*

**Вступ.** Тонкостінні оболонки широко використовуються як елементи конструкцій у різних галузях машинобудування та будівництва. Через це невпинно здійснюються наукові дослідження, спрямовані на створення методик розрахунку, вивчення особливостей деформування з метою оптимізації оболонкових конструкцій. Тонкостінна циліндрична оболонка і контактуючий з її внутрішньою поверхнею товстостінний масив, який виготовлений з іншого матеріалу є складовою частиною оболонкових пружних елементів. Зазвичай стрижнем таких досліджень є створення розрахункових моделей контактуючих тіл та їх взаємодії. При механіко-математичному моделюванні поведінки оболонкових віброзахисних пристроїв [1, 2] (деформівних оболонкових систем з сухим тертям) в умовах навантаження (взагалі кажучи, немонотонного) виникає клас конструктивно нелінійних неконсервативних контактних задач про фрикційну взаємодію тонких оболонок з деформівним заповнювачем. Бачиться актуальним розвиток методики дослідження напружено-деформованого стану, податливості та демпфувальної здатності систем циліндричних оболонок з деформівним заповнювачем, які є моделями пружних елементів оболонкових віброзахисних пристроїв.

Серед оболонкових пружин можна виділити групу сформовану на основі оболонок з поздовжніми розрізами (рис. 1). Для регулювання пружних характеристик та демпфувальної здатності пружних елементів

пропонується використання неоднорідного заповнювача. **Метою** даної роботи є визначення напружено-деформованого стану елементів контактної системи та її жорсткості для конструкції з кусково-неоднорідним



1, 4 – поршні; 2 – оболонка з прорізами; 3 – пружний заповнювач

Рис. 1. Оболонкова пружина з прорізами (базова конструкція)

тертям на поверхні спряження прорізна оболонка – заповнювач. Різного значення коефіцієнта тертя можна отримати, наприклад, відповідною механічною обробкою окремих ділянок панелей прорізної оболонки, використанням заповнювача з неоднорідними трибологічними властивостями.

**Аналіз сучасних досліджень і публікацій.** Загальні підходи до формулювання та розв'язування таких задач, розроблені для спрощених одновимірних моделей, представлені в монографії [3]. Постановки, методи і розв'язки деяких

задач цього класу подано в роботах [4 – 6]. В попередніх дослідженнях не розглянуто моделювання роботи оболонкового пружного елемента при використанні неоднорідного заповнювача. Взаємодія оболонки і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи описується співвідношеннями одностороннього нормального контакту з однаковим коефіцієнтом тертя по всій поверхні спряження. Ціллю даної роботи є змодельовати роботу прорізної оболонкової пружного елемента з врахуванням сухого неоднорідного тертя.

**Постановка задачі.** Розглянемо пружний циліндр радіуса  $R$  та довжини  $2l$ , який заповнює прорізну циліндричну оболонку завтовшки  $h$ . На торці пружного заповнювача через абсолютно жорсткі поршні передається зовнішнє навантаження  $F$ . Тертям між заповнювачем і поршнями нехтуємо. Характер контактної взаємодії заповнювача та прорізної оболонки визначається законом сухого неоднорідного тертя. Напружено-деформований стан прорізної пружного елемента досліджуємо в циліндричній системі координат  $Or\theta z$ , зображеній на рис. 2. Поверхня спряження заповнювача та прорізної оболонки має ділянки з різними значеннями коефіцієнта тертя між контактуючими тілами.

Приймаючи число розрізів оболонки достатньо великим, вважаємо, що заповнювач перебуває в умовах осесиметричної деформації. Для моделювання деформованого заповнювача використовуємо співвідношення, запропоновані в роботах [3, 4], згідно яких напружено-деформо-

ваний стан пружного циліндра визначається через контактні напруження на його бічній поверхні. Рівняння, що описують пружний стан деформівного заповнювача, отримані в припущенні, що нормальні напруження  $\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z$  та осьові переміщення  $u_z$  розподілені рівномірно, а дотичні напруження  $\tau_{rz}$  і радіальні переміщення  $u_r$  – лінійно по поперечному перерізу.

Співвідношення для заповнювача в безрозмірній системі координат мають вигляд:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma, \quad \tau_{r\zeta} = \frac{\tau r}{R}, \quad u_\zeta = u, \quad u_r = \frac{wr}{R}. \quad (1)$$

Рівняння закону Гука, усереднені по площі поперечного перерізу, є такими

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} = \frac{1}{E} [(1-\nu)\sigma - \nu\sigma_\zeta], \quad (2)$$

$$\varepsilon_\zeta = \frac{1}{l} \frac{du}{d\zeta} = \frac{1}{E} [\sigma_\zeta - 2\nu\sigma]. \quad (3)$$

Усереднене рівняння рівноваги має вигляд

$$\frac{d\sigma_\zeta}{d\zeta} + \frac{2\tau}{R} = 0. \quad (4)$$

Тут  $\sigma, \tau$  – нормальне і дотичне контактні напруження;  $u, w$  – осьове та радіальне переміщення на контактній поверхні  $r=R$ ;  $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \varepsilon_{rz}$  – деформації в заповнювачі;  $\zeta = z/l$  – безрозмірна осьова координата;  $E, \nu$  – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу заповнювача.

Модельні співвідношення (1) – (4) можна отримати операторним

методом, а також суперпозицією розв'язків задач про радіальний і осьовий стиск суцільного циліндра, що доводить достатню адекватність побудованої моделі заповнювача на заданому рівні строгості.

Для моделювання прорізної оболонки використовуємо одновимірну модель. Приймаємо, що прорізна оболонка складається з панелей, які зазнають плоского згину в радіальних площинах. Запишемо рівняння пружної лінії панелі, розглядаючи її як стержень з

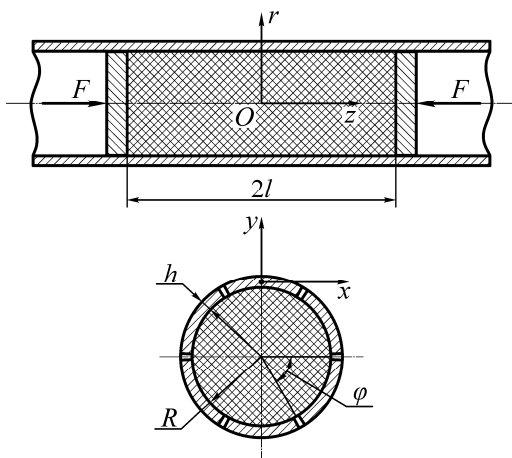


Рис. 2 . Контактна система

дугоподібною формою поперечного перерізу:

$$\frac{E_0 I_x}{l^4} \frac{d^4 w_0}{d\zeta^4} = -\sigma b, \zeta \in [-1; 1], \quad (5)$$

де  $b = 2R \sin(\varphi/2)$  – ширина панелі;

$E_0 I_x = 0,5 E_0 h R^3 (\varphi + \sin(\varphi) - 8 \sin^2(\varphi/2) / \varphi)$  – жорсткість панелі на згин;

$\varphi = 2\pi/N$ ,  $N$  – число розрізів;  $E_0$  – модуль Юнга матеріалу оболонки.

Фрикційну взаємодію прорізної оболонки і заповнювача при монотонному зовнішньому навантаженні системи моделюємо співвідношеннями одностороннього нормального контакту

$$[w] \equiv w_0 - w = 0, \sigma < 0, \zeta \in [-1; 1]. \quad (6)$$

Закон сухого тертя для пружної системи матиме вигляд

$$\tau(\zeta) = -f_i \sigma \operatorname{sgn} \zeta, \quad \zeta \in W_i, \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

де  $f_i$  – коефіцієнти тертя відповідно на поверхнях  $W_i$ ;  $W_1 \in [-1, -t] \cup [t, 1]$ ,  $W_2 = (-t, t)$  – поверхні спряження контактних тіл з різними коефіцієнтами тертя;  $t \in [0, 1]$  – координата точки розділу ділянок  $W_i$ .

На торцях пружного заповнювача (під поршнями) виконуються умови:

$$\sigma_\zeta(\pm 1) = -P \equiv -\frac{F}{\pi R^2}. \quad (8)$$

Зінтегрувавши рівняння рівноваги (4) з урахуванням крайових умов (8), отримуємо вираз для знаходження нормального осьового напруження у заповнювачі через невідомі контактні напруження

$$\sigma_\zeta(\zeta) = -P + \frac{l}{R} \sum_{i=1}^2 \left( \int_{W_i} \tau_i(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right). \quad (9)$$

Із співвідношення (2) з урахуванням (9) знаходимо інтегральне представлення для радіальних переміщень контактуючої поверхні заповнювача через невідомі  $\sigma$ ,  $\tau$

$$w(\zeta) = \frac{R}{E} \left\{ (1 - \nu) \sigma(\zeta) - \nu \left[ -P - \frac{l}{R} \sum_{i=1}^2 \left( \int_{W_i} \tau_i(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) \right] \right\}. \quad (10)$$

Вираз для визначення осьової деформації заповнювача (3) через невідомі контактні напруження з врахуванням (9) буде таким

$$\varepsilon_\zeta(\zeta) = \frac{1}{E} \left( -P - 2\nu\sigma + \frac{l}{R} \sum_{i=1}^2 \left( \int_{W_i} \tau_i(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) \right). \quad (11)$$

Перейдемо до визначення радіального переміщення панелей прорізної оболонки. Розв'язок диференційного рівняння (5) знаходимо у вигляді:

$$w_0(\zeta) = C_0 + C_1\zeta + C_2\zeta^2 + C_3\zeta^3 + \frac{1}{12}k^4 \int_{-1}^1 |\xi - \zeta|^3 \sigma(\xi) d\xi, \quad (12)$$

де  $k^4 = -\frac{l^4 b}{E_o I_x}$ .

Сталі інтегрування  $C_0, C_1, C_2, C_3$  визначаємо з крайових умов, які залежать від конструктивних особливостей прорізної оболонки. Вважаємо, що панелі жорстко защемлені на краях (рис. 3).

$$w_0(\pm 1) = 0, \quad \left. \frac{dw_0}{d\zeta} \right|_{\zeta=\pm 1} = 0. \quad (13)$$

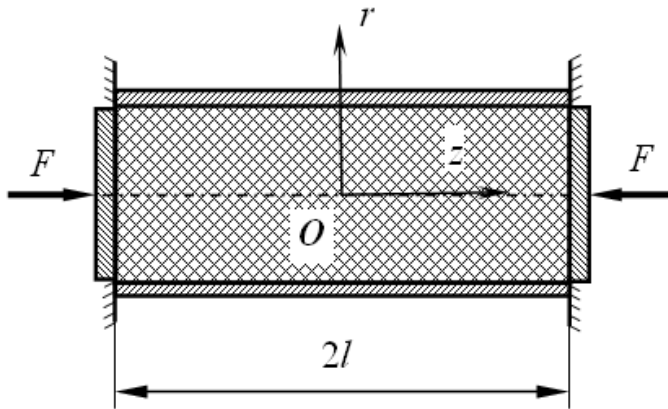


Рис. 3. Панель жорстко защемлена на краях

В результаті підстановки (12) в співвідношення (13) одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування, розв'язком якої є

$$C_0 = k^4 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{24} \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad C_1 = k^4 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8}\xi^3 + \frac{1}{8}\xi \right) \sigma(\xi) d\xi,$$

$$C_2 = k^4 \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8} \right) \sigma(\xi) d\xi, \quad C_3 = k^4 \int_{-1}^1 \left( -\frac{1}{24}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi \right) \sigma(\xi) d\xi.$$

Таким чином, вираз для знаходження радіального переміщення оболонки (12) з врахуванням знайдених констант буде:

$$w_0(\zeta) = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1], \quad (14)$$

де  $G(\zeta, \xi)$  – функція Гріна крайової задачі (5), (13) і визначається наступним співвідношенням

$$G(\zeta, \xi) = \frac{1}{24} - \frac{\xi^2}{8} + \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^3}{8} \right) \zeta - \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^2}{8} \right) \zeta^2 + \left( \frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) \zeta^3 + \frac{1}{12} (\xi - \zeta)^3 \operatorname{sgn}(\xi - \zeta). \quad (15)$$

Прирівнюючи прогин панелей прорізної оболонки (14) згідно умов одностороннього контакту (6) з радіальними переміщеннями контактної поверхні заповнювача (10), одержимо

$$\frac{R}{E} \left\{ (1-\nu)\sigma(\zeta) - \nu \left[ -P - \frac{l}{R} \sum_{i=1}^2 \left( \int_{W_i} \tau_i(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi \right) \right] \right\} = -k^4 \int_{-1}^1 G(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Останнє співвідношення зводиться до інтегрального рівняння:

$$\sigma(\zeta) + \sum_{i=1}^2 \left[ \int_{W_i} K_i(\xi, \zeta) \sigma(\xi) d\xi \right] = -\frac{\nu}{1-\nu} P, \quad \zeta \in [-1; 1]. \quad (17)$$

Ядра інтегрального рівняння визначаються формулами

$$K_i(\xi, \zeta) = -\frac{\nu}{1-\nu} l f_i \operatorname{sgn} \zeta \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) + 4\mu^4 G(\xi, \zeta), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

де  $4\mu^4 = \frac{1}{1-\nu} \frac{l^4 b}{R I_x} \frac{E}{E_0}$ .

Таким чином, задачу про фрикційну взаємодію прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем зведено до інтегрального рівняння (17) для визначення невідомого контактного напруження. Розв'язок інтегрального рівняння знаходимо методом механічних квадратів, використовуючи формулу трапецій з рівномірною сіткою вузлів. При розв'язуванні використано метод Гауса з виділенням головного елемента. В результаті розв'язку одержано значення контактного напруження  $\sigma_i = \sigma(\zeta_i)$  у вузлових точках.

Характеристики механічної системи та напружено-деформований стан взаємодіючих тіл знаходимо через контактні напруження.

Використовуючи диференційні залежності

$$\theta(\zeta) = \frac{1}{l} \frac{dw}{d\zeta}, \quad M(\zeta) = -\frac{E_0 I_x}{l^2} \frac{d^2 w}{d\zeta^2}, \quad Q(\zeta) = -\frac{E_0 I_x}{l^3} \frac{d^3 w}{d\zeta^3}, \quad (19)$$

що існують між прогином, кутом повороту поперечного перерізу та внутрішніми силовими факторами, які діють у поперечних перерізах прорізної оболонки, визначаємо необхідні характеристики напружено-деформованого стану контактної системи. У співвідношеннях (19)  $M$ ,  $Q$  – відповідно згинний момент та перерізуюча сила,  $\theta$  – кут повороту поперечного перерізу.

Нормальні осьові напруження в панелях визначаються за формулою

$$\sigma_{\zeta o}(\zeta) = \frac{M(\zeta)}{W_x}, \quad (20)$$

де  $W_x = \frac{hR^2}{2} \left( \varphi + \sin \varphi - \frac{8 \sin^2(\varphi/2)}{\varphi} \right) \frac{1}{1 - \frac{2 \sin(\varphi/2)}{\varphi}}$  – осьовий момент

опору панелі.

З врахуванням (19) співвідношення (20) набуває вигляду

$$\sigma_{\zeta o} = -4\mu^4(1-\nu) \frac{E_0}{E} \frac{RI_x}{l^3 W_x} \int_{-1}^1 G_2(\zeta, \xi) \sigma(\xi) d\xi, \quad \zeta \in [-1; 1],$$

де

$$G_2(\zeta, \xi) = -2 \left( \frac{\xi}{8} + \frac{\xi^2}{8} \right) + 6 \left( \frac{\xi}{8} - \frac{\xi^3}{24} \right) \zeta + \frac{1}{2} (\xi - \zeta) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta).$$

Осьові переміщення заповнювача одержимо, інтегруючи модельні співвідношення (3) з врахуванням симетрії системи

$$u(\zeta) = -0.5 \int_{-1}^1 \varepsilon_{\zeta}(\xi) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi, \quad \zeta \in [-1, 1].$$

Враховуючи інтегральне представлення осьової деформації (11), вираз для знаходження осьового переміщення перерізів заповнювача матиме вигляд:

$$u(\zeta) = -0.5 \frac{l}{E} \left[ \int_{W_i} (P + 2\nu\sigma(\xi)) \operatorname{sgn}(\xi - \zeta) d\xi + 2l \sum_{i=1}^2 \left( \int_{W_i} f_i \sigma(\xi) \operatorname{sgn} \xi |\xi - \zeta| d\xi \right) \right]. \quad (21)$$

Жорсткість контактної системи визначається величиною осьового переміщення поршнів під дією заданої сили  $F$ . Її значення одержимо, підставивши у формулі (21)  $\zeta = -1$ , або  $\zeta = 1$ .

При розв'язуванні розглянуто контактну систему з такими параметрами:  $h/R = 0,1$ ;  $E/E_0 = 0,0001$ ;  $\nu = 0,499$ ;  $l/R = 4,0$ ;  $N = 6$  та різними значеннями коефіцієнта тертя. Одержані результати представлені в табл. 1.

### Висновки

Сформульовано постановку змішаної контактної задачі фрикційної взаємодії деформівного заповнювача з прорізною циліндричною оболонкою з врахуванням неоднорідного тертя. Згідно проведених розрахунків, в конструкції з кусково-неоднорідним тертям між заповнювачем та оболонкою розширюється зона відлипання між контактуючими тілами та зростає осьове переміщення торців заповнювача в порівнянні з пружним елементом з однаковим коефіцієнтом тертя на поверхні спряження. Використання кусково-неоднорідного заповнювача дозволяє регулювати технічні характеристики пружного елемента.

Таблиця 1. Результати числового розрахунку

Координата вузлової точки	Коефіцієнт тертя	Контактне напруження	Радіальне переміщення	Осьове переміщення
$\zeta$	$f$	$\sigma/P$	$wE/PR$	$uE/PR$
0.00	0.300	0.000	0.169	0.000
0.05	0.300	0.000	0.168	-0.114
0.10	0.300	0.000	0.167	-0.227
0.15	0.300	0.000	0.164	-0.341
0.20	0.300	0.000	0.160	-0.455
0.25	0.300	0.000	0.156	-0.568
0.30	0.300	0.000	0.150	-0.682
0.35	0.300	0.000	0.143	-0.796
0.40	0.300	0.000	0.136	-0.909
0.45	0.300	0.000	0.127	-1.023
0.50	0.300	0.000	0.117	-1.137
0.55	0.500	0.000	0.107	-1.187
0.60	0.500	-0.100	0.095	-1.215
0.65	0.500	-0.151	0.082	-1.245
0.70	0.500	-0.215	0.068	-1.273
0.75	0.500	-0.294	0.054	-1.324
0.80	0.500	-0.391	0.039	-1.345
0.85	0.500	-0.509	0.025	-1.376
0.90	0.500	-0.649	0.013	-1.407
0.95	0.500	-0.813	0.004	-1.424
1.00	0.500	-0.949	0	-1.435

### Література

1. Шопа В. М. Оболонкові пружини / В. М. Шопа, А. С. Величкович, С. В. Величкович та ін. // Івано-Франківськ: Факел. – 2002. – 92 с.
2. Величкович А. С. Комплекс засобів віброзахисту та регулювання динамічного режиму бурильної колони / А. С. Величкович, С. В. Величкович, В. М. Шопа. – Івано-Франківськ: Сіверсія ЛТД, 2000. – 86 с.
3. Попадюк І. Й. Механіка фрикційного контакту оболонок з деформівним заповнювачем / І. Й. Попадюк, І. П. Шацький, В. М. Шопа // Івано-Франківськ: Факел. – 2003. – 180 с.
4. Шопа В.М. Фрикційна взаємодія прорізної циліндричної оболонки з пружним заповнювачем / В. М. Шопа, І. П. Шацький, О. О. Бедзір // Доп. АН України. – 1993. - № 8. – С.70 – 73.
5. Шопа В.М. Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами / В. М. Шопа, І. П. Шацький, О. О. Бедзір А. С. Величкович // Івано-Франківськ: ІФНТУНГ, 2015. – 208 с.



6. Бедзір О. О. Контактна взаємодія прорізної циліндричної оболонки та деформівного заповнювача з урахуванням сухого тертя / О. О. Бедзір, В. М. Шопя // *Мат. методи та фізико-механічні поля.* – 2009. – 52, № 1. – С. 132–137.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2018 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором Артимом В.І.,  
д.ф.-м.н., с.н.с. Шацьким І.П.*

### **CONTACT INTERACTION OF A SLOTTED CYLINDRICAL SHELL WITH A DEFORMABLE FILLER ALLOWING FOR DRY INHOMOGENEOUS FRICTION**

**O. Bedzir, V. Shopa**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
National Academy of Sciences of Ukraine; 3 b, Naukova Str., L'viv, 79060;  
e-mail: olbedzir@gmail.com*

*The statement of the mixed problem on frictional interaction in the system which consists of cylindrical slit shells, divided by a deformable filler, is realized. Using one-dimensional shell and filler models, the integral equation for finding the contact is constructed. On the basis of numerical solutions the effect of mechanical, geometric and tribologic parameters of contacting pairs on nature of distribution of contact pressure, rigidity and strength of the system is investigated.*

**Key words:** *sheath spring, cylindrical slit shells, contact problem, heterogeneous friction.*