Математичне моделювання та обчислювальні методи

УДК 517.962.2+519.245

ЙМОВІРНІСНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВИХ ТА СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ У КРАЙОВИХ ЗАДАЧАХ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ

В. М. Сеничак, В. В. Сеничак
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Розглядається ймовірнісна інтерпретація скінченно-елементних апроксимацій методу скінченних елементів (МСЕ). Встановлюється зв'язок скінченного елемента з перехідними ймовірностями у схемі випадкових блукань. Запропонований принципово новий варіант методу Монте-Карло – метод прискорених статистичних випробувань.

Ключові слова: *метод скінченних елементів, симплекс-елемент лінійного типу, випадкові блукання, перехідна ймовірність, барицентричні координати.*

Вступ

Чисельні методи, що використовуються при розв'язуванні задач, математичною основою яких є диференціальні рівняння з частинними похідними еліптичного типу, можна умовно поділити на дві основні групи. В одній з них використовується апроксимація області (МСР, МСЕ), в іншій – апроксимація функцій на границі області (МГЕ, МКО) [1].

У даній роботі зосередимось на методах наближених обчислень першої групи (МСР, МСЕ), при цьому основна увага буде приділена ймовірнісному трактуванню дискретних аналогів в термінах випадкових блукань.

Математичні моделі випадкових блукань, що виникли в ігрових задачах теорії ймовірностей, отримали суттєвий розвиток у зв'язку з вивченням броунівського руху (вперше цей рух спостерігав в 1827 р. шотландський ботанік Роберт Броун). Теорію броунівського руху, що ґрунтується на ймовірнісних передумовах, розробили в 1905 р. видатні вчені Маріан Смолуховський і Альберт Ейнштейн. Спробу вивчення явища дифузії засобами теорії ймовірностей було зроблено в 1914 році відомими фізиками Максом Планком і Адріаном Фоккером, які розглянули одновимірну модель випадкового блукання. Одним із важливих результатів перших досліджень було встановлення глибоких зв'язків між перехідною ймовірністю, скінченно-різницевим рівнянням і відповідним диференціальним рівнянням. Отже, вже на початку двадцятого століття стало принципово можливим використати прості ймовірнісні схеми для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь за допомогою скінченно-різницевих аналогів. Однак, практичну реалізацію ця можливість отримала лише в 50-х роках після появи методу Монте-Карло і перших ЕОМ.

1. Математичні моделі випадкових блукань

Розглянемо схеми випадкових блукань, що приводять до наближеного розв'язку рівняння Лапласа. Нехай рухома частинка випадковим чином переміщується вздовж деякої прямої. Дискретним аналогом такого процесу може служити наступна модель випадкового блукання [2]. Положення частинки розглядається лише в дискретні моменти часу $t = k \cdot \Delta t$, кратні Δt. Зміна положення частинки відбувається таким чином, що знаходячись у вузлі (i) (рис. 1), частинка, незалежно від попередньої поведінки, за один крок здійснює переміщення в один з найближчих сусідніх вузлів $(i-1)$ або $(i+1)$.

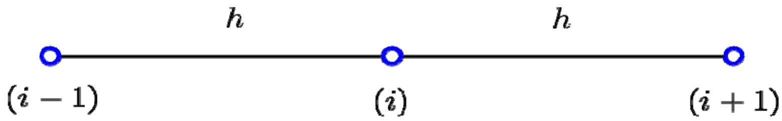

Рис. 1. Одновимірна схема випадкових блукань

Якщо припустити, що рух частинки вліво або вправо за один крок рівноможливий, тобто відбувається з імовірністю 1/2, то говорять [3], що частинка здійснює **просте одновимірне випадкове блукання по прямій (блукання Бернуллі)**. При дискретному блуканні за час t вона здійснить $n = \frac{t}{\Delta t}$ кроків.

Тепер розглянемо модель випадкового блукання по вузлах цілочисельної решітки в площині [4]. Схема такого блукання подана на рис. 2.

Випадкова частинка з вузла (i, j) за один крок може переміститися з однаковою ймовірністю, рівною 1/4, в будь-який із чотирьох сусідніх вузлів: $(i-1, j), (i+1, j), (i, j-1), (i, j+1)$, при чому незалежно від передісторії її блукання.

Аналогічно можна визначити дискретну модель випадкового блукання в тривимірному просторі (рис. 3). Частинка з вузла $(\mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k})$ переміщується за один крок з однаковою ймовірністю, рівною $\frac{1}{6}$, в будь-який з шести сусідніх вузлів: $(i-1, j, k)$, $(i+1, j, k)$, $(i, j-1, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i, j, k-1)$, $(i, j, k+1)$.

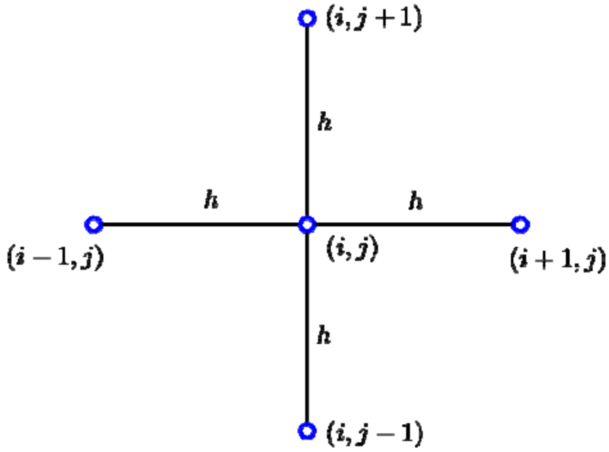

Рис. 2. Двовимірна схема випадкового блукання

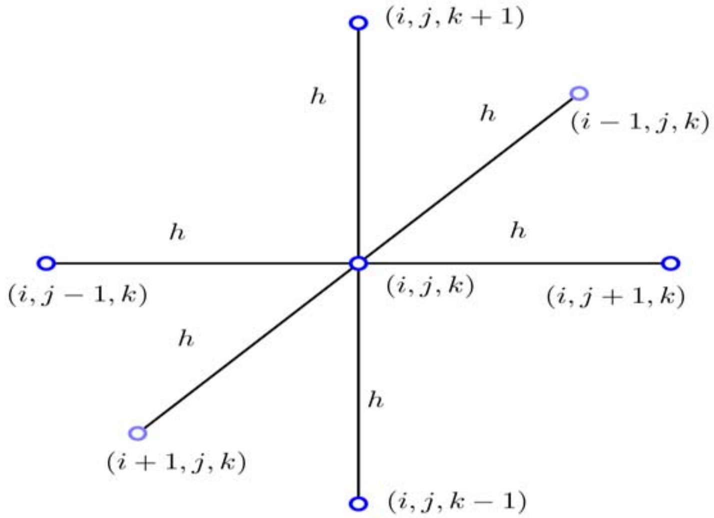

Рис. 3. Тривимірна схема випадкового блукання

Продемонструємо зв'язок принципів випадкових блукань з МСР на прикладі рівняння Лапласа, яке в одновимірному випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0. \qquad (1)$$

З цією метою розглянемо задачу випадкового блукання, пов'язану з нескінченою послідовністю випробувань [5]. Нехай частинка рухаєтьсяся по цілих точках відрізка $[0,n]$. В точках 0 і n розміщені поглинаючі бар'єри: потрапивши в одну з цих точок, частинка назавжди залишається в ній. Позначимо через ξ_t координату частинки в момент часу $t(t=0,1,2,3...)$. Рухом частинки керує нескінчена послідовність незалежних випробувань з двома наслідками: 1 і -1 (схема Бернуллі). Зробимо припущення, що частинка починає блукання з деякої точки i, тобто $\xi_0 = i$. Позначимо через p і q ймовірності наслідків 1 і -1 відповідно, а P_{in} – ймовірність події, яка полягає в тому, що частинка коли-небудь потрапить в точку n, тобто відбудеться поглинання правим вузлом. Згідно [5] при $t \to \infty$ для P_{in} отримане співвідношення

$$P_{\text{in}} = p \cdot P_{i+1,n} + q \cdot P_{i-1,n}, \quad (i = 1,2,3,...,n-1).$$

Оскільки P_{in} – ймовірність поглинання на правому кінці в процесі, що почався з точки i, то $P_{\text{on}} = 0, P_{\text{nn}} = 1$. Отже, ймовірність P_{in} можна розглядати як функцію від i, яка є розв'язком лінійного однорідного рівняння в скінченних різницях з постійними коефіцієнтами

$$p \cdot U_{\text{i+1}} - U_i + q \cdot U_{i-1} = 0, \tag{2}$$

і граничними умовами $U_0 = 0, U_n = 1$. У випадку симетричного блукання, коли відстані між вузлами однакові, ймовірності p і q будуть рівні між собою і дорівнюють 1/2. Тоді співвідношення (2) набуде вигляду:

$$\frac{1}{2}U_{\text{i+1}} - U_i + \frac{1}{2}U_{i-1} = 0, \tag{3}$$

що є скінченно-різницевим аналогом рівняння Лапласа. З (3) можна отримати

$$U_i = \frac{1}{2}\left(U_{\text{i+1}} + \text{U}_{i-1}\right). \tag{4}$$

Згідно (4) розв'язок у центральному вузлі апроксимується середнім арифметичним значенням функції в сусідніх вузлах. Вагові коефіцієнти при цьому становлять ймовірності переходу блукаючої частинки з вузла з індексом i в сусідній вузол $(i+1)$ або $(i-1)$ і визначаються геометрично, як відношення відповідного плеча на міжвузлову відстань. Ці ймовірності не залежать від поведінки функції між вузлами, тобто міжвузлова інформація при цьому відсутня.

Ймовірнісна інтерпретація скінченно-різницевої схеми має місце і в многовимірному випадку. Розглядаючи суперпозицію, накладання двох простих одновимірних блукань по горизонтальній і вертикальній прямих, отримаємо двовимірну схему випадкового блукання типу "хрест" (рис. 2). В результаті накладання цих двох схем отримуємо

$$U_{\text{ij}} = \frac{1}{4}\left[U_{i-1,j} + \text{U}_{\text{i+1,j}} + \text{U}_{\text{i,j-1}} + \text{U}_{\text{i,j+1}}\right], \tag{5}$$

що становить собою скінченно-різницевий аналог двовимірного рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 . \qquad (6)$$

Як і в одновимірному випадку розв'язок U_{ij} апроксимується його середнім значенням по чотирьох сусідніх вузлах. Фактично (5) становить собою математичне сподівання польової функції або середнє вибіркове чотирьох вузлових значень. Коефіцієнти 1/4 в формулі (5) становлять собою геометричні ймовірності переходу блукаючої частинки з центрального вузла в один із сусідніх вузлів.

У тривимірному випадку рівняння Лапласа має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0 . \qquad (7)$$

Повторюючи аналогічне міркування, за допомогою методу суперпозиції трьох одновимірних ортогональних блукань, нескладно показати, що рівняння (7) апроксимується скінченно-різницевим рівнянням (8)

$$U_{\mathrm{i,j,k}}=\frac{1}{6}\left(U_{i-1,\mathrm{j,k}}+\mathrm{U}_{\mathrm{i+1,j,k}}+\mathrm{U}_{\mathrm{i,j-1,k}}+\mathrm{U}_{\mathrm{i,j+1,k}}+\mathrm{U}_{\mathrm{i,j,k-1}}+\mathrm{U}_{\mathrm{i,j,k+1}}\right), \qquad (8)$$

де коефіцієнти 1/6 є ймовірності переходу блукаючої частинки з центрального вузла в один із шести сусідніх.

Відзначимо, що принципи випадкового блукання дають змогу легко конструювати в явному вигляді дискретні схеми МСР для областей будь-якої розмірності, а також будувати адаптовані обчислювальні шаблони МСР для областей із складними границями.

2. Метод Монте-Карло

Метод Монте-Карло виник у 1949 році, коли у зв'язку з роботами зі створення атомних реакторів, Нейман і Улам запропонували використати апарат теорії ймовірностей для розв'язування прикладних задач за допомогою ЕОМ. Вважається, що алгоритм методу Монте-Карло, що ґрунтується на принципах випадкових блукань по вузлах цілочисельної решітки є найпростішим, а універсальність самої схеми роблять її найбільш придатною для реалізації в областях складної форми [6]. Однак, практична реалізація такої схеми вимагає многократного моделювання довгих випадкових траєкторій та наявності високопродуктивної обчислювальної техніки, оснащеної спеціальною апаратурою для генерування випадкових кодів. Звикло кажуть, що метод Монте-Карло особливо ефективний при розв'язуванні тих задач, в яких результат потрібний з невеликою точністю (5-10%). Адже відомо [7], що похибка обчислень, як правило, пропорційна $\sqrt{D/M}$, де D – деяка константа, а M – число випробувань. Отже, для зменшення похибки в 10 разів (або, інакше кажучи, щоб отримати у відповіді ще один вірний десятковий знак), потрібно збільшити M (тобто об'єм роботи) в 100 разів. Очевидно, що добитися високої точності таким шляхом неможливо. У багатьох задачах вдається значно збільшити точність за рахунок вибору способу моделювання різних випадкових величин. У таких випадках говорять про методи Монте-Карло.

Для ілюстрації методу Монте-Карло можна розглянути вправу на розв'язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа [6]. Ця задача сконструйована як ігрова про "Блукаючого п'яничку". Результатом цієї гри є наближений розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними. Модель випадкових блукань, що приводить до скінченно-різницевої апроксимації, можна легко узагальнити для отримання розв'язків інших задач. Отже, розглядається наступна задача (9), (10):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0 \qquad (9)$$

$$U(x,y)=g(x,y) \text{ (на сторонах квадрата).} \qquad (10)$$

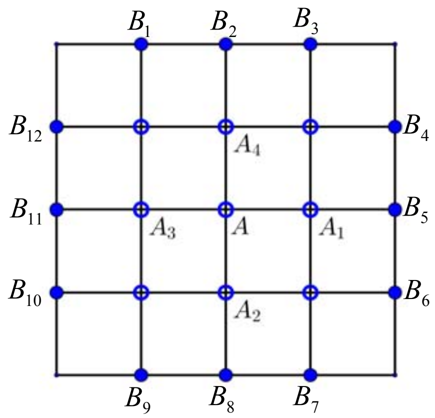

Рис. 4. Ігрове поле для гри "Блукаючий п'яничка"

Перейдемо до опису правил гри "Блукаючий п'яничка".

Крок 1. Блукання п'янички починається з довільної точки (в нашому випадку це точка A на рис. 4).

Крок 2. На кожному кроці гри п'яничка випадковим чином потрапляє в одну з чотирьох сусідніх точок сітки (рис. 4): A_1, A_2, A_3 або A_4. Ймовірність переходу в кожну з цих точок рівна ¼ .

Крок 3. Після переходу в сусідню точку процес блукання повторюється. Так п'яничка мандрує від точки до точки до того часу, поки випадково не опиниться в граничній точці B_i. Тут він зупиняється, а ми фіксуємо номер точки B_i. На цьому закінчується одна випадкова прогулянка.

Крок 4. Повторимо кроки 1-3 достатню кількість разів і знайдемо відносне число прибувань п'янички в кожну з граничних точок B_i.

Крок 5. Припустимо, що п'яничка отримує винагороду $g_i = g(B_i)$ (величина граничної умови в точці B_i), якщо п'яничка досяг точки B_i, а метою даної гри є обчислення середньої винагороди $R(A)$ для всіх випадкових прогулянок, що починаються з точки A. Цей середній виграш визначається за формулою

$$R(A) = g_1 \cdot P_A(B_1) + g_2 \cdot P_A(B_2) + ... + g_{12} \cdot P_A(B_{12}). \qquad (11)$$

Гра закінчується тоді, коли величина $R(A)$ знайдена. Отримана в такий спосіб середня винагорода $R(A)$ є не що інше, як наближений розв'язок задачі Діріхле для рівняння Лапласа в точці A. Таке цікаве спостереження ґрунтується на двох фактах:

1. Якщо п'яничка починає свою прогулянку з точки, що лежить на границі, то така прогулянка негайно закінчується в цій же точці і п'яничка отримує винагороду g_i. Отже, середня винагорода для будь-якої граничної точки дорівнює g_i, тобто $gR(A) = g_i$.

2. Якщо прогулянка починається з внутрішньої точки, то середня винагорода для точки A буде середнім арифметичним від середніх винагород для чотирьох сусідніх точок A_1, A_2, A_3, A_4:

$$R(A) = \frac{1}{4}[R(A_1) + R(A_2) + R(A_3) + R(A_4)]. \qquad (12)$$

Отже, величина $R(A)$ задовольняє умову $R(A) = g_i$ в граничних точках області і рівнянню (12) у внутрішніх точках області, тобто величина $R(A)$ співпадає з величиною U_{ij} в різницевих рівняннях типу (5), де (i, j) – внутрішня точка, і $U_{ij} = g_{ij}$, де g_{ij} – значення розв'язку в граничній точці (i, j). Саме тому величина $R(A)$ дійсно апроксимує розв'язок рівняння з частинними похідними в точці A.

Тепер можна вважати, що описана процедура (як гра "Блукаючий п'яничка") складається з трьох кроків. Опишемо алгоритм, за яким можна отримати розв'язок в одній будь-якій внутрішній точці довільної області (рис. 5).

Крок 1. Здійснимо деяке число випадкових прогулянок, що починаються у точці A і закінчуються в одній з граничних точок B_i. Простежимо за тим, скільки разів прогулянки закінчувались у кожній граничній точці.

Крок 2. По завершенні всіх прогулянок для кожної граничної точки B_i обчислюємо відносне число прогулянок $P_A(B_i)$, що завершились в цій точці.

Крок 3. Обчислюємо наближений розв'язок $U(A)$ за формулою

$$U(A) = g_1 \cdot P_A(B_1) + g_2 \cdot P_A(B_2) + ... + g_N \cdot P_A(B_N), \qquad (13)$$

де g_i – значення функції $g(\mathrm{x},\mathrm{y})$ в точці B_i, а N – число граничних точок. Запишемо формулу (13) у вигляді (14)

$$U(A)=\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{i}=1}^{N} n_i U_i \,, \tag{14}$$

де N – число вузлів на границі області (рис. 5), n – загальне число маршрутів блукаючої частинки, що стартує з точки A; n_i – число поглинань частинки вузлом B_i; U_i – значення функції U в точці B_i; $U_i = U(B_i)$.

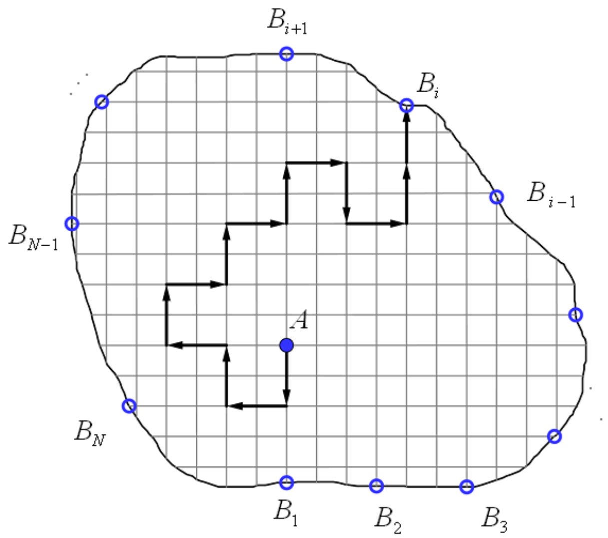

Рис. 5. Зигзагоподібний маршрут методу Монте-Карло

Як бачимо, ми описали стандартний алгоритм методу Монте-Карло розв’язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа в довільній області.

3. Схема випадкових блукань по симплексу

Зазначимо, що симплекс-елементи лінійного типу дуже добре себе зарекомендували у МСЕ, де вони відіграють ключову роль. Саме встановлення ймовірнісного змісту базисної функції скінченного елемента надасть можливість застосувати новий спрощений спосіб явної побудови базису. У двовимірному випадку продемонструємо нетрадиційну форму методу Монте-Карло на прикладі симплекс-елемента лінійного типу у формі трикутника, який покриємо прямокутною сіткою (рис. 6)

Нехай частинка починає блукання з внутрішньої точки $M(\mathrm{x},\mathrm{y})$ (рис. 6) і переміщаючись по вузлах решітки, переходить в одну з вершин трикутника (вершина поглинає частинку). На рис. 6 показаний один із зигзагоподібних маршрутів, що ведуть з точки M у вузол (k). Припустимо, що частинка здійснює m прогулянок, з яких m_i прогулянок завершується у вузлі з номером i, m_j – у вузлі (j), m_k – у вузлі (k). При цьому за вихід у вузол частинка буде отримувати винагороду, відповідно $U_i \cdot \frac{m_i}{m}, U_j \cdot \frac{m_j}{m}, U_k \cdot \frac{m_k}{m},$. Середня винагорода за вихід у вузол буде визначатись за формулою

$$U(M) = U_i \cdot \frac{m_i}{m} + U_j \cdot \frac{m_j}{m} + U_k \cdot \frac{m_k}{m}, \tag{15}$$

де коефіцієнти $\frac{m_i}{m}, \frac{m_j}{m}, \frac{m_k}{m}$ є відносними частотами. Згідно закону великих чисел послідовності відносних частот при $m \to \infty$ прямують до своїх граничних значень L_i, L_j, L_k, які є ймовірностями переходу частинки з точки M, відповідно, у вузол $(i),(j),(k)$. Граничний перехід дає змогу многочисельні зигзагоподібні випадкові маршрути замінити одним усередненим: з точки M просто у вузол елемента. Середня винагорода тоді набуде вигляду:

$$U = U_i \cdot L_i + U_j \cdot L_j + U_k \cdot L_k, \tag{16}$$

де L_i, L_j, L_k є функціями точки $M(\mathrm{x}, \mathrm{y})$.

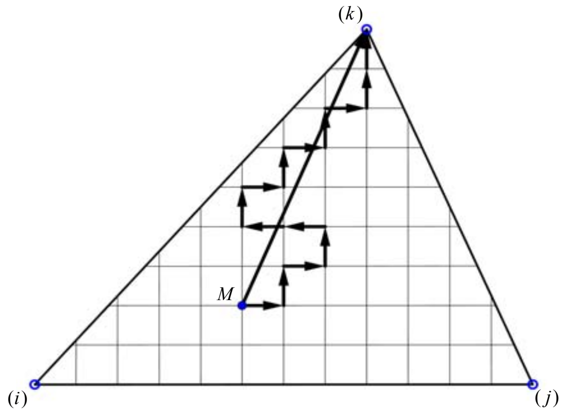

Рис. 6. Неперервна схема випадкового блукання в двовимірному випадку

Таким чином ми приходимо до барицентричних координат двовимірного симплекса. Барицентричні координати, запроваджені німецьким геометром Мьобіусом в 1827 р., становлять собою відношення відстаней від вибраної точки трикутника до однієї із його сторін до висоти трикутника, опущеної на цю сторону з протилежної вершини. Інколи їх ще називають *L*-координатами, координатами площі або трикутними координатами. Барицентричні координати по Мьобіусу – це відповідь на питання, які частки маси потрібно помістити в вершини симплексу, щоб довільно вибрана точка служила центром ваги.

Тепер стає зрозумілим, що барицентричні координати набувають цілком ймовірнісного змісту та визначаються як геометричні ймовірності переходу блукаючої частинки з точки M в один із вузлів елемента. При цьому спостерігається очевидний факт: чим ближче частинка знаходиться до деякого вузла $\beta(\beta = 1,2,3)$, тим більший ваговий вплив саме цього вузла і в самому вузлі ймовірність переходу L_β досягає свого максимального значення 1 (вузол поглинув частинку). При віддаленні від цього вузла L_β спадає до 0.

4. Теоретико-ймовірнісне обґрунтування прискореного варіанту методу скінченних елементів.

Встановлення основних закономірностей поведінки частинки, що здійснює випадкові блукання по вузлах цілочисельної решітки, та їх ймовірнісного тлумачення можливе при дослідженні спрощених моделей.

Математична модель симетричного випадкового блукання служить для найпростішого наближеного опису фізичного процесу броунівського руху і дифузії матеріальної частинки, що здійснює випадкові переміщення під дією великої кількості зіткнень з молекулами [3]. Фізичний зміст має лише граничний випадок – неперервний рух. Дискретна схема випадкових блукань, що ґрунтується тільки на комбінаторних властивостях, приводить до результатів, які є справедливими і у своїй граничній формі.

Розглянемо задачу про повернення частинки в початок координат, що можливе лише через парну кількість кроків (парні моменти часу) [3]. Для цього попередньо дослідимо поведінку числової послідовності ймовірностей $P_{2n}(n), n \in N$ при $p = q = 1/2$. Згідно зі схемою Бернуллі ймовірності появи визначеної події рівно k разів в n незалежних випробуваннях $(0 \le k \le n)$ обчислюється за формулою

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Послідовність $\{P_{2n}(n)\}$ є монотонно спадною, тобто для усіх $n(n = 1,2,3,...)$ виконується нерівність $P_{2n}(n) > \mathrm{P}_{2n+2}(\mathrm{n}+1)$. Знайдемо граничне значення $\{P_{2n}(n)\}$ при необмеженому зростанні $n(n \to \infty)$

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}(n) = \lim_{n\to\infty} C_{2n}^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$$

Нагадаємо, що при достатньо великих $n(n \to \infty)$ справедливою є формула Стірлінга

$$n! \sim n^n \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi\pi},$$

згідно якої $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$, отже $P_{2n}(n) \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, тобто $P_{2n}(n) = 0$.

4.1. Симетричне випадкове блукання на прямій

Повернемось до задачі про повернення частинки в початок координат (стартове положення). Нехай P_{2n} – ймовірність повернення частинки в "нуль" за $2n$ кроків (в момент $2n$). Оскільки число маршрутів, що з'єднують точки $(0;0)$ і $(2n;0)$ рівне $L(2n;0) = \mathrm{C}_{2n}^{n}$, то $P_{2n} = \mathrm{C}_{2n}^{n} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$,

а ймовірність першого повернення в "нуль" в момент $2n$ визначається залежністю $f_{2n} = \mathrm{P}_{2n-2} - P_{2n}$, що при $n \geq 1$ має вигляд $f_{2n} = \frac{1}{2n} \cdot P_{2n-2}$.

Ймовірність повернення в "нуль" за $2n$ кроків буде визначатись залежністю

$$f_2 + f_4 + f_6 + ... + f_{2\mathrm{n}} = 1 - P_{2n}.$$

Оскільки $P_{2n} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\sum_{\mathrm{k}=1}^{n} f_{2k} = 1$.

Тобто, при нескінченному числі маршрутів (траєкторій) ймовірність того, що частинка коли-небудь повернеться в "нуль" рівна одиниці.

У підсумку зазначимо, що з ймовірністю 1 частинка нескінченне число разів потрапляє у будь-яку як завгодно віддалену точку (в тому числі і в "нуль"), але середній час очікування таких подій є нескінченно великий.

Слід відзначити, що аналіз випадкових блукань частинки на прямій лінії при наявності поглинаючого і відштовхуючого екранів висвітлений у [9].

4.2. Про симетричне випадкове блукання на площині і у просторі

Відповідь на питання можливості повернення блукаючої частинки в "нуль" у двовимірному і тривимірному випадках отримаємо дослідивши поведінку ряду $\sum P_{2n}$.

У двовимірному випадку частинка за один крок може переміститись з однаковою ймовірністю 1/4 у будь-якому напрямку: вперед, назад, вправо, вліво, при чому незалежно від передісторії її блукання. Загальне число маршрутів з початку координат буде визначатись залежністю $L(2\mathrm{n};2n) = \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \mathrm{C}_{2\mathrm{n}}^{n} \cdot \left(C_n^k\right)^2$, отже $P_{2n} = \left(C_{2n}^{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{4^{2n}}$.

При великих n згідно з формулою Стірлінга, отримаємо: $P_{2n} \sim \frac{1}{4^{2n}} \cdot \frac{2^{4n}}{\pi n} = \frac{1}{\pi n}$.

Оскільки числовий ряд із загальним членом $\frac{1}{\pi n}$ є розбіжним то робимо висновок, що у двовимірному випадку блукання є зворотним.

У тривимірному випадку послідовність переміщень в один із шести напрямів (вперед, назад, вправо, вліво, вверх, вниз) є довільна (випадкова), а поведінка ряду $\sum P_{2n}$ еквівалентна поведінці ряду $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$. Враховуючи, що у даному випадку ряд $\sum P_{2n}$ є збіжний, а $\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n} < 1$, робимо висновок: ймовірність повернення в початок координат за $2n$ кроків при досить великих n є близькою до нуля.

4.3. Підсумки та узагальнення

1) при необмеженому збільшенні числа кроків $(n \to \infty)$ властивість повернення в "нуль" для одновимірного симетричного випадкового блукання зберігається у двовимірному випадку та втрачається при більшому числі вимірів;

2) у двовимірному і тривимірному випадках, здійснюючи випадкові блукання по вузлах цілочисельної решітки, частинка швидко досягає будь-якого як завгодно віддаленого рівня, при чому у просторі набагато швидше, оскільки повернення в "нуль" є малоймовірне;

3) отримані результати обґрунтовують можливість та доцільність заміни великої кількості випадкових маршрутів у схемах випадкових блукань на один прямолінійний (граничний) у відповідності до фізичного змісту.

5. Метод прискорених статистичних випробувань

Ймовірнісні аспекти МСЕ і його зв'язок з випадковими блуканнями стали підставою для розробки зручного у користуванні спрощеного варіанту МСЕ – методу прискорених статистичних випробувань, що використовує тільки один симплекс-елемент з вершинами на границі досліджуваної області (двовимірний варіант розглянуто в [9]). При цьому передбачається можливість систематично змінювати розміщення вершин симплекса на границі області з метою залучення нових вузлів в процес обчислення. Обчислювальна процедура послідовного переміщення (обертання) симплекс-елемента реалізує процес блукання броунівської частинки. Шукані величини визначаються у формі середньої винагороди за вихід частинки в граничну вузлову точку. Осереднення за методом Монте-Карло досягається за допомогою барицентричних координат симплексу, а значення шуканої величини визначається як середнє арифметичне значення цієї величини, отриманої для кожного положення симплексу. У тривимірному випадку для симплекс-елемента у формі тетраедра отримаємо

$$U_n(A) = U_i \cdot \xi_i + U_j \cdot \xi_j + U_k \cdot \xi_k + U_l \cdot \xi_l \,. \qquad (17)$$

Тут $\xi_i, \xi_j, \xi_k, \xi_l$ – барицентричні координати або геометричні ймовірності [9]. Остаточний розв'язок в точці A визначається як середнє арифметичне усіх значень $U_n(A)$

$$U(A)=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}U_n(A), \tag{18}$$

де N – кількість зафіксованих положень симплекс-елемента (або N – число “стоп-кадрів”).

6. Узагальнення отриманих результатів

Імовірнісні уявлення, що містяться в основі випадкових блукань, допомагають розвинути новий підхід до теорії скінченних методів. Не ускладнюючи модель випадкових блукань, а вдосконаливши її, здійснюється природний перехід від дискретної схеми до неперервної. В ланцюжку, що з’єднує перехідну ймовірність, скінченно-різницевий аналог і диференціальні рівняння замінили середню ланку на скінченно-елементний аналог. Заміна апостеріорних перехідних імовірностей у схемі випадкових блукань апріорними та поєднання ймовірнісних ідей методу Монте-Карло і барицентричних координат симплексу звільняє від необхідності складати і розв’язувати великі системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Традиційне нанесення сітки скінченних елементів на досліджувану область також стає непотрібним, досить передбачити переміщення (обертання) симплекса, який транслює граничну інформацію в досліджувану точку. Запропонований спосіб найефективніший при розв’язуванні задачі Діріхле для рівняння Лапласа.

На завершення слід відзначити, що історія розвитку науки супроводжувалась неухильним зростанням ролі ймовірнісних уявлень, що вносять узагальнення, порядок і простоту в ті питання, де традиційний детерміністичний підхід є безсилим. Теорія ймовірностей має рідкісну властивість формувати нову мову, стиль і вигляд наукового дослідження. Запровадження у теорію скінченних елементів нових понять, зокрема, блукаючої частинки, випадкового маршруту, середньої винагороди та інших дає змогу не тільки описати відомі факти та суттєво спростити значну кількість обчислювальних процедур, але й отримати нові результати.

Література

1. Наближені методи розв’язування крайових задач еліптичного типу / В.М. Сеничак, Р.Й. Ріпецький, Є.Й. Ріпецький, В.В. Сеничак, В.Р. Ріпецький // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2013. – №1(21). – С. 51-68.
2. Розанов Ю.А. Случайные процессы / Ю.А. Розанов. – М.: Наука, 1979. – 184 с.
3. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н. Колмогоров, И.Г. Журбенко, А.В. Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
4. Бухарев Р.Г. Вероятностные автоматы и процессоры / Р.Г. Бухарев. – М.: Знание, 1986. – 48 с.
5. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей / В.П. Чистяков. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

6. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 324 с.
7. Соболь И.М. Метод Монте-Карло / И.М. Соболь. – М.: Наука, 1985. – 80 с.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник / Б.В. Гнеденко. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
9. Senychak V.M. Senychak. Solving Boundary Problems of Elliptic Type by Accelerated Method of Statistical Trials / V.M. Senychak, I.Y. Ovchar, V.V. Senychak // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. – №1(29). – С. 145-150.
10. Сеничак В.М. Побудова базисних функцій тривимірного симплекс-елемента / В.М. Сеничак, В.В.Сеничак // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2017. – №1(37). – С. 91-97.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.09.2017 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. ***Мойсишиним В.М.,***
д.ф.-м.н., професором ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці)*

PROBABILITY INTERPRETATION OF FINITE DIFFERENCE AND FINITE ELEMENTS' APPROXIMATIONS IN INITIAL VALUE BOUNDARY PROBLEMS OF ELLIPTIC TYPE

V. M. Senychak, V. V. Senychak
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpatska Str., 15;

We consider the probability interpretation of finite-element approximations of the finite elements method (FEM). The connection between a finite element and transition probabilities in the scheme of random walks is being considered. A fundamentally new version of the Monte Carlo method – the method of accelerated statistical tests is proposed.

Key words: *finite element method, simplex-element linear type, random walk, transition probability, barycentric coordinates.*