МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.98
DOI: 10.31471/2304-7399-2018-2(46)-9-16

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ СИМЕТРИЧНИХ ПОЛІНОМІВ НА ДЕКАРТОВОМУ КВАДРАТІ КОМПЛЕКСНОГО БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ $L_\infty[0,1]$

Т. В. Василишин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

В роботі розроблено метод побудови елемента декартового квадрата комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$ всіх вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій на відрізку $[0,1]$ за наперед заданими значеннями елементарних симетричних поліномів на цьому елементі. Результати даної роботи можуть бути використані для дослідження алгебраїчного базису алгебри неперервних симетричних поліномів на декартовому квадраті комплексного банахового простору $L_\infty[0,1]$.

Ключові слова: *симетричний поліном, простір вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій.*

Вступ

Вперше симетричні поліноми на банахових просторах вимірних за Лебегом інтегровних у степені p функцій, $1 \le p < +\infty$, вивчалися у роботі [4]. Зокрема, в цій роботі побудовано алгебраїчні базиси алгебр неперервних симетричних поліномів на таких просторах (алгебраїчним базисом алгебри називають таку сукупність її елементів, що кожен елемент алгебри можна єдиним чином подати у вигляді лінійної комбінації добутків степенів елементів сукупності). Симетричні поліноми і симетричні аналітичні функції на комплексному банаховому просторі вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій $L_\infty[0,1]$ досліджувалися у роботі [2]. В цій роботі розв'язано задачу побудови елемента простору $L_\infty[0,1]$ за послідовністю наперед заданих значень так званих елементарних симетричних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$. Цей результат було використано для доведення того факту, що елементарні симетричні поліноми утворюють алгебраїчний базис алгебри неперервних симетричних поліномів на просторі $L_\infty[0,1]$, а також, для доведення того, що кожен неперервний лінійний мультиплікативний функціонал на алгебрі Фреше цілих симетричних функцій на просторі $L_\infty[0,1]$, які є обмеженими на обмежених множинах, є функціоналом обчислення значення в деякій точці простору $L_\infty[0,1]$.

В даній роботі розглянуто елементарні симетричні поліноми на декартовому квадраті простору $L_\infty[0,1]$. Розв'язано задачу побудови елемента декартового квадрата простору $L_\infty[0,1]$ за наперед заданими значеннями елементарних симетричних поліномів на цьому елементі.

Попередні відомості

Позначимо через N множину додатних цілих чисел. Нехай $L_\infty[0,1]$ – це комплексний банахів простір вимірних за Лебегом суттєво обмежених функцій $y:[0,1]\to C$, із нормою

$$\|y\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,1]} |y(t)|.$$

Нехай $(L_\infty[0,1])^2$ – це декартів квадрат простору $L_\infty[0,1]$, на якому задамо норму

$$\|x\| = max(\|x_1\|_\infty, \|x_2\|_\infty),$$

де $x=(x_1,x_2)\in (L_\infty[0,1])^2$. Нехай Ξ – це множина всіх бієкцій $\sigma:[0,1]\to[0,1]$ таких, що σ і σ^{-1} є вимірними і зберігають міру Лебега. Функцію $f:(L_\infty[0,1])^2\to C$ називають симетричною, якщо

$$f((x_1\circ\sigma, x_2\circ\sigma)) = f((x_1,x_2))$$

для всіх $(x_1,x_2)\in (L_\infty[0,1])^2$ і $\sigma\in\Xi$. Для кожного мультиіндексу $n=(n_1,n_2)\in N^2$ визначимо відображення $R_n:(L_\infty[0,1])^2\to C$ формулою

$$R_n(x) = \int\limits_{[0,1]} (x_1(t))^{n_1}(x_2(t))^{n_2}\,dt,$$

де $x=(x_1,x_2)\in (L_\infty[0,1])^2$. Зауважимо, що відображення R_n є $|n|$-однорідним симетричним поліномом, де $|n| = n_1+n_2$. Поліноми R_n називають елементарними симетричними поліномами.

Основні результати

Теорема 1. *Для кожної множини комплексних чисел* $c=\{c_n : n\in N^2\}$ *такої, що* $\sup\limits_{n\in N^2}|c_n|^{1/|n|}<+\infty$, *існує функція* $x_c\in (L_\infty[0,1])^2$ *така, що* $R_n(x_c)=c_n$ *для кожного* $n\in N^2$.

Доведення. Нехай ε_k – це k-та функція Радемахера, тобто

$$\varepsilon_k(t)=sign(\sin 2^k \pi t).$$

Відомо (див. напр. [1, с. 162] або [3, розділ 3]), що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k(t)u_k$$

збіжний майже скрізь на $[0,1]$ тоді і тільки тоді, коли ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^2$$

збіжний. Як наслідок, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k(t)}{k+1}$$

збіжний майже скрізь на $[0,1]$. Для кожного $n=(n_1,n_2)\in N^2$ визначимо функцію $p_n:[0,1]\to C^2$ формулою

$$p_n(t)=\left(\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right),\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)\right).$$

Зауважимо, що функція p_n належить простору $(L_\infty[0,1])^2$ і $\|p_n\|=1$. Послідовність функцій $\{p_n^{(l)}\}_{l=1}^{\infty}$, де

$$p_n^{(l)}(t)=\left(\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right),\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)\right),$$

поточково збігається до p_n. Тому для кожного $m=(m_1,m_2)\in N^2$, згідно із теоремою про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега,

$$R_m(p_n)=\lim_{l\to\infty}R_m\left(p_n^{(l)}\right).$$

Зауважимо, що

$$R_m\left(p_n^{(l)}\right)=\int\limits_{[0,1]}\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}m_1\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}m_2\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)dt=$$

$$=\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}\mathrm{m}_1\frac{1}{2}\right)\int\limits_{[0,1/2]}\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}m_1\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}m_2\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)dt+$$

$$+\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}\mathrm{m}_1\frac{-1}{2}\right)\int\limits_{[1/2,1]}\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}m_1\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}m_2\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)dt=$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{2}\right)\int\limits_{[0,1/2]}\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}m_1\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}m_2\sum_{k=1}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)dt =$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\ \frac{1}{2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{[0,1/4]}\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}m_1\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}m_2\sum_{k=2}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)dt =$$

$$= 4^2\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\ \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\ \frac{1}{3}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{\left[0,1/4^2\right]}\exp\left(\frac{i\pi}{2n_1}m_1\sum_{k=3}^{l}\frac{\varepsilon_{2k-1}(t)}{k+1}\right)\exp\left(\frac{i\pi}{2n_2}m_2\sum_{k=3}^{l}\frac{\varepsilon_{2k}(t)}{k+1}\right)dt = \ldots =$$

$$=4^l\int\limits_{\left[0,1/4^l\right]}dt\prod_{k=1}^{l}\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\ \frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{l}\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\ \frac{1}{k+1}\right).$$

Тому

$$R_m(p_n)=\prod_{k=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\ \frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\ \frac{1}{k+1}\right).$$

Для $k\in N$ і $j\in\{1,\ldots,k\}$ нехай

$$a_{j,k}=\exp(2\pi ij/k).$$

Для кожного $k\in N$ визначимо функцію $S_k:[0,1]\to C$ наступним чином. Для $t\in[(j-1)/k, j/k)$, де $j\in\{1,\ldots,k\}$, покладемо

$$S_k(t)=a_{j,k}.$$

Позначимо $frac(t)$ дробову частину дійсного числа t. Для кожного $n=(n_1,n_2)\in N^2$ визначимо функцію $y_n:[0,1]\to C^2$ формулою

$$y_n(x)=\left(S_{n_1}(t)p_{n,1}(frac(n_1n_2t)), S_{n_2}(frac(n_1t))p_{n,2}(frac(n_1n_2t))\right).$$

Зауважимо, що $\|y_n\|=1$. Для кожного $m=(m_1,m_2)\in N^2$ обчислимо $R_m(y_n)$:

$$R_m(y_n)=\int\limits_{[0,1]}S_{n_1}^{m_1}(t)p_{n,1}^{m_1}(frac(n_1n_2t))S_{n_2}^{m_2}(frac(n_1t))p_{n,2}^{m_2}(frac(n_1n_2t))dt=$$

$$=\sum_{j=1}^{n_1}a_{j,n_1}^{m_1}\int\limits_{\left[(j-1)/n_1,\, j/n_1\right]}S_{n_2}^{m_2}(frac(n_1t))p_{n,1}^{m_1}(frac(n_1n_2t))p_{n,2}^{m_2}(frac(n_1n_2t))dt.$$

В j-тому інтегралі зробимо заміну $u = n_1 t - (j-1)$. Тоді $n_1 t = u + j - 1$. Відповідно, $frac(n_1 t) = frac(u + j - 1) = frac(u)$ і $frac(n_1 n_2 t) = frac(n_2 u + n_2(j-1)) = frac(n_2 u)$. Тому

$$R_m(y_n) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} a_{j,n_1}^{m_1} \int_{[0,1]} S_{n_2}^{m_2}(frac(u)) p_{n,1}^{m_1}(frac(n_2 u)) p_{n,2}^{m_2}(frac(n_2 u))du.$$

Зауважимо, що

$$\int_{[0,1]} S_{n_2}^{m_2}(frac(u)) p_{n,1}^{m_1}(frac(n_2 u)) p_{n,2}^{m_2}(frac(n_2 u))du =$$

$$= \sum_{r=1}^{n_2} a_{r,n_2}^{m_2} \int_{[(r-1)/n_2, r/n_2]} p_{n,1}^{m_1}(frac(n_2 u)) p_{n,2}^{m_2}(frac(n_2 u))du.$$

В r-тому інтегралі зробимо заміну $v = n_2 u - (r-1)$. Тоді $n_2 u = v + r - 1$. Відповідно, $frac(n_2 u) = frac(v + r - 1) = frac(v) = v$. Тому

$$R_m(y_n) = \frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} a_{j,n_1}^{m_1} \frac{1}{n_2}\sum_{r=1}^{n_2} a_{r,n_2}^{m_2} \int_{[0,1]} p_{n_1}^{m_1}(v) p_{n_2}^{m_2}(v)dv =$$

$$= \left(\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} a_{j,n_1}^{m_1}\right)\left(\frac{1}{n_2}\sum_{r=1}^{n_2} a_{r,n_2}^{m_2}\right) R_m(p_n) =$$

$$= \left(\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} a_{j,n_1}^{m_1}\right)\left(\frac{1}{n_2}\sum_{r=1}^{n_2} a_{r,n_2}^{m_2}\right) \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi m_1}{2n_1}\frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{\pi m_2}{2n_2}\frac{1}{k+1}\right).$$

Якщо m_1 не кратне n_1, то

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{j,n_1}^{m_1} = 0.$$

Аналогічно, якщо m_2 не кратне n_2, то

$$\sum_{r=1}^{n_2} a_{r,n_2}^{m_2} = 0.$$

Нехай $m_1 = k_1 n_1$ і $m_2 = k_2 n_2$, де $k_1, k_2 \in N$. Тоді

$$\frac{1}{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} a_{j,n_1}^{m_1} = \frac{1}{n_2}\sum_{r=1}^{n_2} a_{r,n_2}^{m_2} = 1.$$

Відповідно,

$$R_m(y_n) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi k_1}{2}\frac{1}{k+1}\right)\cos\left(\frac{\pi k_2}{2}\frac{1}{k+1}\right).$$

Якщо $k_1 > 1$ або $k_2 > 1$, то в даному добутку буде множник $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. Таким чином, $R_m(y_n) = 0$, якщо $m \neq n$. Якщо $m = n$, то $R_m(y_n) = M^2$, де

$$M = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} \; \frac{1}{k+1}\right).$$

Для кожного $n = (n_1, n_2) \in N^2$ визначимо функцію $z_n : [0,1] \to C^2$ формулою

$$z_n = \frac{1}{\sqrt[|n|]{M^2}} y_n .$$

Зауважимо, що

$$\|z_n\| = \frac{1}{\sqrt[|n|]{M^2}} \leq \frac{1}{M^2},$$

оскільки $0 < M < 1$. Для кожного $m \in N^2$ такого, що $m \neq n$ буде $R_m(z_n) = 0$. Якщо $m = n$, то $R_m(z_n) = 1$.

Для $k \in N$ і $j \in \{1,...,k\}$ нехай

$$\varDelta_{j,k} = \left(\frac{2^k - 2}{2^k} + \frac{j-1}{k2^k}, \frac{2^k - 2}{2^k} + \frac{j}{k2^k}\right).$$

Визначимо функцію $h_{j,k} : \varDelta_{j,k} \to (0,1)$ формулою

$$h_{j,k}(t) = \left(t - \left(\frac{2^k - 2}{2^k} + \frac{j-1}{k2^k}\right)\right) \; k2^k,$$

де $t \in \varDelta_{j,k}$. Зауважимо, що $h_{j,k}$ є бієкцією.

Для множини комплексних чисел $c = \{c_n : n \in N^2\}$ такої, що

$$a = \sup_{n \in N^2} |c_n|^{1/|n|} < +\infty,$$

побудуємо функцію $x_c \in (L_\infty[0,1])^2$ таку, що $R_n(x_c) = c_n$ для кожного $n \in N^2$. Для $t \in \varDelta_{j,k}$ покладемо

$$x_c(t) = \left(k2^k c_{(j,k-j+1)}\right)^{1/(k+1)} z_{(j,k-j+1)}\left(h_{j,k}(t)\right).$$

Нехай

$$d = \sup_{k \in N}\left(k2^k\right)^{1/(k+1)}.$$

Оскільки

$$\left|c_{(j,k-j+1)}\right|^{1/(k+1)} \leq a,$$

то

$$\|x_c\| \le \frac{ad}{M^2}.$$

Для $n=(n_1,n_2)\in N^2$ маємо

$$R_n(x_c)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\int_{\Delta_{j,k}}(x_{c,1}(t))^{n_1}(x_{c,2}(t))^{n_2}\,dt=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\left(k+1\sqrt{k2^k c_{(j,k-j+1)}}\right)^{|n|}\int_{\Delta_{j,k}}\left(z_{(j,k-j+1),1}(h_{j,k}(t))\right)^{n_1}\left(z_{(j,k-j+1),2}(h_{j,k}(t))\right)^{n_2}dt.$$

Для кожних $k\in N$ і $j\in\{1,\dots,k\}$ у відповідному інтегралі зробимо заміну $u=h_{j,k}(t)$. Тоді $du=k2^k\,dt$ і

$$\int_{\Delta_{j,k}}\left(z_{(j,k-j+1),1}(h_{j,k}(t))\right)^{n_1}\left(z_{(j,k-j+1),2}(h_{j,k}(t))\right)^{n_2}dt=$$

$$=\frac{1}{k2^k}\int_{[0,1]}\left(z_{(j,k-j+1),1}(u)\right)^{n_1}\left(z_{(j,k-j+1),2}(u)\right)^{n_2}du=\frac{1}{k2^k}R_n\left(z_{(j,k-j+1)}\right).$$

Оскільки $R_n\left(z_{(j,k-j+1)}\right)$ дорівнює нулю при $(j,k-j+1)\ne n$ і дорівнює одиниці при $(j,k-j+1)=n$, тобто при $j=n_1$ і $k=n_1+n_2-1=|n|-1$, то

$$R_n(x_c)=\left(|n|\sqrt{(|n|-1)2^{|n|-1}c_n}\right)^{|n|}\frac{1}{(|n|-1)2^{|n|-1}}=c_n.$$

Теорему доведено. ■

Зауважимо, що функція x_c, побудована у доведенні теореми 1, є не єдиним представником простору $(L_\infty[0,1])^2$ який має властивість $R_n(x_c)=c_n$ для кожного $n\in N^2$. Наприклад, для функцій $x(t)=(0,0)$ і $y(t)=(\exp(2\pi it),\exp(2\pi it))$ маємо

$$R_n(x)=R_n(y)=0$$

для кожного $n\in N^2$.

Тепер покажемо, що умова

$$\sup_{n\in N^2}|c_n|^{1/|n|}<+\infty,$$

є не лише достатньою, але і необхідною для існування функції x_c.

Твердження 2. *Для кожного* $x\in (L_\infty[0,1])^2$ *буде*

$$\sup_{n\in N^2}|R_n(x)|^{1/|n|}<+\infty,$$

Доведення. Нехай $x=(x_1,x_2)\in (L_\infty[0,1])^2$ і $n=(n_1,n_2)\in N^2$. Тоді

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\int_{[0,1]} (x_1(t))^{n_1} (x_2(t))^{n_2}\, dt\right| \le \|x\|^{|n|}.$$

Тому $$\sup_{n \in N^2} \left|R_n(x)\right|^{1/|n|} \le \|x\| < +\infty.$$

Твердження доведено. ■

Література

1. Albiac F. Topics in Banach space theory. / F. Albiac, N. Kalton // Graduate Texts in Mathematics, Springer, vol. 233 – 2006.
2. Galindo P. The algebra of symmetric analytic functions on L_∞. / P. Galindo, T. Vasylyshyn, A. Zagorodnyuk // Proc. Roy. Soc. Edinb. Sect. A. – 2017. – V. 147, № 4. – p. 743-761.
3. Kahane J.P. Some random series of functions. / J.P. Kahane // Cambridge University Press, 2nd edition – 1985.
4. Немировский А.С. О полиномиальной аппроксимации функций на гильбертовом пространстве. / А.С. Немировский, С.М. Семенов // Матем. сб. – 1973. – Т. 92, № 2. – с. 257-281.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.12.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Шариним С.В.***

SOME PROPERTIES OF ELEMENTARY SYMMETRIC POLYNOMIALS ON THE CARTESIAN SQUARE OF THE COMPLEX BANACH SPACE $L_\infty[0,1]$

T. V. Vasylyshyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com

We construct the element of the Cartesian square of the complex Banach space $L_\infty[0,1]$ of all Lebesgue measurable essentially bounded functions on $[0,1]$ by the predefined values of elementary symmetric polynomials on this element. Results of this work can be applied to the investigation of an algebraic basis of the algebra of continuous symmetric polynomials on the Cartesian square of the complex Banach space $L_\infty[0,1]$.

Key words: *symmetric polynomial, the space of Lebesgue measurable essentially bounded functions.*