Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.927.5, 517.984.5
DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-26-37

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРНОГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ, ЯКІ МІСТЯТЬ ІНВОЛЮЦІЮ

Я. О. Баранецький
Національний університет «Львівська політехніка;
79013, м. Львів, вул. Бандери, 12; e-mail: baryarom@ukr.net

Досліджується задача з умовами Діріхле для диференціального рівняння 2n-го порядку, коефіцієнти якого є несамосопряженими операторами. Визначено власні значення і власні функції задачі. Отримано достатні умови, при яких система власних функцій оператора задачі є базою Ріса. Встановлено умови існування і єдиності розв'язку задачі з однорідними крайовими умовами, який побудовано у вигляді розвинення за системою її власних функцій.

Ключові слова: *диференціально-операторне рівняння, власне значення, база Ріса, оператор інволюції, оператор перетворення.*

1. Основи теорії диференціальних рівнянь з необмеженими операторними коефіцієнтами розвинуто в роботах Хілле і Йосіди. Вони встановили і довели перші теореми про існування розв'язку задачі Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння для функцій зі значеннями в банахових просторах. Серед робіт на цю тему слід відзначити роботи Като Т., Крейна С. Г., Мізохати С., Філліпса Р. С. Крайові задачі для лінійних диференціально-операторних рівнянь використовуються в моделюванні крайових задач для диференціальних рівнянь з частковими похідними, зокрема, при дослідженні нелокальних задач. Вагомі результати, що стосуються теорії крайових задач для диференціально-операторних рівнянь отримані в роботах Вішика М.І., Бохнера М., Горбачук В. І. і Горбачука М. Л., Дезіна О. О., Дубінського Ю. В., Кочубея А. Н., Ліонса Ж.-Л., Михальця В. А., Романко В. К., Шахмурова В. Б., Трібеля Х., Якубова С., Юрчука Н. Ю.

За останні роки значно збільшилася кількість публікацій присвячених вивченню властивостей оператора інволюції в різних розділах теорії звичайних диференціальних рівнянь (див. [1, 2, 7, 9, 11, 12, 14]), диференціальних рівнянь з частковими похідними (див. [6, 10, 13, 15, 16]) та диференціальних рівнянь з операторними коефіцієнтами (див. [3, 4, 5]).

Надалі використаємо такі позначення: H – сепарабельний гільбертовий простір, $A: H \to H$ – лінійний, замкнутий оператор з дискретним спектром $\sigma_p(A) := \{z_k \in \mathbf{R} : z_k := a(k^\gamma),\, k = 1,2,\ldots,\, a,\, \gamma > 0\}$, $V(A) = \{v_k \in H,\, k = 1,2,\ldots\}$ – система власних функцій оператора, яка утворює базу Ріса у просторі H, $W(A) = \{w_k \in H,\, k = 1,2,\ldots\}$ – біортогональна система, $(u,v;H(A^m)) := (u,v;H) + (A^m u, A^m v;H)$, $m \ge 0$, H_q, $H_0 := L_2(0,1)$, $Iu(t) \equiv u(1-t)$ – оператор інволюції в просторі H_0, $H_0 = H_{0,0} \oplus H_{1,0}$, де $H_{0,1} := \{v(t) \in H_0 : v(t) \equiv v(1-t)\}$, $H_{0,1} := \{v(t) \in H_0 : v(t) \equiv -v(1-t)\}$, $W := W_2^{2n}(0,1)$, $n \in \mathbf{N}$ – деяке натуральне число, W^* – простір лінійних неперервних функціоналів над W, $H_1 := L_2((0,1);H)$, $\|u(t);H_1\| \equiv \|\|u(t);H\|;H_0\| < \infty$, D_t – сильна похідна в просторі H_1, $H_2 := \{v(t) \in H_0 : v(t) \equiv -v(1-t)\}$, $\|u;H_2\|^2 := \|u;H_1\|^2 + \|D_t^{2n}u;H_1\|^2 + \|A^{2n}u;H_1\|^2 < \infty$, $[H^m;H^q]$ – алгебра лінійних неперервних операторів $H^m \to H^q$, $m,\, q \ge 0$.

Розглянемо крайову задачу

$$Lu = (-1)^n D_t^{2n}u + \beta A^{2n}u + \sum_{r=1}^{n} A^{2n-2r}(\alpha_r D_t^{2r-1}u + \beta_r D_t^{2r-1}Iu) = f, \quad (1)$$

$t \in (0,1)$, $f \in H_1$, $\alpha_r\ \beta_r \in \mathbf{R}$, $r = 0,1,\ldots,n$.

$$\ell_j u := D_t^{2j-2}u(0) + D_t^{2j-2}u(1) = 0, \quad (2)$$

$$\ell_{n+j} u := D_t^{2j-2}u(0) - D_t^{2j-2}u(1) = 0,\ j = 1,2,\ldots,n. \quad (3)$$

Розв'язком задачі (1) – (3) будемо називати функцію $u \in H_2$, яка задовольняє рівності: $\|Lu - f; H_1\| = 0$, $\left\|\ell_{j+ni}u; H(A^{m_j})\right\| = 0$, де $m_j = 2n - 2j - \frac{1}{2}$, $j = 1,2,\ldots,n$, $i = 0,1$.

Розглянемо наступні умови

Умова P_1: $\beta_q = \alpha_q$, $q = 0,1,\ldots,n-1$.

Умова P_2: $\beta_q = -\alpha_q$, $q = 0,1,\ldots,n-1$.

Умова P_3: $\beta \ge 0$.

Нехай L – оператор задачі (1) – (3) ,

$$\mathrm{L}u = (-1)^n D_t^{2n} u + \beta A^{2n} u + \sum_{r=0}^{n-1} A^{2n-2r-1}(\alpha_r D_t^{2r-1} u + \beta_r D_t^{2r-1} I u),$$

$u \in D(\mathrm{L})$, $D(\mathrm{L}) := \{\ell_j u = 0,\ j = 1,2,\dots,2n\}$, L_0 – оператор крайової задачі

$$L_0 v := (-1)^n D_t^{2n} v + \beta A^{2n} v = f,\ \ell_j v = 0,\ j = 1,2,\dots,2n. \tag{4}$$

$\mathrm{L}_0 v := (-1)^n D_t^{2n} v + \beta A^{2n} v$, $v \in D(\mathrm{L}_0)$, $D(\mathrm{L}_0) := \{\ell_j v = 0,\ j = 1,2,\dots,2n\}$.

Основними результатами роботи є наступні теореми:

Теорема 1. *Нехай справджується одна з умов* P_1 *або* P_2. *Тоді для будь-яких* $\beta_q \in \mathbf{R}$, $q = 0,1,\dots,n-1$, *оператор* L *має власні значення та система власних функцій* $V(L)$ *оператора* L *є базою Ріса простору* H_1.

Теорема 2. *Нехай справджується одна з умов* P_1 *або* P_2 *та умова* P_3. *Тоді для будь якої функції* $f \in H_1$ *існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3) у вигляді розвинення в ряд за системою власних функцій* $V(\mathrm{L})$ *оператора* L.

Надалі вивчимо випадок виконання умови P_1.

2. Розглянемо розв'язки спектральної задачі

$$L_0 v := (-1)^n D_t^{2n} v + \beta A^{2n} v = \lambda v,\ \lambda \in C,\ \ell_j v = 0,\ j = 1,2,\dots,2n, \tag{5}$$

у вигляді добутку

$$v(t) := y(t) v_k,\ y(t) \in W_2^{2n}(0,1),\ k = 1,2,\dots . \tag{6}$$

Для визначення невідомої функції $y(t)$, отримаємо спектральну задачу

$$(-1)^n y^{(2n)} + \beta z_k^{2n} y = \lambda y,\quad \lambda \in C, \tag{7}$$

$$\ell_0 y := y^{(2j-2)}(0) + y^{(2j-2)}(1) = 0, \tag{8}$$

$$\ell_{0n+j} y := y^{(2j-2)}(0) - y^{(2j-2)}(1) = 0,\ j = 1,2,\dots,n. \tag{9}$$

Нехай $\rho_{r,k,\lambda}$ – корені рівняння $(-1)^n \rho^{2n} + \beta z_k^{2n} = \lambda$, яке є характеристичним для диференціального рівняння (7), вибрані так, що

$\mathrm{Re}\,\rho_{n,k,\lambda} \le \mathrm{Re}\,\rho_{n-1,k,\lambda} \le \dots \le \mathrm{Re}\,\rho_{1,k,\lambda} = 0$.

Фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння (7) визначимо співвідношеннями

$$z_{0,j,k}(t,\lambda) = \tfrac{1}{2}(\exp \rho_{r,k,\lambda} t + \exp \rho_{r,k,\lambda}(1-t)) \in H_{0,0}, \tag{10}$$

$$z_{1,j,k}(t,\rho) := \tfrac{1}{2}(\exp \rho_{r,k,\lambda} t - \exp \rho_{r,k,\lambda}(1-t)) \in H_{1,0},\ j = 1,2,\dots,n. \tag{11}$$

Зауваження 1. *Для функцій (10), (11) справджуються співвідношення*

$$\ell_{0,n+j} z_{0,j,k}(t,\rho) = \ell_{0,j} z_{1,j,k}(t,\rho) = 0,\ j = 1,2,\dots,n. \tag{12}$$

Тому, підставляючи загальний розв'язок рівняння (7)

$\sum_{j=1}^{n} C_j z_{0,j,k}(t,\lambda) + C_{n+j} z_{1,j,k}(t,\lambda)$ у крайові умови (8), (9), для значення невідомих C_j, $j = 1,2,...,2n$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $2n$.

Визначник системи $\Delta_k(\rho) = \Delta_{0,k}(\rho)\Delta_{1,k}(\rho)$ зображується формулою

$$\Delta_k(\rho) = (\prod_{j=1}^{n} \rho_{r,k,\lambda})^{n(n-1)} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \exp 2\rho_{r,k,\lambda}\right).$$

Тому самоспряжений оператор $\mathrm{L}_{0,k}$ задачі має власні значення $\lambda_{s,q,k} = \rho_{s,q}^{2n} + z_k^{2n}$ та власні функції $v_{s,q}(t, \mathrm{L}_{0,k}) := \sqrt{2}\sin \rho_{s,q} t$, $\rho_{s,q} = \pi(2q - s + 1)$, $s = 0,1$, $q = 1,2,...$, які утворюють ортонормовану базу простору H_0.

Беручи до уваги, що добуток ортонормованої бази $V(\mathrm{L}_{0,k})$ простору H_0 та бази Ріса $V(A)$ простору H є базою Ріса простору H_1, отримуємо наступне твердження:

Теорема 3. *Оператор* L_0 *має множину власних значень* $\sigma(\mathrm{L}_0) := \{\lambda_{s,q,k} \in R : \lambda_{s,q,k} = \rho_{s,q}^{2n} + z_k^{2n},\ s = 0,1,\ q,\ k = 1,2,...\}$ *та систему* $V(\mathrm{L}_0) := \left\{v_{s,q,k}(t, \mathrm{L}_0) \in H_1 : v_{s,q,k}(t, \mathrm{L}_0) := v_{s,q}(t, \mathrm{L}_{0,k}) v_k,\ s = 0,1,\ q,\ k = 1,2,...\right\}$ *власних функцій, яка є базою Ріса простору* H_1.

3. Розглянемо для рівняння

$$(-1)^n D_t^{2n} u(t) + \beta A^{2n} u(t) + \alpha(D_t^{2n-1} u(t) + D_t^{2n-1} u(1-t)) = \lambda u(t), \quad (11)$$

де $\alpha := \beta_1$, задачу з умовами (2).

Нехай $\mathrm{L}_1 := L_{1,\alpha,\beta}$ оператор задачі (11), (2), (3)

$$L_1 u := (-1)^n D_t^{2n} u(t) + \beta A^{2n} u(t) + \alpha(D_t^{2n-1} u(t) + D_t^{2n-1} u(1-t)),$$

$$\mathrm{u} \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_1),\ \mathrm{D}(\mathrm{L}_1) := \left\{v \in H_2, \ell_j v = 0,\ j = 1,2,...,2n\right\}.$$

Розв'язки задачі (11), (2), (3) визначимо у вигляді добутку (6). Для знаходження невідомої функції $y(t) \in W_2^{2n}(0,1)$, отримаємо для рівняння

$$(-1)^n y^{(2n)}(t) + \beta z_k^{2n} y(t) + \alpha(y^{(2n-1)}(t) + y^{(2n-1)}(1-t)) = \lambda y(t), \quad (12)$$

задачу з умовами (8), (9).

Нехай $\mathrm{L}_{1,k} := L_{1,k,\alpha,\beta}$ оператор задачі (11), (8), (9)

$$L_{1,k} y := (-1)^n y^{(2n)}(t) + \beta z_k^{2n} y(t) + \alpha(y^{(2n-1)}(t) + y^{(2n-1)}(1-t)),$$

$$y \in \mathrm{D}(\mathrm{L}_{1,k}),\ \mathrm{D}(\mathrm{L}_{1,k}) := \left\{y \in W_2^{2n}(0,1),\ \ \ell_{0,j} y = 0,\ j = 1,2,...,2n\right\}.$$

Лема 1. *Нехай справджується умова* P_1. *Тоді оператор* $\mathrm{L}_{1,k}$ *має множину власних значень*

$$\sigma\left(\mathrm{L}_{0,k}\right) := \{\lambda_{s,q,k} \in R : \lambda_{s,q,k} = \rho_{s,q}^{2n} + z_k^{2n},\ s = 0,1,\ q = 1,2,\ldots\},$$

та систему власних функцій $V(\mathrm{L}_{0,k})$*, яка є повною та мінімальною в просторі* H_0.

Доведення. Безпосередньою підстановкою переконуємось, що оператор $\mathrm{L}_{1,k}$ має власні функції

$$v_{1,q}(t, \mathrm{L}_{1,k}) := v_{1,q}(t, \mathrm{L}_{0,k}),\quad k = 1,2,\ldots, \tag{13}$$

які відповідають власним значенням $q = 1,2,\ldots$.

Нехай $\omega_{r,q,k} = \omega_{r,q,k}(\lambda_{q,k})$ – корені рівняння $(-1)^n \omega^{2n} + \beta z_k^{2n} = \lambda_{1,q,k}$, яке є характеристичним для диференціального рівняння (12), при $\lambda = \lambda_{1,q,k}$, вибрані так, що $\operatorname{Re}\omega_{n,q,k} \le \operatorname{Re}\omega_{n-1,q,k} \le \ldots \le \operatorname{Re}\omega_{1,q,k} = 0,\ \omega_{1,q,k} = 2\pi q i,\ q = 1,2,\ldots$.

Розглянемо системи функцій

$$z_{1,q,k}(t) := \sin\rho_{1,q}t \in H_{1,0}, \tag{14}$$

$$z_{0,q,k}(t) := (1-2t)\sin\rho_{1,q}t \in H_{0,0}, \tag{15}$$

$$z_{r,q,k}(t) \equiv \tfrac{1}{2}\left(1 + e^{\omega_{r,q,k}}\right)^{-1}\left(e^{\omega_{r,q,k}t} + e^{\omega_{r,q,k}(1-t)}\right) \in H_{1,0}, \tag{16}$$

$r = 2,3,\ldots,n$, $q = 1,2,\ldots$, та квадратну матрицю порядку n, елементи якої означимо наступним способом: елементи p -ого рядка складаються із функцій (15), (16) елементи інших рядків є числами

$$c_{s,r,q,k} = \rho_{1,q}^{2-2s}\ell_{0,s}z_{r,q,k}(t) = \left(\omega_{r,q,k}\rho_{1,q}^{-1}\right)^{2s-2},\ \ s \ne p,$$

$$c_{s,1,q,k} = (-1)^{s-2}\rho_{1,q}^{-1},\ s = 1,2,\ldots,n,\ \ q = 1,2,\ldots.$$

Визначник отриманої матриці позначимо через $z_{1,p,q,k}(t)$.

Зауваження 2. *Для будь-якого фіксованого* k*, при* $q \to \infty$ *маємо:*

$$\delta_{1,q}(\lambda_k) = \omega_{1,q,k}\rho_{1,q}^{-1} = 1,\ \delta_{r,q,k} = \omega_{r,q,k}\rho_{1,q}^{-1} = \varepsilon_r\left(1 + O\left(q^{-1}\right)\right),$$

де ε_r *– корені рівняння* $\varepsilon^{2n} = 1$*, занумеровані так, що* $\operatorname{Im}\varepsilon_q < 0$*,* $r = 2,3,\ldots,n$.

Підсталяючи функцію $z_{1,p,q,k}(t)$ у крайові умови (8), (9), отримаємо рівності

$$\ell_{0,r}z_{1,p,q,k}(t) = 0,\ r \ne p,$$

$$\ell_{0,p}z_{1,p,q,k}(t) = c_{p,q,k}\rho_{1,q}^{2p-2},\ c_{p,q,k} = (-1)^{p-1}\sqrt{2}W_{q,k},\ \ q = 1,2,\ldots,$$

де $W_{k,q}$ – визначник Вандермонда порядку n, побудований за числами $\delta_{r,q,k}^2$, $q = 1,2,\ldots,n$.

Нехай $y_{2,p,q,k}(t) := c_{p,q,k} y_{1,p,q,k}(t)$.

Тоді,

$$\ell_{0,r} y_{2,p,q,k}(t) = 0,\ r \neq p\ ,\ \ell_{0,p} y_{2,p,q,k}(t) = \rho_{1,q}^{2p-2}. \qquad (17)$$

Зауваження 3. *Для будь-якого натурального* k *числова послідовність* $\{W_{k,q}\}_{q=1}^{\infty}$ *при* $q \to \infty$ *збігається до визначника Вандермонда* $W\left(\varepsilon_2^2, ..., \varepsilon_n^2\right)$, *який побудований за числами* $\varepsilon_2^2, \varepsilon_3^2, \ldots, \varepsilon_n^2$. *При цьому послідовність* $\delta_{q,k_j}\left(\lambda_k\right)$ *збіжна до* ε_q, $q = 1, 2, \ldots$.

Тому $0 < C_1 \leq |c_{p,q,k}|^{-1} \leq C_2$.

Власні функції $v_{1,q,k}\left(t, L_{1,k}\right)$ оператора $L_{1,k}$ означимо сумою

$$v_{1,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right) := \sqrt{2} \sin \rho_{1,q} t + \eta_{0,q,k} z_{0,q,k}(t) + \sum_{p=1}^{n} \eta_{p,q,k} z_{1,p,q,k}(t). \qquad (18)$$

Для визначення параметра $\eta_{0,q,k}$ підставимо вираз (18) в умови (8), (9), отримаємо

$$\eta_{0,q,k} = -n^{-1}(p-1)\beta\,, \eta_{p,j,k} = -\sqrt{2}\left(\rho_{1,k}\right)^{1-2p} \ell_{0,p} v_{1,q}(t, \mathrm{L}_{0,k}), \qquad (19)$$

$q = 1, 2, \ldots$.

Невідомі $\eta_{p,s,q,k}$ знаходимо, враховуючи що $v_{1,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right) \in D\left(\mathrm{L}_{1,k}\right)$

$$\eta_{p,q,k} = -n^{-1}(p-1)\rho_{1,q}^{-1} W_{q,k}^{-1},\ q = 1, 2, \ldots. \qquad (20)$$

Отже, оператор $\mathrm{L}_{1,k}$ має систему власних функцій (13), (18) – (20).

Повнота системи власних функцій $V\left(\mathrm{L}_{1,k}\right)$ в просторі H_0 доводиться від протилежного.

Нехай функція $h = h_0 + h_1 \in H_0$, $h_0 \in H_{0,0}, h_1 \in H_{1,0}$ є ортогональна до кожного елемента системи $V\left(\mathrm{L}_{1,k}\right)$.

Оскільки система функцій $V_0\left(\mathrm{L}_{1,k}\right) := \left\{v_{0,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right) \in H_0;\ q = 1, 2, \ldots\right\}$ є ортонормованою базою простору $H_{0,0}$, то $h_0 = 0$, $h = h_1 \in H_{0,1}$.

Беручи до уваги припущення ортогональності, із співвідношення (18) отримуємо

$$(h_1, v_{1,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right); H_0) = (h_1, v_{1,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{0,k}\right); H_0),\ q = 1, 2, \ldots.$$

Оскільки система функцій $\{\sqrt{2} \sin \rho_{1,q} t, q = 1, 2, \ldots\}$ є ортонормованою базою простору $H_{1,0}$, то $h_1 = 0$.

Отже, система власних функцій $V\left(\mathrm{L}_{1,k}\right)$ є повною в просторі H_0.

Розглянемо оператор перетворення $R(\mathrm{L}_{1,k}) := E + S(\mathrm{L}_{1,k})$, $R(\mathrm{L}_{1,k}) v_{s,q}\left(t, \mathrm{L}_{0,k}\right) := v_{s,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right)$, $s = 0{,}1,\ k,\ q = 1{,}2,\dots$.

Беручи до уваги, що $S^2(\mathrm{L}_{1,k}) = 0$ та щільність області визначення оператора $R(\mathrm{L}_{1,k})$, маємо існування оберненого оператора $R^{-1}(\mathrm{L}_{1,k}) = S(\mathrm{L}_{1,k})$.

Отже, система $V\left(\mathrm{L}_{1,k}\right)$ є мінімальною в просторі $H_{1,0}$.

Лему доведено.

4. Оператори перетворення для диференціальних рівнянь парного порядку.

Виберемо $n+1$ послідовність дійсних чисел $\left\{\theta_{q,p}\right\}_{q=1}^{\infty}$, $p = 0,1,\dots,n$, які позначимо через Θ та розглянемо оператор $B(\Theta)$, власні значення якого збігаються з власними значеннями оператора $\mathrm{L}_{0,k}$, а власні функції визначаються співвідношеннями

$$v_{0,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right) := \sqrt{2} \sin \rho_{0,q} t, \tag{21}$$

$$v_{1,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{1,k}\right) := \sqrt{2} \sin \rho_{1,q} t + \theta_{0,q} z_{0,q,k}(t) + \sum_{p=1}^{n} \theta_{p,q} z_{1,p,q,k}(t),\quad q = 1{,}2,\dots. \tag{22}$$

Розглянемо оператор $R(B(\Theta)) := E + S(B(\Theta)) : H_0 \to H_0$, який відображає систему власних функцій $V(\mathrm{L}_{0,k})$ оператора $\mathrm{L}_{0,k}$ в систему власних функцій $V(B(\Theta))$ оператора $B(\Theta)$.

Із означення оператора $B(\Theta)$, отримуємо $S(B(\Theta)) : H_{1,0} \to H_{0,0}, H_{0,0} \to 0$, $S^2(B(\Theta)) = 0$. Тому існує оператор $R^{-1}(B(\Theta)) = E - S(B(\Theta))$.

Лема 2. *Для будь-яких послідовностей* $\left\{\theta_{p,q}\right\}_{q=1}^{\infty}$, $p \in \{0,1,\dots,n\}$, *система власних функцій* $V(B(\Theta))$ *оператора* $B(\Theta)$, *є повною та мінімальною в просторі* H_0.

Система функцій $V(B(\Theta))$ *є базою Ріса в просторі* H_0 *тоді та лише тоді, коли послідовності* Θ *є обмеженими.*

Доведення леми проводиться від протилежного, аналогічно доведенню теореми 3.

Із обмеженості послідовностей (19), (20) та формули (18) отримуємо: системи функцій $V(\mathrm{L}_{0,k})$ та $V(B(\Theta))$ є квадратично близькими.

Тому, застосовуючи теорему Н. К. Барі (див.[8]), отримуємо наступне твердження.

Лема 3. *Нехай справджується умова* P_1 *та послідовності* $\{\theta_{p,q}\}_{q=1}^{\infty}$ *обмежені. Тоді система функцій* $V(B(\Theta))$ *є базою Ріса в просторі* H_0.

Сукупність операторів $B(\Theta)$, власні функції яких визначені формулами (21), (22), позначимо через $\Gamma(\mathrm{L}_{0,k})$.

Зауваження 4. *На множині* $\Gamma(\mathrm{L}_{0,k})$ *можна визначити операцію множення, та довести, що* $\Gamma(\mathrm{L}_{0,k})$ *є абелевою групою.*

Теорема 4. *Нехай виконується умова* P_1. *Тоді система власних функцій* $V(\mathrm{L}_1)$ *оператора* L_1 *є базою Ріса в просторі* H_1.

Доведення. Власні функції оператора L_1визначаємо у вигляді добутку

$$v_{s,q,k}(t,\mathrm{L}_1) := v_{s,q,k}(t,\mathrm{L}_{1,k})v_k\,,\ q,\,k\in\mathrm{N},\ s\in\{0,1\}.$$

Елементи біортогональної системи $W(\mathrm{L}_1)$ визначимо співвідношеннями

$$w_{s,q,k}(t,\mathrm{L}_1) := w_{s,q,k}(t,\mathrm{L}_{1,k})w_k\,,\ q,\,k\in\mathrm{N},\ s\in\{0,1\}.$$

Система функцій $V(\mathrm{L}_1)$ є повною та мінімальною в просторі H_1, оскільки існує біортогональна система $W(\mathrm{L}_1)$.

Розглянемо допоміжну систему V_1 функцій

$$v_{0,q}^1(t) := \sqrt{2}\sin\rho_{0,q}t\,,$$

$$v_{0,q}^1(t) := \sqrt{2}\sin\rho_{1,q}t - \alpha n^{-1}z_{0,q,k}(t),\ q = 1,2,\ldots.$$

Означення 2. Повна та мінімальна в гільбертовому просторі H система $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ називається беселевою, якщо існує додатнє число C_3, що для будь-якого $g\in H$ справджується нерівність

$$\sum_{m=1}^{\infty} |(g,e_m;H)|^2 \le C_3\|g;H\|^2.$$

Лема 4. *Для будь якого дійсного числа* α, *система функцій* V_1 *є системою Беселя в просторі* H_0.

Доведення. Розвинемо довільну функцію $h\in H_0$ в ряд за системою V_1 : $\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left(g,v_{s,q,k}\left(t,\mathrm{L}_{0,k}\right);H_0\right)$, $\|h;H_0\|^2 = \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left|\left(g,v_{s,q}\left(t,\mathrm{L}_{0,k}\right);H_0\right)\right|^2$.

Оцінимо суму ряду $S(g) := \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left|\left(g,v_{s,q,k};H_0\right)\right|^2$

$$S(g) \le 2\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1} |\left(g, v_{s,q}\left(t, \mathrm{L}_{0,k}\right); H_0\right)|^2 +$$

$$+2\alpha^2 n^{-2}\sum_{q=1}^{\infty}\left((1-2t)\,g, v_{1,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{0,k}\right); H_0\right)|^2,$$

$$S(g) \le C_4 \|g; H\|^2, C_4 = 2(1+\alpha^2 n^{-2}).$$

Лему доведено.

Наслідок. $R_1 : V(\mathrm{L}_{0,k}) \to V_1$ є обмеженим та елементом групи $\Gamma(\mathrm{L}_{0,k})$. Тому існує обернений неперервний оператор.

Отже, правильною є

Лема 5. *Для будь якого дійсного числа* α*, система функцій* V_1 *є базою Ріса в просторі* H_0.

5. Доведення основних теорем.

Розглянемо для рівняння

$$(-1)^n D_t^{2n} u(t) + \beta A^{2n} u(t) + \sum_{r=1}^{n} A^{2n-2r}\beta_r (D_t^{2r-1} u(t) + D_t^{2r-1} u(1-t)) = \lambda u(t),$$

розв'язок задачі з крайовими умовами (2), (3) у вигляді добутку (6).

Для визначення невідомої функції $y(t)$ отримуємо задачу на власні значення

$$(-1)^n y^{(2n)}(t) + \beta z_k^{2n} y(t) +$$

$$+\sum_{r=1}^{n} \beta_r z_k^{2n-2r} (y^{(2r-1)}(t) + y^{(2r-1)}(1-t)) = \lambda y(t) \quad (23)$$ з крайовим умовами (8), (9).

Нехай L_k – оператор задачі (23), (8), (9).

$$L_k y := (-1)^n y^{(2n)}(t) + \beta z_k^{2n} y(t) + \sum_{r=1}^{n} \beta_r z_k^{2n-2r} (y^{(2r-1)}(t) + y^{(2r-1)}(1-t)),$$

$y \in D(\mathrm{L}_k)$, $D(\mathrm{L}_k) := \left\{ y \in W_2^{2n}(0,1) : \ \ell_{0,j} y = 0, \ j = 1, 2, \ldots, 2n \right\}$.

Лема 6. *Нехай виконується умова* P_1. *Тоді, для будь яких* $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ *оператор* L_k *має власні значення* $\lambda_{s,q,k} = \rho_{s,q}^{2n} + z_k^{2n}$, $q = 1, 2, \ldots$, *та систему власних функцій* $V(\mathrm{L}_k)$*, яка є базою Ріса в просторі* H_0.

Доведення. Визначимо парні власні функції оператора L_k. Нехай $v_{0,q,k}(t, \mathrm{L}_k) := v_{0,q,k}\left(t, \mathrm{L}_{0,k}\right)$, $q = 1, 2, \ldots$.

Підстановкою функцій $v_{0,q,k}(t, \mathrm{L}_k)$ в рівняння (23) та умови (8), (9) переконуємось, що

$v_{0,q,k}\left(t, \mathrm{L}_k\right) \in D\left(\mathrm{L}_k\right)$, $\mathrm{L}_k v_{0,q,k}\left(t, \mathrm{L}_k\right) = \lambda_{0,q,k} v_{0,q,k}\left(t, \mathrm{L}_k\right)$, $q = 1, 2, \ldots$.

Решту власних функцій шукаємо у вигляді суми

$$v_{1,q,k}\left(t,\mathrm{L}_{1,k}\right) := \sqrt{2}\sin\rho_{1,q}t + \eta_{0,q,k}z_{0,q,k}(t) + \sum_{p=1}^{n}\eta_{p,q,k}z_{1,p,q,k}(t). \quad (24)$$

$$\eta_{0,q,k} = -n^{-1}\sum_{r=1}^{n}\beta_r(r-1)z_k^{2n-2r}\rho_{1,q}^{-1-2r}, \quad q = 1,2,\ldots.$$

Підставляючи вираз (24) у крайові умови (8), (9) отримуємо

$$\eta_{p,q,k} = -n^{-1}\sum_{r=1}^{n}(-1)^r(2r-1)\beta_r W_{q,k}^{-1}z_k^{2n-2r}\rho_{1,q}^{2r-2}. \quad (25)$$

Розглянемо оператор перетворення $R(\mathrm{L}_k): H_0 \to H_0$, $R(\mathrm{L}_k) := E + S(\mathrm{L}_k)$, $R(\mathrm{L}_k)v_{s,q,k}(t,\mathrm{L}_{0,k}) := v_{s,q,k}(t,\mathrm{L}_k)$, $q,\ k \in \mathrm{N}$, $s \in \{0,1\}$.

Беручи до уваги визначення операторів $\mathrm{L}_{1,k} = \mathrm{L}_{1,k,r,\alpha}$ та комутативність групи $\Gamma(\mathrm{L}_{0,k})$, отримуємо співвідношення

$$R(\mathrm{L}_k) = \prod_{r=1}^{n}R\left(\mathrm{L}_{1,k,r,\beta_r}\right), \quad k = 1,2,\ldots. \quad (26)$$

Оператори $R\left(\mathrm{L}_{1,k,r,\beta_r}\right) \in \Gamma(\mathrm{L}_{0,k})$ є автоморфізмами простору H_0.

Тому система $V(L_k)$ є базою Ріса цього простору.

При виконанні умов P_1 аналогічне представлення має оператор $R(L)$.

Тому, беручи до уваги теорему 4, отримуємо твердження теореми 1.

Враховуючи означення бази Ріса для будь-якої функції $f \in H_1$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}f_{s,q,k}v_{s,q,k}(t,\mathrm{L}),\ f_{s,q,k} := \left(f, w_{s,q,k}(t,\mathrm{L}); H_1\right), \quad (27)$$

виконується нерівність

$$C_5\left\|f;H_1\right\|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}|f_{s,q,k}|^2 \le C_6\left\|f;H_1\right\|^2. \quad (28)$$

Доведення теореми 2. Розвинемо розв'язок $u(t)$ задачі (1)–(3) в ряд Фур'є за системою $V(\mathrm{L})$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}u_{s,q,k}v_{s,q,k}(t,\mathrm{L}),\ u_{s,q,k} := \left(u, w_{s,q,k}(t,\mathrm{L}); H_1\right). \quad (29)$$

Після підстановки (27), (29) у рівняння (1), отримаємо

$$u_{s,q,k} = \lambda_{s,q,k}^{-1}f_{s,q,k},\ \left\|u;H_1\right\|^2 \le C_7\left\|f;H_1\right\|^2, \quad C_7 = z_1^{-2}C_6C_5^{-1}.$$

Отже, $u \in H_1$. Враховуючи нерівності $\rho_{s,q}^{2n}\lambda_{s,q,k}^{-1} \le 1$, $z_k^{2n}\lambda_{s,q,k}^{-1} \le 1$, оцінимо $\left\|D_t^{2n}u;H_1\right\|^2$, $\left\|A^{2n}u;H_1\right\|^2$,

$$\left\|A^{2n}u;H_1\right\|^2 \le C_8\left\|f;H_1\right\|^2 < \infty,\ C_8 = C_6C_5^{-1},$$

$$\left\|u;H_1\right\|^2 \le C_8\left\|f;H_1\right\|^2 < \infty .$$

Беручи до уваги означення норми простору, з останніх нерівностей отримуємо: $A^{2n}u \in H_1$, $D_t^{2n}u \in H_1$, $u \in H_2$.

$$\left\|u;H_2\right\|^2 \le (2C_8 + C_7)\left\|f;H_1\right\|^2 < \infty .$$

Теорему доведено.

Література

1. Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well – posedness of an elliptic equations with an involution. E J D E. – 2015. – 284. – P. 1–8.
2. Baranetskij Ya.O., Kalenyuk P.I., Kolyasa L.I., Kopach M.I. The nonlocal multipoint problem for an ordinary differential equations of even order with the involution // Mathematchni Studii. Vol. – 2018. – 49, No1. – P. 80–94.
3. Baranetskij Ya.O., Kalenyuk P.I., Kolyasa L.I., Kopach M.I. The nonlocal problem for the differential-operator equation of the even order with the involution // Carpathian Math. Publ. – 2017. – 9, No. 2. – P. 109–119. Doi: 10.15330/cmp.9.2.109-119.
4. Baranetskij Ya.O., Demkiv I.I., Ivasiuk I.Ya., Kopach M.I. The nonlocal problem for the differential equations the order 2n with an unbounded operator coefficients with the involution // Carpathian Math. Publ. – 2018. – 10, No.1. – P. 14–30. doi: 10.15330/cmp.10.1.14-30.
5. Baranetskij Ya.O., Kalenyuk P.I., Kolyasa L.I., Kopach M.I. The nonlocal multipoint problem for an ordinary differential equations of even order with the involution // Mathematchni Studii. Vol. – 2018. – 49, No1. – P.80–94.
6. Burlutskaya M.Sh., Khromov A.P. Initial–boundary value problems for first-order hyperbolic equations with involution. Dokl. Math. – 2011. – 84, No3. – P. 783–786. doi:10.1134/S1064562411070088.
7. Cabada A., Tojo F.A.F. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. – 2014. – 412, No1. – P. 529–546. doi:10.1016/j. jmaa.2013.10.067
8. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Introduction to the Theory of Linear Not Self-Adjoint Operators.Nauka, Moscow – 1965. (in Russian).
9. Gupta C.P. Two-point boundary value problems involving reflection of the argument// Int. J. Math. Math. Sci. – 1987. – 10, No2,. – P. 361–371. doi:10.1155/S0161171287000425.
10. Kirane M., Al-Salti N. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation //J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – 9. – P. 1243–1251.
11. Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differ. Equ. – 2015. – 51, No8. P. – 984–990. doi:10.1134/S0012266115080029.

12. Kurdyumov V.P. On Rieszcz bases of eigenfunction of 2-nd order differential operator with involutionand integral boundary conditions // Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform. – 2015, 15, No4. – P. 392–405. doi:10.18500/1816-9791-2015-15-4-392-405 (in Russian).
13. Moiseev E.I., Ambartsumyan V.E. On the Basis Property of the Eigenfunctions of the Frankl Problemwith Nonlocal Evenness and Oddness Conditions of the Second Kind // Dokl. Math. – 2010, 432, No4. – P. 451– 455. doi: 10.1134/S1064562410030257 (in Russian).
14. O'Regan D. Existence results for differential equations with reflection of the argument // J. Aust. Math. Soc. – 1994 . – 57, No 2. – P. 237–260. doi:10.1017/S1446788700037538.
15. Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form // AIP Conf. Proc. – 2012. – 1470. doi:10.1063/1.4747681
16. Sadybekov M.A., Turmetov B.K. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in a ball // Eurasian Math J. – 2012. – 3, No1. – P. 143–146.

Стаття надійшла до редакційної колегії 13.12.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці),*
д.ф.-м.н., професором ***Ільківим В.С.*** *(м. Львів)*

DIRICHLET PROBLE FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF EVEN ORDER OPERATOR COEFFICIENTS THAT CONTAIN AN INVOLUTION

Ya. O. Baranetskij
National University "Lviv Polytechnic"; 79013, Lviv, st. Bandera, 12;
e-mail: baryarom@ukr.net

We study a problem with Dirichlet conditions for a differential equation of order 2n, whose coefficients are non-self-adjoint operators. It is established that the task operator has two subspaces generated by the involution operator, and two subsystems of the system of eigenfunctions, which are Riesz bases in each of the subspaces. Eigenvalues and eigenfunctions are defined. Sufficient conditions are obtained under which the system of eigenfunctions is the Rees base. The conditions for the existence of unity of the solution of the problem with homogeneous boundary conditions, constructed only as a series on the system of eigenfunctions, are established.

Key words: *differential-operator equations, eigenvalue, Riesz base, involution operator, transformation operator.*