УДК 517.95
DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-52-60

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ЗА ПОРЯДКОМ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ РІВНЯННЯ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ У НЕОБМЕЖЕНІЙ СМУЗІ

І. І. Волянська, М. М. Симотюк
Національний університет «Львівська політехніка»;
12, вул. С. Бандери, Львів, 79013;
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України; 3-б, вул. Наукова, Львів, Україна, 79060;
e-mail: quaternion@ukr.net

Виділено класи задач з локальними двоточковими умовами за виділеною змінною t для лінійних рівнянь із частинними похідними, для яких встановлено умови коректної розв'язності у просторах гладких функцій, перетворення Фур'є яких за змінною x має експоненційну поведінку на нескінченності.

Ключові слова: *рівняння із частинними похідними, двоточкові умови, перетворення Фур'є.*

1. Формулювання задачі. У необмеженій смузі

$$\Pi(T)=\{(t,x)\in R^2 : t\in(0,T), x\in R\},\ T>0,$$

для рівняння із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}\,\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^j\partial x^{n-j}}=0,\ (t,x)\in\Pi(T), \qquad (1)$$

розглянемо задачу з локальними двоточковими умовами

$$\begin{cases} U_j[u(t,x)]\equiv \left.\dfrac{\partial^{l_j-1}u(t,x)}{\partial t^{l_j-1}}\right|_{t=0}=\varphi_j(x), \quad j=1,\ldots,m,\ x\in R, \\ U_{m+j}[u(t,x)]\equiv \left.\dfrac{\partial^{r_j-1}u(t,x)}{\partial t^{r_j-1}}\right|_{t=T}=\varphi_{m+j}(x), \quad j=1,\ldots,n-m,\ x\in R, \end{cases} \qquad (2)$$

де $a_j\in C$, $j=0,1,\ldots,n$, $a_0=1$, $m\in\{1,\ldots,n\}$, а для показників похідних $l_1,\ldots,l_m,r_1,\ldots,r_{n-m}$ в умовах (2) виконуються нерівності

$$1\le l_1<\ldots<l_m\le n,\ 1\le r_1<\ldots<r_{n-m}\le n.$$

Частковими випадками задачі з умовами (2) є а) задача з двома кратними вузлами інтерполяції, коли

$$(l_1,\ldots,l_m)=(1,\ldots,m),\ (r_1,\ldots,r_{n-m})=(1,\ldots,n-m);$$

б) задача з умовами типу Діріхле для рівнянь (1) парного порядку, коли $n = 2m$, $(l_1, l_2, \ldots, l_m) = (r_1, r_2, \ldots, r_m) = (1,3,\ldots,2m-1)$;

в) задача з умовами типу Діріхле-Неймана для рівнянь парного порядку, коли $n = 2m$, і $(l_1, l_2, \ldots, l_m) = (1,3,\ldots,2m-1)$, $(r_1, r_2, \ldots, r_m) = (2,4,\ldots,2m)$.

Дослідження задачі з умовами (2) для рівнянь із частинними похідними у обмежених областях для випадку а) проведено у роботах [1-5], для випадку б) – у [6, 7], для випадку в) – у [8, 9]. У роботах [1-9] застосовано метричний підхід для доведення оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язків, з яких випливає однозначна розв'язність задач (1), (2) для майже всіх (щодо міри Лебега) векторів, компонентами яких є коефіцієнти рівнянь та значення другого вузла інтерполяції.

Задачі з двоточковими умовами для рівнянь із частинними похідними у необмежених областях вивчено в роботах [10-11]. У цих роботах використано узагальнений метод відокремлення змінних і на його підставі встановлено умови розв'язності задач (1), (2) у класах квазіполіномів або у класах цілих функцій з експоненційним зростанням на нескінченності за координатою x.

Нехай $E_{\alpha,\beta} (\alpha, \beta \geq 0)$ – простір таких функцій $\varphi \in L_2(R)$, для яких є скінченною норма

$$\left\| \varphi(x); E_{\alpha,\beta} \right\| = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\, \widetilde{\varphi}(\xi)\,|^2 \, (1+\xi^2)^{\alpha} \exp(2\beta\, |\,\xi\,|) d\xi}\,,$$

де $\widetilde{\varphi}(\xi)$ – перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$;

$C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})$, $n \in N, \alpha, \beta \geq 0,$ – простір функцій $u(t,x)$ таких, що похідні $\partial^r u(t,\cdot)/\partial t^r$, $r = 0,1,\ldots,n,$ є неперервними за t на $[0,T]$ в просторі $E_{\alpha-r,\beta}$; норму в просторі $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})$ задаємо формулою

$$\left\| u(t,x); C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta}) \right\| = \sum_{r=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \partial^r u(t,x)/\partial t^r; E_{\alpha-r,\beta} \right\|.$$

Основною метою даної роботи є встановлення умов розв'язності задачі (1), (2) у просторах $C^n([0,T]; E_{\alpha,\beta})$, якщо праві частини умов (2) належать до просторів E_{α_0,β_0} для деяких показників $\alpha_0, \beta_0 \geq 0$.

2. Вимоги на параметри задачі (1), (2). Через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ позначимо корені рівняння $L(\lambda, i) = 0$.

Означення 1. *Будемо говорити, що для задачі* (1), (2) *виконується умова А, якщо нерівності*

$$\operatorname{Re}(\lambda_{i_1} + \ldots + \lambda_{i_{n-m}}) \neq \operatorname{Re}(\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_{n-m}}) \tag{3}$$

виконуються для довільних наборів натуральних чисел $(i_1,\ldots,i_{n-m})$, $(j_1,\ldots,j_{n-m})$ *таких, що* $(i_1,\ldots,i_{n-m})\neq(j_1,\ldots,j_{n-m})$, $1\le i_1<\ldots<i_{n-m}\le n$, $1\le j_1<\ldots<j_{n-m}\le n$.

Зауваження 1. Якщо справджується умова А, то дійсні частини

$$\operatorname{Re}\lambda_1,\ldots,\operatorname{Re}\lambda_n$$

коренів $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ є попарно різними. Тому вважатимемо, що при виконанні умови А нумерація коренів вибрана таким чином, що

$$\operatorname{Re}\lambda_1<\ldots<\operatorname{Re}\lambda_n. \tag{4}$$

Означення 2. *Будемо говорити, що для задачі* (1), (2) *виконується умова В, якщо для довільних наборів натуральних чисел* $(i_1,\ldots,i_m)$, $(j_1,\ldots,j_{n-m})$ *таких, що* $1\le i_1<\ldots<i_m\le n$, $1\le j_1<\ldots<j_{n-m}\le n$,

$$\{i_1,\ldots,i_m\}\cap\{j_1,\ldots,j_{n-m}\}=\varnothing,\ \{i_1,\ldots,i_m\}\cup\{j_1,\ldots,j_{n-m}\}=\{1,\ldots,n\},$$

виконуються нерівності

$$\begin{vmatrix} \lambda_{i_1}^{l_1-1} & \lambda_{i_2}^{l_1-1} & \ldots & \lambda_{i_m}^{l_1-1} \\ \lambda_{i_1}^{l_2-1} & \lambda_{i_2}^{l_2-1} & \ldots & \lambda_{i_m}^{l_2-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{i_1}^{l_m-1} & \lambda_{i_2}^{l_m-1} & \ldots & \lambda_{i_m}^{l_m-1} \end{vmatrix}\neq 0,\quad \begin{vmatrix} \lambda_{j_1}^{r_1-1} & \lambda_{j_2}^{r_1-1} & \ldots & \lambda_{j_{n-m}}^{r_1-1} \\ \lambda_{j_1}^{r_2-1} & \lambda_{j_2}^{r_2-1} & \ldots & \lambda_{j_{n-m}}^{r_2-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{j_1}^{r_{n-m}-1} & \lambda_{j_2}^{r_{n-m}-1} & \ldots & \lambda_{j_{n-m}}^{r_{n-m}-1} \end{vmatrix}\neq 0. \tag{5}$$

Умови А, В дозволяють встановити такі оцінки знизу для характеристичного визначника задачі (1), (2), з яких випливає її розв’язність у просторах у $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$.

3. Побудова формального розв’язку. Розв’язок задачі (1), (2) з простору $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$ шукаємо у вигляді інтеграла Фур’є

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{u}(t,\xi)\exp(ix\xi)d\xi, \tag{6}$$

де $\widetilde{u}(t,\xi)$ – перетворення Фур’є за змінною x функції $u(t,x)$. Застосовуючи до рівняння (1) та умов (2) перетворення Фур’є, отримуємо, що функція $\widetilde{u}(t,\xi)$ є розв’язком такої двоточкової задачі для звичайного диференціального рівняння з параметром ξ:

$$L\left(\frac{d}{dt},i\xi\right)\widetilde{u}(t,\xi)\equiv\sum_{j=0}^{n}a_{n-j}(i\xi)^{n-j}\frac{d^j\widetilde{u}(t,\xi)}{dt^j}=0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} U_j[\widetilde{u}(t,\xi)]\equiv\widetilde{u}_t^{(l_j-1)}(0,\xi)=\widetilde{\varphi}_j(\xi), & j=1,\ldots,m, \\ U_{m+j}[\widetilde{u}(t,\xi)]\equiv\widetilde{u}_t^{(r_j-1)}(T,\xi)=\widetilde{\varphi}_{m+j}(\xi), & j=1,\ldots,n-m, \end{cases} \tag{8}$$

де $\widetilde{\varphi}_j(\xi)$ – перетворення Фур’є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\ldots,n$, відповідно.

Якщо $\xi = 0$, то розв’язок рівняння (7) має вигляд

$$\widetilde{u}(t,0) \equiv \sum_{q=1}^{n} C_q(0) t^{q-1}/(q-1)!\,. \qquad (9)$$

Сталі $C_1(0),\ldots,C_n(0)$ у формулі (9) визначаються на підставі умов (8) із системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_q(0) U_j[t^{q-1}/(q-1)!] = \widetilde{\varphi}_j(0), \quad j = 1,\ldots,n\,. \qquad (10)$$

Якщо $\xi \neq 0$, то при виконанні умови А функції $e^{\lambda_1 \xi T},\ldots,e^{\lambda_n \xi T}$ утворюють фундаментальну систему розв’язків рівняння (7). Тому для $\xi \neq 0$

$$\widetilde{u}(t,\xi) \equiv \sum_{q=1}^{n} C_q(\xi) e^{\lambda_q \xi T}\,, \qquad (11)$$

де сталі $C_1(\xi),\ldots,C_n(\xi)$ є розв’язком системи лінійних рівнянь

$$\sum_{q=1}^{n} C_q(\xi) U_j[e^{\lambda_q \xi T}] = \widetilde{\varphi}_j(\xi), \quad j = 1,\ldots,n, \quad \xi \neq 0\,. \qquad (12)$$

Позначимо через $\Delta(0)$, $\Delta(\xi)$ характеристичні визначники лінійних систем рівнянь (10), (12): $\Delta(0) = \det\left\| U_j[t^q/(q-1)!] \right\|_{j,q=1}^{n}$,

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} (\lambda_1\xi)^{l_1-1} & (\lambda_2\xi)^{l_1-1} & \ldots & (\lambda_n\xi)^{l_1-1} \\ (\lambda_1\xi)^{l_2-1} & (\lambda_2\xi)^{l_2-1} & \ldots & (\lambda_n\xi)^{l_2-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1\xi)^{l_m-1} & (\lambda_2\xi)^{l_m-1} & \ldots & (\lambda_n\xi)^{l_m-1} \\ (\lambda_1\xi)^{r_1-1} e^{\lambda_1\xi T} & (\lambda_2\xi)^{r_1-1} e^{\lambda_2\xi T} & \ldots & (\lambda_n\xi)^{r_1-1} e^{\lambda_n\xi T} \\ (\lambda_1\xi)^{r_2-1} e^{\lambda_1\xi T} & (\lambda_2\xi)^{r_2-1} e^{\lambda_2\xi T} & \ldots & (\lambda_n\xi)^{r_2-1} e^{\lambda_n\xi T} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\lambda_1\xi)^{r_{n-m}-1} e^{\lambda_1\xi T} & (\lambda_2\xi)^{r_{n-m}-1} e^{\lambda_2\xi T} & \ldots & (\lambda_n\xi)^{r_{n-m}-1} e^{\lambda_n\xi T} \end{vmatrix}, \xi \neq 0\,. \qquad (13)$$

Якщо виконується умова

$$\forall \xi \in R \qquad \Delta(\xi) \neq 0\,, \qquad (14)$$

то застосовуючи правило Крамера для знаходження розв’язків систем (10), (12) та підставляючи отримані вирази у формули (9), (11), отримуємо, що задача (7), (8) має єдиний розв’язок, який зображується рівністю

$$\widetilde{u}(t,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{j,q=1}^{n} \dfrac{\Delta_{j,q}(0)}{\Delta(0)} \dfrac{t^{q-1}}{(q-1)!} \widetilde{\varphi}_j(0), & \xi = 0, \\ \sum\limits_{j,q=1}^{n} \dfrac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)} \exp(\lambda_q \xi t) \widetilde{\varphi}_j(\xi), & \xi \neq 0, \end{cases} \qquad (15)$$

де $\Delta_{j,q}(\xi), j,q=1,\ldots,n,$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині j-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\xi), \xi \in R$. Зауважимо, що при виконанні умови (14), функція $\widetilde{u}(t,\xi)$, визначена формулою (15), а також її похідні за змінною t, є неперервними за $\xi \in R$. Таким чином, при виконанні умови (14) із формул (6), (15) випливає, що формальний розв'язок задачі (1), (2) має таке зображення:

$$u(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}\exp(\lambda_q\xi t)\widetilde{\varphi}_j(\xi)\exp(ix\xi)d\xi\,. \tag{16}$$

Наведемо приклад задач, для яких умова (14) виконується.

Приклад 1. Визначник $\Delta(\xi)$ задачі з двоточковими умовами

$$u(0,x)=\varphi_1(x), u_{tt}(0,x)=\varphi_2(x), u(T,x)=\varphi_3(x), u_{tt}(T,x)=\varphi_4(x),$$

для рівняння

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+b^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=0,\quad a>b>0\,, \tag{17}$$

обчислюється за формулами

$$\Delta(0)=-T^2\,,\ \Delta(\xi)=-4(a^2-b^2)^2\xi^4\mathrm{sh}(a\xi T)\mathrm{sh}(b\xi T)\,,$$

з яких випливає, що умова (14) виконується.

Приклад 2. Для рівняння (17) визначник $\Delta(\xi)$ задачі з умовами

$$u(0,x)=\varphi_1(x), u_{tt}(0,x)=\varphi_2(x), u_t(T,x)=\varphi_3(x), u_{ttt}(T,x)=\varphi_4(x),$$

обчислюється за формулами

$$\Delta(0)=-1\,,\ \Delta(\xi)=-4(a^2-b^2)^2\xi^4\mathrm{ch}(a\xi T)\mathrm{ch}(b\xi T)\,,$$

з яких випливає, що умова (14) виконується.

4. Допоміжні твердження. Щоб з'ясувати приналежність інтеграла (12) до простору $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$, встановимо такі твердження.

Лема 1. *Нехай виконується умова А. Тоді існують сталі $C_1, R_1>0$ такі, що для всіх $\xi>R_1$ виконуються такі оцінки*

$$\left|\Delta_{j,q}(\xi)\right|\le C_1(1+|\xi|)^{L+R-\omega_j}\exp(\delta^+_{j,q}\xi T)\,,\ j,q=1,\ldots,n\,, \tag{18}$$

де $L=(l_1-1)+\ldots+(l_m-1), R=(r_1-1)+\ldots+(r_{n-m}-1),$

$$\omega_j=\begin{cases} l_j-1, & j=1,\ldots,m,\\ r_{j-m}-1, & j=m+1,\ldots n,\end{cases}$$

$$\delta^+_{j,q}=\begin{cases}\mathrm{Re}(\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n), & 1\le j\le m,\quad 1\le q\le m,\\ \mathrm{Re}(\lambda_m+\ldots+\lambda_n-\lambda_q), & 1\le j\le m,\ m+1\le q\le n,\\ \mathrm{Re}(\lambda_{m+2}+\ldots+\lambda_n), & m+1\le j\le n,\ 1\le q\le m,\\ \mathrm{Re}(\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n-\lambda_q), & m+1\le j\le n,\ m+1\le q\le n.\end{cases}$$

Доведення. Встановимо твердження леми у випадку, коли виконуються нерівності $1 \le j \le m$, $1 \le q \le m$. Із формули (13) та правила Лапласа випливає, що в цьому випадку визначник $\Delta_{j,q}(\xi)$ є сумою $(n-1)!$ доданків вигляду

$$\pm \xi^{L+R-\omega_j} H^{j,q}_{i_1,\dots,i_{m-1}} G^{q}_{j_1,\dots,j_{n-m}} \exp((\lambda_{j_1} + \ldots + \lambda_{j_{n-m}})\xi T), \qquad (19)$$

де $H^{j,q}_{i_1,\dots,i_{m-1}}$ – мінор $(m-1)$-го порядку визначника Вандермонда чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, який відповідає його $(m-1)$ рядкам, номери яких належать до множини $\{l_1,\dots,l_m\} \setminus \{l_j\}$ та $(m-1)$ стовпцям з номерами $i_1,\dots,i_{m-1} \in \{1,\dots,n\} \setminus \{q\}$, $i_1 < \ldots < i_{m-1}$; $G^{q}_{j_1,\dots,j_{n-m}}$ – мінор $(n-m)$-го порядку визначника Вандермонда чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, який відповідає його $(n-m)$ рядкам з номерами $r_1,\dots,r_{n-m}$ та $(n-m)$ стовпцям з номерами $j_1,\dots,j_{n-m} \in \{1,\dots,n\} \setminus \{i_1,\dots,i_{m-1},q\}$, $j_1 < \ldots < j_{n-m}$. Зрозуміло, що для досить великих $\xi > 0$ при виконанні умови А серед доданків вигляду (19) домінуючим за модулем є той, який відповідає наборові $(j_1,\dots,j_{n-m}) = (n-m+1,\dots,n)$. Звідси випливає нерівність (18) для випадку, коли $1 \le j \le m$, $1 \le q \le m$.

Перевірка оцінок (18) для решти трьох діапазонів значень j,q проводиться аналогічно. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай виконується умова А. Тоді існують сталі $C_2, R_2 > 0$ такі, що для всіх $\xi < -R_2$ виконуються такі оцінки*

$$\left|\Delta_{j,q}(\xi)\right| \le C_2(1+|\xi|)^{L+R-\omega_j} \exp(\delta^{-}_{j,q}\xi T),\ j,q = 1,\dots,n, \qquad (20)$$

де сталі $L, R,\ \omega_j, j = 1,\dots,n,$ такі ж, як і в лемі 1, а

$$\delta^{-}_{j,q} = \begin{cases} \operatorname{Re}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-m+1} - \lambda_q), & 1 \le j \le m, \quad 1 \le q \le n-m, \\ \operatorname{Re}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-m}), & 1 \le j \le m,\ n-m+1 \le q \le n, \\ \operatorname{Re}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-m} - \lambda_q), & m+1 \le j \le n,\ 1 \le q \le n-m, \\ \operatorname{Re}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-m-1}), & m+1 \le j \le n,\ n-m+1 \le q \le n. \end{cases}$$

Доведення леми 2 є аналогічним до доведення леми 1.

Лема 3. *Нехай виконуються умови А, В. Тоді існують такі сталі $C_3, R_3 > 0,$ що для всіх $\xi, |\xi| > R_3,$ виконуються оцінки*

$$\left|\Delta(\xi)\right| \ge C_3(1+|\xi|)^{L+R} \exp(\beta^{+}\xi T),\ \xi > R_3, \qquad (21)$$

$$\left|\Delta(\xi)\right| \ge C_3(1+|\xi|)^{L+R} \exp(\beta^{-}\xi T),\ \xi < -R_3, \qquad (22)$$

$$\beta^{+} = \operatorname{Re}(\lambda_{m+1} + \ldots + \lambda_n),\ \beta^{-} = \operatorname{Re}(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n-m}).$$

Доведення. Застосовуючи правило Лапласа для розкриття визначника (13), отримуємо

$$\Delta(\xi)=\sum_{i_1,\ldots,i_m}\pm\xi^{L+R}H_{i_1,\ldots,i_m}G_{j_1,\ldots,j_{n-m}}\exp((\lambda_{j_1}+\ldots+\lambda_{j_{n-m}})\xi T), \quad (23)$$

де $H_{i_1,\ldots,i_m}$ – мінор m-го порядку визначника Вандермонда чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, який відповідає його m рядкам, номери яких належать до множини $\{l_1,\ldots,l_m\}$ та m стовпцям з номерами $i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}$, $i_1<\ldots<i_m$; $G_{j_1,\ldots,j_{n-m}}$ – мінор $(n-m)$-го порядку визначника Вандермонда чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, який відповідає його $(n-m)$ рядкам з номерами $r_1,\ldots,r_{n-m}$ та $(n-m)$ стовпцям з номерами $j_1,\ldots,j_{n-m}\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i_1,\ldots,i_m\}$, $j_1<\ldots<j_{n-m}$. Із умов A, B випливає, що для досить великих додатних ξ у сумі (23) домінуючим за модулем є доданок

$$\pm\xi^{L+R}H_{1,\ldots,m}G_{m+1,\ldots,n}\exp((\lambda_{m+1}+\ldots+\lambda_n)\xi T),$$

для досить великих від'ємних ξ –

$$\pm\xi^{L+R}H_{n-m+1,\ldots,n}G_{1,\ldots,n-m}\exp((\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-m})\xi T).$$

Лему доведено.

5. Умови існування розв'язку задачі. Встановимо основний результат роботи про існування єдиного розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови A, B та умова (14). Якщо* $\varphi_j\in E_{\alpha-\omega_j,\beta+\Lambda T}$, $j=1,\ldots,n$, де $\Lambda=\max\{|\operatorname{Re}\lambda_1|,\ldots,|\operatorname{Re}\lambda_n|\}$, *а сталі* $\omega_j, j=1,\ldots,n,$ *такі ж, як і в лемі 1, то задача (1), (2) має в просторі* $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$ *єдиний розв'язок, який неперервно залежить від функцій* $\varphi_j\in E_{\alpha,\beta}$, $j=1,\ldots,n$.

Доведення. Оскільки справджуються умови A, B, то з формул (15) та оцінок (18), (20), (21), (22) із лем 1, 2, 3 випливає, що існує число $R_4>0$ таке, що для всіх ξ, $|\xi|>R_4$, виконуються оцінки

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\sum_{q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(\xi)}{\Delta(\xi)}\left(\exp(\lambda_q\xi t)\right)^{(r)}\right\|\le C_4(1+|\xi|)^{r-\omega_j}\exp(\Lambda T|\xi|), \quad (24)$$

де $j=1,\ldots,n$, $r=0,1,\ldots,n$. На підставі умов (14) функції $d^r u(t,\xi)/dt^r$, $r=0,1,\ldots,n$, є неперервними за ξ на R. Тому оцінки (24) зберігають свою силу і для $\xi\in[-R_4,R_4]$. Тоді з формул (16) та оцінок (24) дістаємо, що

$$\max_{t\in[0,T]}\left\|\partial^r u(t,x)/\partial t^r; E_{\alpha-r,\beta}\right\|^2 \le$$

$$\le C_5 \sum_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}_j(\xi)|^2 \, (1+\xi^2)^{\alpha-\omega_j} \exp(2(\beta+\Lambda T)\,|\,\xi\,|)d\xi \,,\; r=0,1,\ldots,n\,.$$

Із отриманих нерівностей та означення норми в просторі $C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})$ дістаємо нерівності

$$\left\|u(t,x); C^n([0,T];E_{\alpha,\beta})\right\| \le C_6 \sum_{j=1}^{n} \left\|\varphi_j(x); E_{\alpha-\omega_j,\beta+\Lambda T}\right\|,$$

з яких випливає твердження теореми 1.

Висновки. Отримані результати можна перенести на випадок двоточкових задач для рівнянь із молодшими членами, а також систем рівнянь із частинними похідними.

Література

1. Бобик І.О., Пташник Б.Й. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн., 1994. – 46, № 7. – С. 795-802.
2. Бобик І.О. Крайові задачі для загальних диференціальних рівнянь з частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 130 с.
3. Пташник Б.И., Штабалюк П.И. Краевая задача для гиперболических уравнений в классе функций, почти периодических по пространственным переменным // Дифференц. уравнения, 1986. – 22, № 4. – С. 669-678.
4. Симотюк М.М. Двоточкова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Наук. Вісник Ужгород. нац. ун-ту, 2002. – Вип. 7. – С. 96-107.
5. Симотюк М.М. Діофантові наближення визначника задачі з двома кратними вузлами для рівнянь із частинними похідними // Математичний вісник НТШ, 2005. – Т. 2. – С. 199-212.
6. Білусяк Н.І., Пташник Б.Й. Крайова задача для рівнянь зі змінними коефіцієнтами, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – Т. 51, № 2. – С. 42-52.
7. Пташник Б.Й., Симотюк М.М. Діофантові наближення характеристичного визначника задачі Діріхле для лінійного рівняння з частинними похідними // Speceral and evolution problems: Proceedings of the Sixteenth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium. – 2006. – Vol. 16. – P. 25-32.
8. Білусяк Н.І., Пташник Б.Й., Репетило С.М. Крайова задача зі змішаними умовами для слабко нелінійних гіперболічних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – Т. 53, № 3. – С. 53-63.

9. Пташник Б.Й., Репетило С.М. Крайова задача з мішаними умовами для лінійного гіперболічного рівняння високого порядку зі змінними коефіцієнтами // Доп. НАН України. – 2010. – №4. – С. 19-24.
10. Malanchuk, O., Nytrebych, Z. Homogeneous two-point problem for PDE of the second order in time variable and infinite order in spatial variables // Open Mathematics. – 2017. –15 (1). – 101–110.
11. Nytrebych, Z. M., Malanchuk, O. M. The differential-symbol method of solving the two-point problem with respect to time for a partial differential equation // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. –224 (4). – 541–554.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.12.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці),*
д.ф.-м.н., професором ***Ільківим В.С.*** *(м. Львів)*

TWO-POINT PROBLEM FOR HOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION IN UNBOUNDED STRIP

I. I. Volyanska, M. M. Symotyuk
Lviv Polytechnic National University;79000, Lviv, S.Bandery Str., 12;
e-mail: i.volyanska@i.ua
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str., 3-b;
e-mail: quaternion@ukr.net

Well-posedness conditions of a two-point boundary-value problem are obtained for a high-order linear partial differential equation in an unbounded strip when the real parts of the roots of its characteristic equation are different.

Key words: *partial differential equations, two-point problem, Fourier transformation.*