

## ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО ПОЛЯ В АНТИПРИЗМІ

**С.О. Камаєва**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
76019, Україна, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4 21 27; e-mail: [Svitlana.Kamaeva@gmail.com](mailto:Svitlana.Kamaeva@gmail.com)*

*Роботу присвячено дослідженню стаціонарного поля в антипризмі. З цією метою побудовано декілька математичних моделей та проведено порівняння отриманих результатів із результатами, одержаними за відомими дискретними методами.*

**Ключові слова:** *стаціонарне поле, антипризма, задача теплопровідності, метод скінченних різниць, метод Монте-Карло.*

**Постановка проблеми.** Многогранники внаслідок їх незвичайних властивостей симетрії досліджуються з давніх часів. Вони знайшли широке застосування в архітектурі, кристалографії, декоративному мистецтві, дизайні, ювелірній промисловості, а також в математиці, фізиці, медицині, теорії графів тощо. Розмаїття їхніх форм вражає. Мабуть тому їх прийнято класифікувати за типами: правильні та напівправильні опуклі многогранники (тіла Платона та Архімеда відповідно), правильні неопуклі многогранники (тіла Кеплера-Пуансо), опуклі паралеледри (тіла Фьодорова). Але навіть в межах одного типу вони суттєво відрізняються (і не лише за формою). Взяти хоча б такі архімедові тіла, як призми та антипризми. Перші, будучи найпростішими напівправильними многогранниками, легко піддаються формалізації. Саме тому на сьогоднішній день накопичено певний досвід розв'язування різних інженерних задач в цих тілах. У той же час задачі в антипризмах залишаються маловивченими.

**Аналіз попередніх публікацій, постановка задачі.** Великий внесок у розвиток теорії многогранників зробив відомий грецький математик Архімед (близько 287 р. до н.е. – 212 р. до н.е.). Вважається, що саме він вперше побудував напівправильні многогранники, які названі в його честь архімедовими тілами. На жаль, рукопис Архімеда не зберігся через пожежу в Александрійській бібліотеці. Проте існування цього рукопису підтверджується посиланням на нього в роботах інших вчених, зокрема математика Паппа. Архімед розглядав правильні призми та антипризми як дві нескінченні послідовності многогранників. Проте він, напевно, і не уявляв собі, яку роль відіграватимуть антипризми при розв'язуванні задач, що виникнуть через 2000 років. Прикладом цього може бути знаменита задача Томсона. Відомо, що під час вивчення планетарної моделі атома Дж. Дж. Томсон (1856-1940) проводив експерименти із знаходження найкращих розташувань зарядів на сфері з метою мінімізації потенціальної енергії системи. З появою комп'ютерів прово-

дилось багато числових експериментів, однак лише наприкінці ХХ ст. окремі випадки було розв'язано математично строго. Точні розв'язки задачі Томсона [1, 2] були отримані методами теорії наближення функції, основоположником якої є П.Л. Чебишов (1821-1894). Вдалось довести, наприклад, що для шести зарядів найкращою конструкцією в плані глобального мінімуму потенціальної енергії виявилась саме антипризма, а не трикутна призма, як очікувалось. Дана задача є яскравим прикладом того, що антипризми є цікавим об'єктом досліджень, проте моделювати їх надзвичайно складно через особливості їх будови. Можливо саме тому на сьогоднішні в антипризмах не проведено досліджень стаціонарних фізичних полів.

**Мета роботи.** У рамках температурної задачі побудувати стаціонарне поле антипризми та порівняти отримані результати з розв'язками, знайденими за відомими дискретними методами.

**Основна частина.** Антипризма – це напівправильний многогранник, у якого дві паралельні грані – рівні між собою правильні  $n$ -кутники, а решта  $2n$  граней – правильні трикутники [3]. Розглянемо антипризму з трикутною основою, оскільки вона є найпростішою в сімействі антипризм (рис. 1).

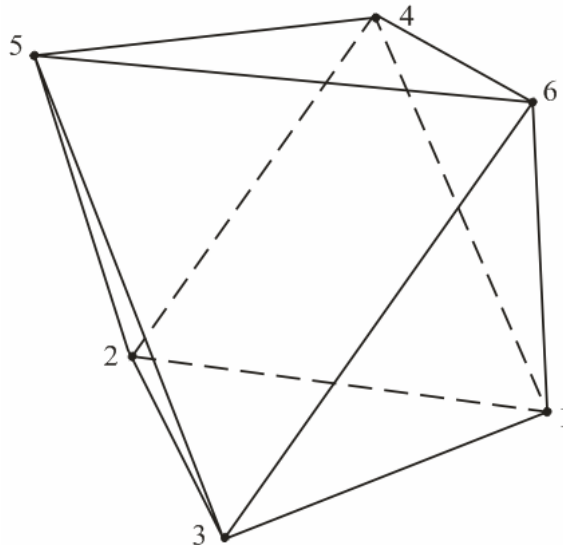


Рис. 1. Антипризма з трикутною основою

Сформулюємо завдання: побудувати температурне поле антипризми за відомими сталими значеннями температури  $T_1 - T_6$  в її вершинах (вузлах). Занесемо ці значення у табл. 1.

Табл. 1. Значення температури у вузлах антипризми, [°C]

Вершина	1	2	3	4	5	6
Температура	50	40	60	10	30	20

Розв'язування даної задачі за допомогою дискретних методів передбачає нанесення тривимірної сітки в області антипризми, що пов'язано з певними труднощами. Тому доцільно розглянути інше розташування даного тіла, коли воно набуває вигляду звичайного октаедра. Октаедр посідає особливе місце серед просторових фігур, оскільки зустрічається не лише в наукових дослідженнях, а й у природних процесах. Він є однією з найпростіших форм кубічної сингонії в кристалографії, оскільки за його формою кристалізуються магнетит, мідь, срібло, золото, алмаз і деякі інші мінерали. Недарма Йоганн Кеплер (1571–1630) писав: "...Серед правильних тіл найперше, начало і батько решти – куб, а його, якщо можна так сказати, дружина – октаедр..."

Введемо таку систему координат, щоб її осі проходили через всі вершини октаедра (рис. 2).

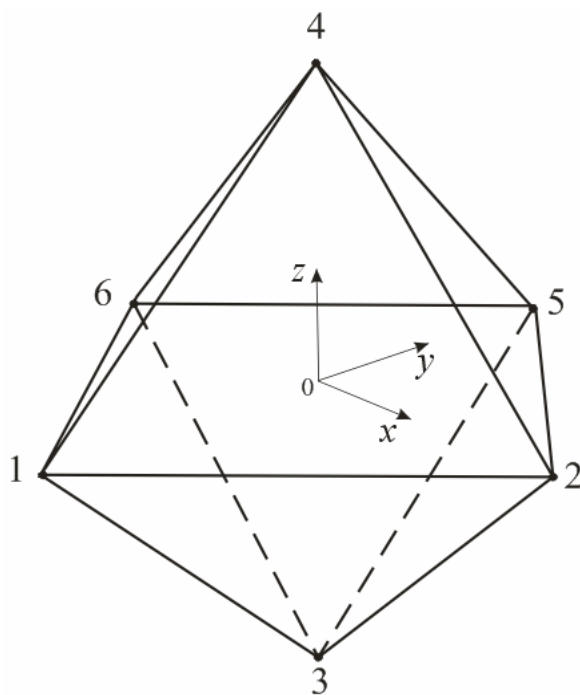


Рис. 2. Зображення антипризми у формі октаедра

Знайдемо розв'язок поставленої задачі за допомогою таких відомих методів, як метод скінчених різниць (МСР) та метод Монте-Карло.

За МСР температуру в кожному внутрішньому вузлі можна визначити як середнє арифметичне значень температури в 12 сусідніх вузлах. Такий обчислювальний шаблон зображено на рис. 3. У вузлах, що лежать на гранях та ребрах октаедра, використовується шаблон з 6 та 2 сусідніх вузлів відповідно. Тут використано гіпотезу, що поширення тепла на грані підпорядковується плоскому, а вздовж ребра – лінійному законам.

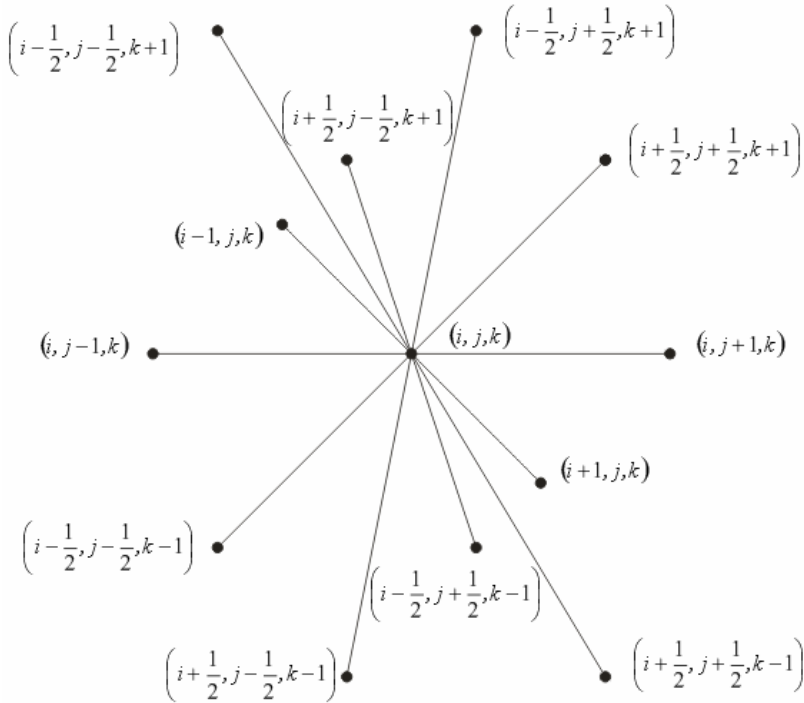


Рис. 3. Обчислювальний шаблон

В області октаедра з стороною  $a$  було введено сітку з кроком  $\frac{a}{5}$ . Це призвело до отримання системи з 140 лінійних рівнянь, яку було розв'язано засобами програмного середовища MathCad. Результати обчислень наведено в табл. 2.

У випадку застосування методу Монте-Карло було проведено низку комп'ютерних експериментів засобами C/C++ зі здійснення випадкових блукань. Досліджувана область покривалася такою ж сіткою, як і в МСР. Відомо, що забезпечення прийнятної точності відбувається за рахунок великої кількості статистичних випробувань, тому у ході проведення обчислень експеримент повторювався понад 20 000 разів. Отримані результати наведено в табл. 2.

Розглянемо можливість побудови температурного поля з використанням базису, побудованого засобами геометричного моделювання [4, 5]. Згідно цього підходу базисна функція для кожного вузла являє собою композицію з поверхонь в рамках інтерполяційної гіпотези типу Лагранжа:

$$N_i(x_k, y_k, z_k) = \delta_{ik}, \quad (i = \overline{1,6}; k = \overline{1,6}), \quad (1)$$

де  $\delta_{ik}$  – символ Кронекера,  $N_i(x, y, z)$  – базисна функція, що відповідає вузлу  $i$ .

Система базисних функцій також має забезпечувати ваговий баланс:

$$\sum_{i=1}^6 N_i(x, y, z) = 1.$$

Зрозуміло, що такий підхід забезпечує неєдиність базису в залежності від обраної композиції та дає можливість отримувати нові альтернативні базиси за допомогою простого та наочного способу.

Неважко помітити, що достатньо побудувати лише функцію форми для вузла 1, оскільки решта функцій легко отримуються з неї шляхом циклічної перестановки координат. Тому покажемо різні варіанти конструювання цієї функції.

Модель 1. Використаємо параболоїд обертання та дробово-раціональний множник з метою забезпечення умов (1) та (2):

$$N_1^{(1)}(x, y, z) = \frac{b^2}{6b^2 - 4(x^2 + z^2 + y^2)} \left( 1 - \frac{y}{b} - \frac{x^2 + z^2}{b^2} \right),$$

де  $b = \frac{a}{\sqrt{2}}$  – відстань від центру октаедра до його вершин.

Модель 2. Використаємо композицію з площин, що проходять через всі грані, несуміжні з вузлом 1, забезпечуючи при цьому умову (1):

$$N_1^{(2)}(x, y, z) = \frac{1}{16b^4} (x + y + z - b)(x + y - z - b)(-x + y + z - b)(-x + y - z - b).$$

У такому випадку існує незначне порушення вагового балансу, тому слід потрібно провести корекцію базисної функції:

$$N_1^{(2^*)}(x, y, z) = \frac{N_1^{(2)}(x, y, z)}{\sum_{i=1}^6 N_i^{(2)}(x, y, z)}.$$

Модель 3. Використаємо попередню комбінацію поверхонь, але спробуємо зменшити осциляції на границі:

$$N_1^{(3)}(x, y, z) = \frac{(x + y + z - b)(x + y - z - b)(-x + y + z - b)(-x + y - z - b)}{\left( 6b^4 + 10y^2b^2 \right) \left( 1 - \frac{4}{17b^2} (x^2 + z^2) \right)}.$$

При цьому значення функції на серединах суміжних з вузлом 1 ребрах дорівнює 0.5.

З метою виконання (2) маємо:

$$N_1^{(3^*)}(x, y, z) = \frac{N_1^{(3)}(x, y, z)}{\sum_{i=1}^6 N_i^{(3)}(x, y, z)}.$$

Модель 4. Функцію форми для першого вузла можна отримати і в такому вигляді:

$$N_1^{(4)}(x, y, z) = \frac{(x + y + z - b)(x + y - z - b)(-x + y + z - b)(-x + y - z - b)}{6b^4 + 10b^2(y^2 - x^4 - z^4)}.$$

Для виконання (2) маємо:

$$N_1^{(4*)}(x, y, z) = \frac{N_1^{(4)}(x, y, z)}{\sum_{i=1}^6 N_i^{(4)}(x, y, z)}.$$

Зазначимо, що за допомогою такого підходу можна отримати безліч дробово-раціональних базисів, але альтернативою для них виступають поліноміальні функції форми.

Модель 5. Побудуємо поліноміальну функцію для вузла 1, яка є гармонічною за диференціальним критерієм Лапласа:

$$N_1^{(5)}(x, y, z) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2b}y + \frac{1}{3b^2}y^2 - \frac{1}{6b^2}x^2 - \frac{1}{6b^2}z^2.$$

Зазначимо, що при цьому зберігається ваговий баланс у антипризмі.

Введена система координат  $Oxyz$  є зручною для октаедра, але є неприродною для антипризми. Логічно розмістити вісь апікат так, щоб вона проходила через центри основ антипризми, а початок координат містився б в її центрі. При цьому напрям осей абсцис та ординат може бути довільним, проте його вибір доцільно узгодити з основами антипризми. Наприклад, в антипризмі з трикутною основою зручно ввести таку систему координат  $Ox'y'z'$ , в якій вісь  $Oz'$  проходить через баріцентри граней 1-2-3 та 4-5-6, вісь  $Ox'$  – через середини ребер 1-6 та 2-5, а вісь  $Oy'$  – через середини апофем граней 3-5-6 та 1-2-4, опущених з вершин 3 та 4 відповідно. Нехай висота антипризми  $H = 2$ , тоді сторона антипризми  $a = \sqrt{6}$  ( $b = \sqrt{3}$ ), що впливає з геометричних міркувань (рис. 4).

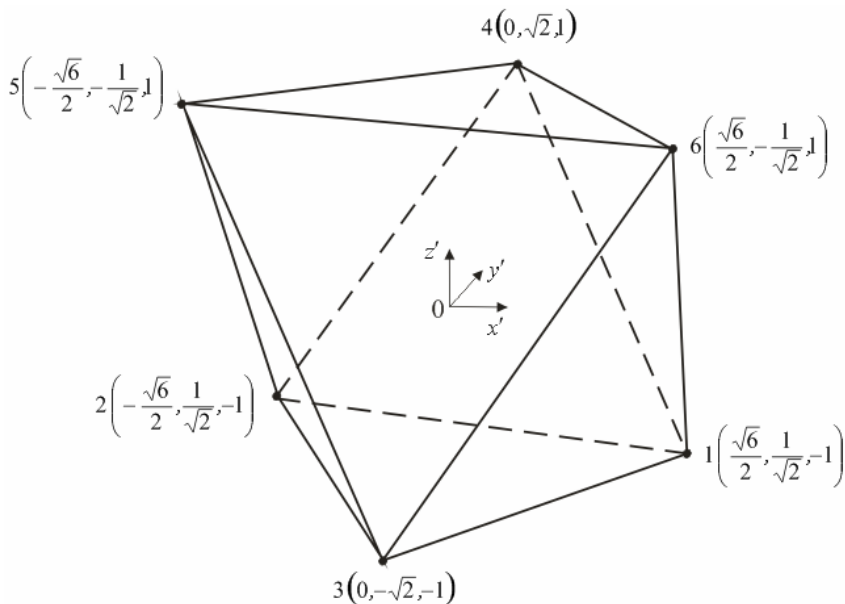


Рис. 4. Система координат  $Ox'y'z'$  в антипризмі

Побудуємо базис в антипризмі згідно введеної системи координат.

З використанням ймовірнісно-геометричного підходу на двовимірних скінченних елементах трикутної форми [6] та врахуванням аплікати  $z'$ , базисна функція для вузла 1 матиме вигляд:

$$N_1^{(6)}(x', y', z') = \frac{\text{mes } D_1}{\text{mes } D} \cdot \frac{1}{2}(1 - z'),$$

$$\text{де } \text{mes } D = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x'_1 & y'_1 \\ 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} \text{ – площа основи 1-2-3,}$$

$$\text{mes } D_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x' & y' \\ 1 & x'_2 & y'_2 \\ 1 & x'_3 & y'_3 \end{vmatrix} \text{ – площа області, сприятливої для вузла 1 в}$$

основі 1-2-3.

Дана функція задовольняє інтерполяційній гіпотезі типу Лагранжа та є гармонічною за диференціальним критерієм Лапласа.

Решта функцій отримується аналогічним чином. При цьому в антипризмі зберігається ваговий баланс:

$$\sum_{i=1}^6 N_i^{(6)}(x', y', z') = 1$$

За відомих постійних значеннях температури у вузлах антипризми  $T_1 - T_6$  (табл. 1) значення температури в будь-якій довільно вибраній точці  $A$  в кожному з базисів знайдемо за формулою:

$$T^{(k)}(A) = \begin{cases} \sum_{i=1}^6 N_i^{(k)}(x, y, z) \cdot T_i, & (k = \overline{1,5}), \\ \sum_{i=1}^6 N_i^{(k)}(x', y', z') \cdot T_i, & (k = 6). \end{cases}$$

Результати розрахунків у вибраних контрольних точках для побудованих моделей наведено в табл. 2. Ці точки задані в системі координат  $Oxyz$ . Зв'язок систем  $Oxyz$  та  $Ox'y'z'$  здійснювався за допомогою кутів Ейлера [7].

Оскільки результати, отримані за МСР та методом Монте-Карло, добре узгоджуються, то подальші порівняння будемо проводити тільки з МСР. Для кращого сприйняття отриманих результатів на основі таблиці 2 визначено відносні похибки температур в контрольних точках антипризми, знайдених вже описаними методами, в порівнянні з МСР (табл. 3).

Табл. 2. Значення температури в контрольних точках, [°C]

Контрольна точка	МСР	Метод Монте-Карло	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5	Модель 6
$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{5}; -\frac{2\sqrt{3}}{5}; 0\right)$	41.73 9	41.708	37.538	43.643	42.876	42.851	41.6	41.6
$A_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5}; 0\right)$	36.26 1	36.266	35.538	36.766	36.444	36.431	36.4	36.4
$A_3\left(0; \frac{\sqrt{3}}{5}; 0\right)$	33.26 3	33.277	34.384	32.822	32.807	32.809	33.2	33.2
$A_4\left(\frac{-3\sqrt{3}}{5}; 0; 0\right)$	26.85 9	26.785	31.579	23.551	25.362	25.949	27.2	27.2
$A_5\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}; 0; \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$	32.89 6	32.913	34.308	33.234	32.654	32.615	33.2	33.6
$A_6\left(\frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$	30	30.02	33.188	29.048	29.048	29.048	30.0	30.0
$A_7\left(\frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{-\sqrt{3}}{5}\right)$	40	40.038	36.812	40.952	40.952	40.952	40.0	40.0
$A_8\left(\frac{-2\sqrt{3}}{5}; 0; \frac{-\sqrt{3}}{5}\right)$	34.89 6	34.847	35.077	33.048	34.523	34.586	35.2	35.6
$A_9\left(0; \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{-2\sqrt{3}}{5}\right)$	47.37	47.051	39.692	50.520	49.321	49.293	47.2	46.8
$A_{10}\left(0; \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$	27.36 5	27.358	32.000	24.498	26.021	26.088	27.2	27.6

Табл. 3. Відносні похибки обчислень у порівнянні з МСР, [%]

Контрольна точка	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5	Модель 6
$A_1\left(\frac{\sqrt{3}}{5}; -\frac{2\sqrt{3}}{5}; 0\right)$	10.06	4.56	2.72	2.66	0.33	0.33
$A_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5}; 0\right)$	1.99	1.39	0.50	0.47	0.38	0.38
$A_3\left(0; \frac{\sqrt{3}}{5}; 0\right)$	3.37	1.33	1.37	1.36	0.19	0.19
$A_4\left(\frac{-3\sqrt{3}}{5}; 0; 0\right)$	17.57	12.32	5.57	3.39	1.27	1.27
$A_5\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}; 0; \frac{\sqrt{3}}{5}\right)$	4.29	1.03	0.74	0.85	0.92	2.14



Продовження табл. 3.

Контрольна точка	Модель 1	Модель 2	Модель 3	Модель 4	Модель 5	Модель 6
$A_6 \left( \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5} \right)$	10.63	3.17	3.17	3.17	0.00	0.00
$A_7 \left( \frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{\sqrt{3}}{5}; \frac{-\sqrt{3}}{5} \right)$	7.97	2.38	2.38	2.38	0.00	0.00
$A_8 \left( \frac{-2\sqrt{3}}{5}; 0; \frac{-\sqrt{3}}{5} \right)$	0.52	5.30	1.07	0.89	0.87	2.02
$A_9 \left( 0; \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{-2\sqrt{3}}{5} \right)$	16.20	6.66	4.13	4.07	0.35	1.19
$A_{10} \left( 0; \frac{-\sqrt{3}}{5}; \frac{2\sqrt{3}}{5} \right)$	16.94	10.48	4.91	4.67	0.60	0.86

**Висновки.** У даній роботі вперше досліджується стаціонарне поле антипризми в рамках температурної задачі. Засобами геометричного моделювання авторами побудовано декілька базисів на антипризмі. В тому числі вдалось побудувати гармонічний поліноміальний базис, який добре апроксимує температурне поле антипризми. Базис б також забезпечує хороші результати і заслуговує на особливу увагу, оскільки процедуру його побудови можна поширити на антипризми з іншими основами.

Значимо, що наведенні моделі не потребують нанесення сітки в області антипризми та дають змогу знайти значення досліджуваної неперервної величини в довільно вибраній точці, чого не можна зробити у разі застосування наведених дискретних методів.

### *Література*

1. Андреев Н.Н., Юдин В.А. Экстремальные расположения точек на сфере // Математическое просвещение (третья серия). – 1997. – Вып. 1. – С. 115-121.
2. Андреев Н.Н. Расположение точек на сфере с минимальной энергией // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. – 1997. – Т. 219. – С. 27-31.
3. Антипризма // Математическая энциклопедия. – Т.1. – М.: Изд. «Советская энциклопедия», 1977. – С. 297.
4. Хомченко А.Н., Камаева Л.И. Геометрические аспекты сирендиповых аппроксимаций. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1987. – 10 с. – Деп. в УкрНИИТИ 27.03.87, № 1062.

5. Хомченко А.Н., Литвиненко Е.И., Гучек П.И. Геометрия серенди-повых аппроксимаций // Прикладная геометрия и инженерная графика. – К.: Будівельник, 1996. – Вып. 59. – С. 40-42.
6. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ. Ивано-Франк. ин-т нефти и газа. – Ивано-Франковск, 1982. – 7 с. – Деп. в ВИНТИ 21.10.82, № 5264.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.

## RESEARCH OF THE STATIONARY FIELD IN THE AREA OF ANTIPRISM

**Kamaeva S.O.**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas  
15, Carpats'ka Street, Ivano-Frankivs'k, 76019, Ukraine,  
ph. +380 (3422) 4 21 27; e-mail: [Svitlana.Kamaeva@gmail.com](mailto:Svitlana.Kamaeva@gmail.com)*

*Work is devoted to an exploration of the stationary field in the area of antiprism. For this task several mathematical models were built and comparing of obtained results with the results, obtained by the known discrete methods, was conducted.*

**Keywords:** *stationar field, antiprism, task of heat conductivity, method of scinchennih differences, method of Monte Carlo.*