УДК 517.95+511.2
DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-38-46

# МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ВИЗНАЧНИКА ІНТЕГРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ СТРУНИ

**О. М. Медвідь[1], М. М. Симотюк[1], І. Р. Тимків[2]**
*[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. Підстригача НАН України; вул. Наукова 3-б, Львів, Україна, 79060;*
*[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;*
*medoks@ukr.net, quaternion@ukr.net, tymkiv_if@ukr.net*

*У роботі встановлено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при досліджені існування періодичного за часом розв'язку задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів за просторовою змінною для рівняння малих коливань струни. Для доведення метричних оцінок знизу застосовано поняття фрактальної міри та розмірності Гаусдорфа.*

***Ключові слова:*** *інтегральні умови, покриття множини, міра Гаусдорфа, розмірність Гаусдорфа.*

**1. Вступ.**

Нехай $H_\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$ – простір тригонометричних рядів

$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi(t); H_\alpha\| = \sqrt{|a_0|^2 / 4 + \sum_{k \in \mathbf{Z}/\{0\}} (|a_k|^2 + |b_k|^2)(1+|k|)^{2\alpha}},$$

$C^2([0,A]; H_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$, – простір функцій $u(t,x)$ таких, що для довільного фіксованого $x \in [0;L]$ $u(t,x)$, $\partial u(t,x)/\partial t$, $\partial^2 u(t,x) / \partial t^2 \in H_\alpha$ і як елементи цього простору є неперервними за $x$ на $[0;L]$, норму в просторі задаємо формулою

$$\left\| u; C^2([0,A]; H_\alpha) \right\| = \sum_{j=0}^{2} \max_{x \in [0,A]} \left\| \frac{\partial^j u(\cdot, x)}{\partial t^j}; H_\alpha \right\|.$$

**2. Постановка задачі.**

Розглянемо задачу.

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - q^2(x) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = 0, \qquad t \in \mathbf{R},\ x \in (0;A), \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^{r_1} u}{\partial x^{r_1}}\right|_{x=0} = \varphi_1(t)\,, \int_0^l x^{r_2} u(t,x)dx = \varphi_2(t)\,,\ r_1,\, r_2 \in \{0;1\},\ t \in \mathbf{R}\,, \tag{2}$$

$$u(t,x) = u(t+2\pi, x)\,, \qquad t \in \mathbf{R}\,,\ x \in (0;A)\,, \tag{3}$$

де $u(t,x)$ – відхилення струни від положення рівноваги на $x$ у момент часу $t$, $q(x) = \sqrt{\rho(x)/T_0}$, де $\rho(x)$ – лінійна густина струни, яка є неперервною додатною функцією на $[0;A]$, $T_0$ – натяг струни, $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)$ – $2\pi$ -періодичні функції на $\mathbf{R}$.

Нехай $f_{1k}(x)$, $f_{2k}(x)$, $k \in \mathbf{Z}$, – така фундаментальна система розв'язків рівняння

$$y''(x) + q(x)k^2 y(x) = 0\,;$$

що $f_{1k}(0) = 1$, $f'_{1k}(0) = 0$, $f_{2k}(0) = 0$, $f'_{2k}(0) = 1$.

Через $\Delta_{r_1,r_2}(k)$, $k \in \mathbf{Z}$, позначимо визначник

$$\Delta_{r_1,r_2}(k,l) = \begin{vmatrix} f_{1k}^{(r_1)}(0) & f_{2k}^{(r_1)}(0) \\ \int_0^l x^{r_2} f_{1k}(x)dx & \int_0^l x^{r_2} f_{2k}(x)dx \end{vmatrix},\ r_1,\, r_2 \in \{0;1\}. \tag{4}$$

Легко перевірити, що

$$\Delta_{r_1,r_2}(k,l) = (-1)^{r_1} \int_0^l x^{r_2} f_{2-r_1,k}(x)dx\,,\ r_1,\, r_2 \in \{0;1\} \tag{5}$$

Зауважимо, що $f_{10}(x) = 1$, $f_{20}(x) = x$, тому

$$\Delta_{r_1,r_2}(0,l) = \frac{(-1)^{r_1} l^{r_2 - r_1 + 2}}{r_2 - r_1 + 2} \neq 0\,,\ r_1,\, r_2 \in \{0;1\}.$$

Якщо $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t) \in H_\alpha$

$$\varphi_j(t) = \frac{a_{j0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{jk} \cos kt + b_{jk} \sin kt)\,, \qquad j = 1,2\,,$$

і, крім того,

$$\Delta_{r_1,r_2}(k) \neq 0\,,\ r_1,\, r_2 \in \{0;1\}, \tag{6}$$

для всіх $k \in \mathbf{Z}$, то задача (1)–(3) має єдиний $2\pi$ -періодичний розв'язок $u(t,x)$, який зображується формулою

$$u(t,x) = \frac{u_0(x)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k(x) \cos kt + v_k(x) \sin kt)\,, \tag{7}$$

де $u_0(x) = a_{10} x^{r_1} + \left( a_{20} - a_{10} \dfrac{l^{r_1 + r_2 + 2}}{r_1 + r_2 + 2} \right) \dfrac{r_2 - r_1 + 2}{l^{r_2 - r_1 + 2}} x^{1 - r_1}$,

$$u_k(x)=\frac{a_{1k}\int\limits_0^l \xi^{r_2}(f_{1k}(x)f_{2k}(\xi)-(-1)^{r_1}(f_{1k}(\xi)f_{2k}(x)d\xi-a_{2k}f_{2-r_1,k}(x))}{\Delta_{r_1,r_2}(k)},$$

$$v_k(x)=\frac{b_{1k}\int\limits_0^l \xi^{r_2}(f_{1k}(x)f_{2k}(\xi)-(-1)^{r_1}(f_{1k}(\xi)f_{2k}(x)d\xi-b_{2k}f_{2-r_1,k}(x))}{\Delta_{r_1,r_2}(k)}.$$

Якщо виконується умова (7) і, крім того, існує така стала $\gamma$, що для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) чисел $k\in\mathbf{Z}$ справджуються нерівності

$$\left|\Delta_{r_1,r_2}(k,l)\right|\ge(1+|k|)^{-\gamma},\qquad r_1,r_2\in\{0;1\} \tag{8}$$

то можна встановити оцінки зверху для норм функцій $u_k(x)$, $v_k(x)$, $k\in\mathbf{Z}$ у просторі $C^2[0,A]$, з яких випливає збіжність формального ряду (7) у шкалі просторів $C^2([0,A];H_\alpha)$, $\alpha\in\mathbf{R}$, якщо $\varphi_1\in H_{\alpha_1}$, $\varphi_2\in H_{\alpha_2}$ для деяких показників $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$. Тому важливо дослідити питання про можливість виконання оцінок (6). Це і є метою даної роботи.

**Приклад.**

Зауважимо, що для задачі (1) – (3), у якій $q(x)=q$

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}-q^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=0,\quad q>0\quad t\in\mathbf{R},\ x\in(0;l),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=\varphi_1(t),\ \int\limits_0^l u(t,x)dx=\varphi_2(t),\qquad t\in\mathbf{R},$$

$$u(t,x)=u(t+2\pi,x),\qquad t\in\mathbf{R},\ x\in(0;l),$$

визначник $\Delta_{1,0}(k,l)$ обчислюється формулою $\Delta_{1,0}(0,l)=-l$, $\Delta_{1,0}(k,l)=\sin(kql)/kq$, $k\ne 0$.

Оскільки $|\sin kql|=|\sin(kql-m\pi)|\le|kql-m\pi|$ і за теоремою Хінчина для довільних $\gamma$ існує таке число $\xi\in(0,A]$, $\xi/\pi\notin\mathbf{Q}$, що нерівність

$$|kql-m\pi|<(1+|k|)^{-\gamma}$$

має нескінчену множину розв'язків у цілих числах $k$, $m$ ($k\ne 0$) і при фіксованому $k$ може мати лише скінчену кількість розв'язків у цілих $m$, то нерівність

$$|\sin(kql)|<\frac{1}{q}(1+|k|)^{-\gamma-1}$$

має безмежну кількість розв'язків у цілих числах $k$. Вибираючи точку $l$ так, що $l = 2\xi/q$, отримаємо, що нерівність $|\Delta_{1,0}(k)| < (1+|k|)^{-\gamma}$ виконується для нескінченої множини чисел $k \in \mathbf{Z}$.

**3. Допоміжні твердження.**

Наведемо для зручності викладу деякі поняття, що стосуються $\rho$-міри Гаусдорфа та розмірності Гаусдорфа множини $M \subset \mathbf{R}$.

**Означення 1.** $\delta$**-** покриттям множини $M \subset \mathbf{R}$ називається злічення сім'я інтервалів $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ така, що $M \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ і $\operatorname{mes} S_j < \delta$ для кожного $j \geq 1$.

**Означення 2.** $\rho$- мірою Гаусдорфа ($0 < \rho \leq 1$) множини $M \subset \mathbf{R}$ називається границя (скінчена або нескінчена)

$$\operatorname{mes}_{\rho}(M) = \lim_{\delta \to 0} \inf \sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \left(\operatorname{mes}_{\mathbf{R}} S_j\right)^{\rho}$$

де точна грань береться за всіма $\delta$**-** покриттями $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини $M$.

**Означення 3.** Дійсне число $\beta$ таке, що

1) $\forall \rho:\ \beta < \rho \leq 1$ $\quad \operatorname{mes}_{\rho}(M) = 0$,

2) $\forall \rho:\ 0 < \rho < \beta$ $\quad \operatorname{mes}_{\rho}(M) = \infty$,

називається розмірністю Гаусдорфа множини $M \subset \mathbf{R}$.

Будемо використовувати наступне твердження, доведення якого міститься в [1].

**Лема 1.** *Множина $M \subset \mathbf{R}$ має нульову $\rho$-міру Гаусдорфа тоді і тільки тоді, коли існує покриття $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$ множини $M$ таке, що*

$$\sum_{\mathrm{j}=1}^{\infty} \left(\operatorname{mes}_{\mathbf{R}} S_j\right)^{\rho} < \infty$$

*і таке, що кожна точка множини $M$ належить до нескінченної кількості проміжків $S_j$.*

Розглянемо два звичайні диференціальні рівняння

$$y'' + B_1(x) y(x) = 0, \tag{9}$$

$$y'' + B_2(x) y(x) = 0, \tag{10}$$

коефіцієнти $B_1(x), B_2(x)$ яких є неперервними функціями на інтервалі $(a,b)$.

**Лема 2.** [3, с. 133-134] *Нехай $B_1(x) \leq B_2(x)$ на інтервалі $(a,b)$, а $x_0, x_1$ – два послідовні нулі нетривіального розв'язку $y(x)$ рівняння* (9). *Тоді довільний розв'язок рівняння* (10) *має хоча б один нуль на $[x_0, x_1]$.*

**4. Основний результат роботи.**

Через $M_\gamma$ позначимо множину тих чисел $l \in (0, A]$, для яких нерівність (8) виконується для всіх векторів $k \in \mathbf{Z}$.

**Теорема 1.** *Нехай* $0 < q_0 \le q(x) \le Q$, $x \in [0, A]$, $q''(x)$ *– неперервна на* $[0, A]$. *Тоді для довільного* $\rho \in (0,1]$ *множина* $(0, A] \setminus M_\gamma$ *має нульову* $\rho$*-міру Гаусдорфа, якщо*

$\gamma > 1 + 4/\rho$.

**Доведення.**

Не обмежуючи загальності міркувань, розглянемо випадок, коли $r_1 = r_2 = 0$

$$\Delta_{0,0}(k,l) = \int_0^l f_{2k}(x)dx, \quad \frac{d\Delta_{0,0}(k,l)}{dl} = f_{2k}(l). \tag{11}$$

Через $E_\gamma(k)$ позначимо множину тих $l \in (0, A]$, для яких нерівність

$$|\Delta_{0,0}(k,l)| < (1+|k|)^{-\gamma} \tag{12}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbf{Z}$, а через $E_\gamma$ – множину тих $l \in (0, A]$, для яких нерівність (12) виконується для нескінченої кількості $k \in \mathbf{Z}$.

Через $E_{\gamma_1}(k)$, $\gamma_1 < \gamma - 1$ позначимо множину тих $l \in (0, A]$, для яких нерівність

$$|d\Delta_{0,0}(k,l)/dl| = |f_{2k}(l)| < (1+|k|)^{-\gamma_1} \tag{14}$$

виконується при фіксованому $k \in \mathbf{Z}$.

Для множини $E_\gamma(k)$ виконується рівність

$$E_\gamma(k) = \{l \in [0, A] : |\Delta_{0,0}(k,l)| < (1+|k|)^{-\gamma}, \left|d\Delta_{0,0}(k,l)/dl\right| < (1+|k|)^{-\gamma_1}\} \cup$$
$$\cup \{l \in [0, A] : |\Delta_{0,0}(k,l)| < (1+|k|)^{-\gamma}, \left|d\Delta_{0,0}(k,l)/dl\right| \ge (1+|k|)^{-\gamma_1}\}.$$

Доведемо, що множину $E_\gamma(k)$ можна покрити проміжками $I_s^{\gamma_1}(k)$, $s = 1, \ldots, N(k)$, $J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)$, $s = 1, \ldots, M(k)$, такими, що при $\gamma > \gamma(\rho)$

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \left( \sum_{s=1}^{N(k)} (\mathrm{mes}_{\mathbf{R}}\, I_s^{\gamma_1}(k))^\rho + \sum_{s=1}^{M(k)} (\mathrm{mes}_{\mathbf{R}}\, J_s^{\gamma_1,\gamma}(k))^\rho \right) \le C_1 \sum_{k \in \mathbf{Z}} (1+|k|)^{-1-\varepsilon\rho} < \infty$$

Згідно з теоремою 1 із [4, с. 399] рівняння (4) має таку фундаментальну систему розв'язків $g_{1k}(x)$, $g_{2k}(x)$, що

$$g_{jk}(x)=\frac{1}{\sqrt{q(x)}}\exp\left((-1)^{j-1}ik\int_0^x q(\xi)d\xi\right)\left(1+\frac{\varepsilon_{jk}(x)}{k}\right), \tag{12}$$

$$g'_{jk}(x)=(-1)^{j-1}\sqrt{q(x)}\exp\left((-1)^{j-1}ik\int_0^x q(\xi)d\xi\right)\left(1+\frac{\widetilde{\varepsilon}_{jk}(x)}{k}\right), \tag{13}$$

$k\neq 0$, $\quad j=1,2$,

де функції $\varepsilon_{jk}(x)$, $\widetilde{\varepsilon}_{jk}(x)$ $j=1,2$ справджують нерівності

$$\left|\varepsilon_{jk}(x)\right|\leq C_{1+j}\,,\ \left|\widetilde{\varepsilon}_{jk}(x)\right|\leq \widetilde{C}_{1+j}\,, \tag{14}$$

а сталі $C_{1+j}$, $\widetilde{C}_{1+j}$, $j=1,2$, не залежать від $k$, $x$.

Встановимо оцінки для функції $f_{1k}(x)$, $k\in\mathbf{Z}$, виразивши її при $k\neq 0$ через фундаментальну систему $g_{1k}(x)$, $g_{2k}(x)$, $k\in\mathbf{Z}/\{0\}$, та використавши оцінки (14).

Легко перевірити, що

$$f_{1k}=\frac{g'_{2k}(0)g_{1k}(x)-g'_1(0)g_{2k}(x)}{W[g_{1k},g_{2k}](0)} \tag{15}$$

де $W[g_{1k},g_{2k}](x)=g_{1k}(x)g'_{2k}(x)-g_{2k}(x)g'_{1k}(x)$ – вронскіан $g_{1k}(x)$, $g_{2k}(x)$. Із рівностей (12), (13) випливає, що

$$W[g_{1k},g_{2k}](x)=-2ik(1+\upsilon_k(x)/k),$$

$$\upsilon_k(x)=\sum_{j=1}^{2}(\varepsilon_{jk}(x)+\widetilde{\varepsilon}_{jk}(x)+\varepsilon_{jk}(x)\widetilde{\varepsilon}_{3-j,k}(x)/k).$$

Оскільки з нерівностей (14) випливає, що $\left|\upsilon_k(x)\right|<C_4$, $x\in(0,A)$, $k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}$, то з формул (15) отримуємо, що виконуються нерівності

$$\max_{l\in[0,L]}|f_{1k}^{(q)}(l)|\leq C_5(1+|k|)^q,\qquad q=0,1,\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\} \tag{16}$$

Із оцінок (16) та формули Ліувілля для вронскіана одержуємо, що

$$(1+|k|)^{-1}=(1+|k|)^{-1}|f_{1k}(x)f'_{2k}(x)-f'_{1k}(x)f_{2k}(x)|\leq$$
$$\leq C_6\max\{|f_{2k}(x)|,|f'_{2k}(x)|\},\ k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\} \tag{17}$$

Оскільки $0<q(x)\leq Q$, $x\in[0,A]$, а розв’язок рівняння

$$y''+Qk^2y(x)=0,$$

$y(x)=\sin(\sqrt{Q}kx)$ має на проміжку $[0,A]$ $\left[\frac{A\sqrt{Q}}{\pi}\right]|k|$ нулів, то за лемою 2 функція $f_{2k}(x)$ може мати на $[0,A]$ не більше, ніж $C_7\,|k|$ нулів.

Через $E_{\gamma_1}(l,k)$, $k \in \mathbf{Z}$, позначимо об'єднання всіх відкритих інтервалів, які містять точку $l \in (0,A]$ і цілком містяться в множині $E_{\gamma_1}(k)$. Очевидно, що $E_{\gamma_1}(l,k)$ – відкритий інтервал, причому для довільних $l_1, l_2 \in E_{\gamma_1}(k)$ або $E_{\gamma_1}(l_1,k) \bigcap E_{\gamma_1}(l_2,k) = \varnothing$, або $E_{\gamma_1}(l_1,k) = E_{\gamma_1}(l_2,k)$.

Нехай жоден з кінців інтервалу $E_{\gamma_1}(l,k) = (\alpha_k, \beta_k)$, де $l \in E_{\gamma_1}(k)$, не співпадає з кінцями проміжку $[0,A]$. З нерівності (11) випливає строга монотонність функцій $f_{2k}(x)$ і, отже, своїх екстремальних значень вона набуває на ньому в точках $\alpha_k, \beta_k$. З максимальності інтервалу $E_{\gamma_1}(l,k)$ і того, що жоден з кінців $\alpha_k, \beta_k$ не співпадає ні з $0$, ні з $A$, випливає, що $f_{2k}(\alpha_k) f_{2k}(\beta_k) < 0$. З теореми Больцано-Коші про проміжне значення та строгої монотонності $f_{2k}$ на $E_{\gamma_1}(l,k)$ дістаємо, що на інтервалі $E_{\gamma_1}(l,k) = (\alpha_k, \beta_k)$ знаходиться рівно один нуль функції $f_{2k}(x)$.

Отже, множину $E_{\gamma_1}(k)$, якщо вона не порожня, утворюють попарно неперетинні інтервали $I_s^{\gamma_1}(k) = (\lambda_{1k}, \lambda_{2k})$, $s = 1, \ldots, N(k)$, кожен з яких або містить рівно один нуль функції $f_{2k}(x)$, або має одним зі своїх кінців точки $0$, $A$. Тому $N(k) \le C_8(2 + |k|)$. За теоремою Лагранжа знайдеться така точка $\lambda_{3k}$, що

$$|f_{2k}(\lambda_{1k}) - f_{2k}(\lambda_{2k})| = |f'_{2k}(\lambda_{3k})| \operatorname{mes}_{\mathbf{R}} I_s^{\gamma_1}(k).$$

З нерівностей (14) і того, що $|f'_{2k}(\lambda_{3k})| > (1+|k|)^{-1}$, випливає нерівність

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{R}} I_s^{\gamma_1}(k) \le 2(1+|k|)^{-\gamma_1+1}. \tag{13}$$

Нехай $\bigcup\limits_{s=1}^{M(k)} J_s^{\gamma_1}(k) = [0,A] \setminus \bigcup\limits_{s=1}^{N(k)} I_s^{\gamma_1}(k)$, де $N(k) = M(k) + 1$.

Для кожного $s = 1, \ldots, M(k)$ розглянемо таку множину

$$J_s^{\gamma_1,\gamma}(k) = \{l \in J_s^{\gamma_1}(k) : |\Delta_{0,0}(k,l)| < (1+|k|)^{-\gamma}\}$$

Оскільки на $J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)$ виконується $|d\Delta_{0,0}(k,l)/dl| > (1+|k|)^{-\gamma_1}$, то функція $\Delta_{0,0}(k,l)$ строго монотонна на $J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)$. Тоді або $\operatorname{mes} J_s^{\gamma_1,\gamma}(k) = 0$, або $J_s^{\gamma_1,\gamma}(k) = (l_{1k}, l_{2k}) \subset J_s^{\gamma_1}(k)$. За теоремою Лагранжа знайдеться така $\xi$, що

$$|\varDelta_{0,0}(k,l_{1k})-\varDelta_{0,0}(k,l_{2k})|=\left|\frac{d\varDelta_{0,0}(k,l)}{dl}\right|_{l=\xi}\left|\mathrm{mes}_{\mathbf{R}}\,J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)\right..$$

З того, що $|\varDelta_{0,0}(k,l)|<(1+|k|)^{-\gamma}$ і $|d\,\varDelta_{0,0}(k,l)/dl|>(1+|k|)^{-\gamma_1}$, $l\in J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)$, випливає нерівність

$$\mathrm{mes}_{\mathbf{R}}\,J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)\le 2(1+|k|)^{-\gamma+\gamma_1}.$$

Таким чином, множина $E_\gamma(k)$ міститься в об’єднанні

$$\bigcup_{s=1}^{N(k)} I_s^{\gamma_1}(k)\bigcup\bigcup_{s=1}^{M(k)} J_s^{\gamma_1,\gamma}(k).$$

Тоді для $\gamma>\gamma(\rho)$ виконуються включення

$$E_\gamma=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\ge N}E_\gamma(k)\subset\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{|k|\ge N}\bigcup_{s=1}^{N(k)}I_s^{\gamma_1}(k)\bigcup\bigcup_{s=1}^{M(k)}J_s^{\gamma,\gamma_1}(k)$$

Тому кожна точка множини $E_\gamma$ належить до нескінченої кількості або проміжків $I_s^{\gamma_1}(k)$, $s=1,\dots,N(k)$, або проміжків $J_s^{\gamma_1,\gamma}(k)$, $s=1,\dots,M(k)$, $k\in\mathbf{Z}$. З нерівностей (12) випливає, що при $\gamma>\gamma(\rho)$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left(\sum_{s=1}^{N(k)}(\mathrm{mes}_{\mathbf{R}}\,I_s^{\gamma_1}(k))^{\rho}+\sum_{s=1}^{M(k)}(\mathrm{mes}_{\mathbf{R}}\,J_s^{\gamma_1,\gamma}(k))^{\rho}\right)\le C_9\sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+|k|)^{-1-\varepsilon\rho}<\infty$$

Тоді за лемою 1 $\rho$-міра Гаусдорфа множини $E_\gamma$ дорівнює нулеві, якщо $\gamma>\gamma(\rho)$.

З формули (11) для кожного $k\in\mathbf{Z}$ випливає рівність $\{l\in[0,A]:d\varDelta_{0,0}(k)/dl=0\}=\{l\in[0,A]:f_{2k}(l)=0\}$. Оскільки для кожного $k\in\mathbf{Z}$ функція $f_{2k}(x)$ має скінчену кількість нулів на $[0,A]$, то за теоремою Ролля для кожного $k\in\mathbf{Z}$ множина $\{l\in[0,A]:\varDelta_{0,0}(k)=0\}$ – скінченна, а отже множина $S=\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{l\in[0,A]:\varDelta_{0,0}(k)=0\}$ є не більш ніж зліченною. Оскільки $(0,A]\setminus M_\gamma\subset E_\gamma\bigcup S$, то з монотонності міри Гаусдорфа відносно включення множин і того, що дві множини, які відрізняються на не більш ніж зліченний доданок, мають однакову міру Гаусдорфа, випливає, що $H^{\rho}((0,L]\setminus M_\gamma)=0$, якщо $\gamma>\gamma(\rho)$.

### *Література*

1. Берник В.И., Мельничук Ю.В. Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы варционного исчисления – М.: Наука, 1980. – 288 с.

3. Кузь А.М. Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь, гіперболічних за Гордінгом / А. М. Кузь, Б. Й. Пташник // Укр. мат. журн. – 2013. – Т. 65, № 2. – С. 252. – 265.
4. Медвідь О. М., Симотюк М.М. Інтегральна задача для лінійних рівнянь з частинними похідними // Мат. студії. – 2007. – Т.28, № 2. – С.115–140.
5. Пяртли А.С. Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функц. анализ и его прил. – 1969. – 3, вып. 4. – С. 59–62.
6. Симотюк М. М. Задача з доточковими умовами для рівняння з псевдо- диференціальними операторами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 1. – С. 29–35.
7. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. – 448 с.
8. Kalenyuk P. I., Nytrebych Z. M., Kuduk G., Symotyuk M.M. Integral problem for apartial differential equation of high order in an infinite strip // J. Math. Sci., vol. 231, Iss. 4, pp. 495–506, 2018.
9. Asanova A. T. Solvability of a nonlocal problem for a hyperbolic equation with integral conditions // Electronic Journal of Di□erential Equations. – 2017, No. 170, pp. 1–11.
10. Merad A., Bousiani A. Numerical solutions of the hyperbolic equation with purely integral condition by using Laplace transform method // Palestine Journal of Mathematics. – 2015. Vol. 4(1), p. 30 – 36.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 14.12.2018 р.*
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф.* ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці),*
*д.ф.-м.н., професором* ***Ільківим В.С.*** *(м. Львів)*

## METRICAL ESTIMATIONS OF DETERMINANT OF THE INTEGRAL PROBLEM FOR EQUATION OF VIBRATING OF STRING

**O. M. Medvid[1], M. M. Symotyuk[1], I. R. Tymkiv[2]**
*[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str., 3-b;*
*e-mail:kondrativ@ukr.net, quaternion@ukr.net*
*[2]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 15, ph: +380 (342) 72-71-31;*
*e-mail:tymkiv_if@ukr.net*

*Metrical theorems are inprocess set about estimations from below small denominators that arose up at investigational existence of periodic at times decision of task with integral conditions as moments after a spatial variable for equalization of small vibrating of string. For leading to of metrical estimations the concept of fractal measure and dimension of Hausdorff is from below applied.*

***Key words:*** *integral conditions, covering of the set, Hausdorff measure, Hausdorff dimension.*