

УДК 517.98

DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-21-25

**АЛГЕБРАЇЧНІ СТРУКТУРИ У ПРОСТОРИ
ЛІПШИЦЕВИХ ФУНКЦІЙ****М. В. Марцінків, І.-А. В. Самілів**

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: mariadubey@gmail.com, ilona.samiliv2312@gmail.com*

У статті досліджено алгебри ліпшицевих функцій метричного простору та їх скалярні гомоморфізми, використовуючи вільні банахові простори.

Ключові слова: алгебри ліпшицевих функцій, вільні банахові простори.

Попередні відомості

Розглянемо метричний простір X з додатною дійснозначною функцією $\alpha(x)$ такою, що $|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)| \leq \rho(x_1, x_2) \leq \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$, для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$. Функцію $\alpha(x)$ називають нормою метричного простору, а метричний простір з заданою нормою – нормованою множиною.

Відомо, що довільний метричний простір X є нормованим відносно норми $\alpha(x) = \rho(\theta, x)$, де θ – довільна фіксована точка простору X . Такий простір (X, α) називається простором з відміченою точкою. Позначимо $\text{Lip}_0(X, E)$ підмножину всіх ліпшицевих відображень $F(x)$ з метричного простору (X, α) з відміченою точкою θ у нормований лінійний простір E , таких, що

$$\|F(x)\| \leq L_F \alpha(x),$$

де L_F – ліпшицева стала, тобто найменша константа, при якій виконується нерівність

$$\rho_E(F(x_1), F(x_2)) \leq L_F \rho_X(x_1, x_2).$$

Легко бачити, що ліпшицеве відображення на довільному просторі з відміченою точкою належить класу $\text{Lip}_0(X, E)$ тоді і тільки тоді, коли $F(\theta) = 0$. Простір $\text{Lip}_0(X, E)$ є банаховим простором з нормою $\|F\| = L_F$. Множину всіх ліпшицевих відображень, які діють з метричного простору X з відміченою точкою θ та нормою $\alpha(x)$ у поле дійсних або комплексних чисел позначатимемо $\text{Lip}_0(X)$.

Нехай X, Y – метричні простори з відміченими точками θ_X і θ_Y відповідно. Множину ліпшицевих відображень $F: X \rightarrow Y$ таких, що $F(\theta_X) = \theta_Y$ будемо позначати $\text{Lip}_0(X, Y)$.

Відомою є наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай X – нормована множина. Існує єдиний, з точністю до ізометричного ізоморфізму банахів простір $B(X)$ над полем K , а також ізометричне вкладення $v: X \rightarrow B(X)$ такі, що*

1) *Вектори $v(x)$ є лінійно незалежними у $B(X)$ для $\alpha(x) > 0$ і лінійна оболонка елементів $v(x)$ є щільною в $B(X)$.*

2) *Довільне відображення F з $\text{Lip}_0(X, E)$ може бути продовжене до лінійного неперервного оператора $\tilde{F}: B(X) \rightarrow E$, причому $\|\tilde{F}\| = L_F$ для довільного нормованого простору E .*

3) *Якщо $K = \mathbb{R}$ або $K = \mathbb{C}$ тоді для довільної замкненої підмножини $X_0 \subset X$ з фіксованою точкою $\theta \in X_0$ вкладення $X_0 \rightarrow X$ продовжується до ізометричного (у випадку $K = \mathbb{R}$) та ізоморфного (у випадку $K = \mathbb{C}$) вкладення банахових просторів $B(X_0) \rightarrow B(X)$. Для комплексного випадку норма оператора вкладення $B(X_0) \rightarrow B(X)$ не перевищує $\sqrt{2}$.*

Твердження теореми 1 були незалежно доведені Ж. Флудом [2], В. Пестовим [4] і Н. Вівером [5]. Таким чином, простір $\text{Lip}_0(X, E)$ ізометричний до простору $L(B(X), E)$ всіх неперервних лінійних операторів з $B(X)$ в E , а простір ліпшицевих функцій $\text{Lip}_0(X)$ можна ототожити з простором лінійних неперервних функціоналів на $B(X)$, тобто $(B(X))' = \text{Lip}_0(X)$. Простір $B(X)$ називається вільним банаховим простором над метричним простором X . Деякі властивості вільних банахових просторів описані у [1], [3].

Нормована множина X з фіксованою точкою θ називається нормалізованою, якщо $\alpha(x) = 1$, для довільних $x \in X$, $x \neq \theta$. Нехай Y – метричний простір такий, що $\text{diam } Y \leq 2$. Тоді ми можемо додати фіксовану точку θ і покласти $\rho(x, \theta) = 1$ для довільних $x \in Y$. Позначимо нормовану множину $Y \cup \theta$ через Y^+ . Тоді Y^+ є нормалізованою множиною і $\text{Lip}(Y) = \text{Lip}_0(Y^+)$.

Позначимо через \mathbb{N} множину всіх повних нормалізованих множин. Нехай X є нормованою множиною і $\text{diam } X < \infty$. Тоді $\text{Lip}(X)$ є банаховою алгеброю, яка є підалгеброю алгебри всіх обмежених неперервних функцій на X . Якщо $X \in \mathbb{N}$, тоді $\text{Lip}(X)$ є унітальною банаховою алгеброю. Наступна теорема доведена у [5].

Теорема 2. Нехай X є обмеженою повною нормованою множиною, тоді множина $*$ -слабко неперервних скалярних гомоморфізмів простору $\text{Lip}(X)$ є ізометричною до X . Метрика узгоджена із $*$ -слабкою топологією на X .

Відмітимо, що в цьому випадку, $B(X)' = \text{Lip}_0 X$ є підалгеброю (без одиниці) простору $\text{Lip} X$.

Наслідок 1. Нехай $X, Y \in \mathbb{N}$ і оператор $T : B(Y) \rightarrow B(X)$ є лінійним оператором, таким що $T^* : B(X)' \rightarrow B(Y)'$ є ізоморфізмом алгебр. Тоді $T(Y) = X$, а тому X та Y є ліпшицево еквівалентними.

Доведення. Другий спряжений оператор T^{**} є відображенням між скалярнозначними гомоморфізмами з $\text{Lip}(Y) = B(Y)' \oplus C$ у скалярнозначні гомоморфізми з $\text{Lip}(X) = B(X)' \oplus C$. Дійсно, якщо φ є скалярнозначним гомоморфізмом з $\text{Lip}(X)$ і $u, v \in \text{Lip} X$, тоді

$$\begin{aligned} \varphi(T^*(uv)) &= (\varphi, T^*(uv)) = (\varphi, T^*(u)T^*(v)) = (\varphi, T^*(u))(\varphi, T^*(v)) = \\ &= (T^{**}(\varphi), u)(T^{**}(\varphi), v) = (T^{**}(\varphi), uv). \end{aligned}$$

Оскільки кожен спряжений оператор є $*$ -слабко неперервним, T^{**} відображає $*$ -слабко неперервні гомоморфізми у $*$ -слабко неперервні. Тому, звуження оператора T на Y відображає Y у X . Це вірно і для T^{-1} .

Відмітимо, що з теореми 2 випливає, що якщо T^* є ізометричним ізоморфізмом алгебр, тоді X та Y є ізометричними.

Теорема 3. Нехай X – повна нормована множина, така що $\alpha(x) \geq 1$ для довільних $x \in X$, $x \neq \theta$. Тоді існує замкнена підмножина X^η одиничної сфери $B(X) \cup \theta$ така, що $X^\eta \in \mathbb{N}$ і $B(X)$ є ізометрично ізоморфним до $B(X^\eta)$.

Доведення. Для довільної точки $x \in X$, $x \neq \theta$ покладемо $\eta(x) = \frac{x}{\|x\|}$ і $\eta(\theta) = 0$. Нехай X^η – замикання множини $\{\eta(x) : x \in X, x \neq \theta\} \cup 0$. Ясно, що $\text{span} X = \text{span} X^\eta$. Якщо $f \in \text{Lip}_0(X)$, тоді звуження f_0 лінійного функціоналу \tilde{f} на X^η є ліпшицевим відображенням і $L_{f_0} \leq L_f$. Відображення $f \mapsto f_0$ є ін'єктивним, оскільки якщо $f(x) \neq 0$, тоді $\tilde{f}(x/\|x\|) \neq 0$. З іншого боку $X \subset \text{span} X^\eta$ і звуження f' відображення \tilde{f}_0 на X є ліпшицевим відображенням і, отже, $f = f'$. Крім того,

$$\| \tilde{f}_0 \| = L_{f_0} \geq L_{f'} = L_f.$$

Таким чином, $L_{f_0} = L_f$. Отже, для довільного $z \in \text{span} X = \text{span} X^\eta$,

$$\|z\|_{B(X)} = \sup_{L_f \leq 1, f \in \text{Lip}_0(X)} |\tilde{f}(z)| \|z\|_{B(X^n)}.$$

Таким чином $B(X)$ є ізометрично ізоморфним до $B(X^n)$.

Нехай (X, ρ) – метричний простір і $x_0 \in X$. Ми можемо додати фіксовану точку θ поклавши $\rho(\theta, x_0) = 1$ і $\rho(\theta, x) = 1 + \rho(x, x_0) = \alpha(x)$ для довільних $x \in X$. Тоді (X, ρ, α) є нормованою множиною, такою що $\alpha(x) \geq 1$ для довільних $x \in (X, \rho, \alpha)$, $x \neq \theta$. Якщо X є банаховим простором, позначимо $X^+ = (X, \rho, \alpha)$ для $x_0 = 0$.

Наслідок 1. *Нехай X – банахів простір ізометричний до його гіперплощини. Тоді існує замкнена підмножина M_X одиничної сфери S_X простору X така що*

- 1) *Простір $B(X^+)$ ізоморфний до $B(M_X \cup 0)$.*
- 2) *Звуження ліпшицевого відображення з $\text{Lip}(X)$ на M_X є банаховою алгеброю, ізоморфною (як банахів простір) до $\text{Lip}(X)$.*
- 3) *Множина M_X може бути ототожнена з множиною *-слабко неперервних скалярних гомоморфізмів цієї алгебри.*

Доведення. Нехай $y_0 \in S_X$ і ϕ_0 є лінійним функціоналом на X таким, що $\|\phi_0\| = 1 = \phi_0(y_0)$. Позначимо через X_0 афінний підпростір простору X , $X_0 = y_0 + \ker \phi_0$. Множина $X_0 \cup 0$ задовольняє умови теореми 3. Позначимо через M_X замикання множини $\eta(X_0 \cup 0)$. За теоремою 3, $B(M_X)$ є ізометрично ізоморфним до простору $B(X_0 \cup 0)$, який ізоморфний до $B(X^+)$. Тому $M_X \cup 0 \in \mathcal{N}$, $\text{Lip}(M_X \cup 0)$ є банаховою алгеброю і за теоремою 2, M_X може бути ототожнена з множиною *-слабко неперервних скалярнозначних гомоморфізмів. Крім того, $\text{Lip}(M_X) = B(M_X \cup 0)' = B(X^+)' = \text{Lip}(X)$.

Література

1. Dubei M. Free Banach Spaces and Extension of Lipschitz Maps / M. Dubei, E. D. Tymchatyn, A. Zagorodnyuk // Topology, Elsevier. – 2009. – V. 48, № 2. – P. 203-213.
2. Flood J. Free topological vector spaces / J. Flood. – Canberra: Australian National University, 1975. – 109 p. (Ph.D. thesis).
3. Godefroy G. Free Banach spaces and the approximation properties / G. Godefroy, N. Ozawa // Proc. Amer. Math. Soc. – 2014. – V. 142, № 5. – P. 1681-1687.
4. Pestov V. Douady's conjecture on Banach analytic spaces / V. Pestov // C.R. Acad. Sci. Paris – 1994. – V. 319, séries I. – P. 1043-1048.

5. Weaver N. Lipschitz Algebras / N. Weaver. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1999. – 323 p.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.12.2018 р.

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Никифорчиним О.Р.**,
д.ф.-м.н., доцентом **Бандурою А.І.***

ALGEBRAIC STRUCTURES IN THE SPACES OFLIPSCHITZ FUNCTIONS

M. V. Martsinkiv, I.-A. V. Samiliv

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;

76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;

e-mail: mariadubey@gmail.com, ilona.samiliv2312@gmail.com

The algebra of Lipschitz functions of the metric space and their scalar homomorphisms are studied in this paper, using free Banach spaces.

Key words: *algebras of Lipschitz functions, free Banach spaces.*