УДК 517.53

МЕРОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ІЗ ЗАДАНОЮ МНОЖИНОЮ ВАЛІРОНІВСЬКИХ ДЕФЕКТНИХ ЗНАЧЕНЬ

Я.І. Савчук

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, Україна, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (3422) 4 21 23; e-mail: math@nung.edu.ua

Розглядається питання розподілу значень мероморфних функцій скінченного порядку. Отримано відносно повне описання множини дефектних значень в розумінні Ж. Валірона.

Ключові слова: *мероморфна функція, множина валіронівських дефектних значень, характеристика Неванлінни.*

В даній роботі застосовуються основні результати теорії мероморфних функцій, а також позначення, використані в [1].

Зупинимось на деяких основних поняттях.

Мероморфною функцією в комплексній області D називається функція комплексної змінної $w = f(z)$, яка є аналітичною в усіх точках даної області, за винятком множини точок, які є полюсами для $w = f(z)$ і не мають точки накопичення в D. Відомо (наприклад, [2]), що будь-яку мероморфну в D функцію $f(z)$ можна подати у вигляді

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}\,, \tag{1}$$

де $f_1(z)$ та $f_2(z)$ - аналітичні в D функції.

Нижче розглядатимемо мероморфні в усій комплексній площині $\boldsymbol{C}$ функції. Відповідно до формули (1) таку функцію можна подати у вигляді частки двох аналітичних в $\boldsymbol{C}$ функцій, які ще називають *цілими* функціями.

Якщо для характеристики росту цілої функції $g(z)$ розглядають функцію

$$M(r,g) = \max_{|z|\le r}|g(z)| = \max_{|z|=r}|g(z)|\,,$$

то, очевидно, такий підхід не придатний для мероморфних функцій, оскільки, якщо z_0 - полюс функції $f(z)$, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Для опису поведінки мероморфної функції $f(z)$ введемо ряд величин, які називають характеристиками Неванлінни функції $f(z)$.

Позначимо через $n(r,f)$ кількість полюсів $f(z)$ в крузі $\{|z| \le r\}$; при цьому вважатимемо, що полюс порядку m дає внесок, рівний m. Приймемо

$$N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t,f) - n(0,f)}{t}dt + n(0,f)\ln r\,.$$

Ця характеристика також описує розташування полюсів функції $f(z)$. Функція $N(r,f)$ є неперервною, неспадною та опуклою від $\ln r$ на $(0,\infty)$ функцією.

Розглянемо ще характеристику росту функції $f(z)$:

$$m(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi,$$

де функція $\ln^+|x|$ визначається при $x\geq 0$ рівністю $\ln^+|x|=\max\{\ln x,0\}$.

Зауважимо, що хоча функція $m(r,f)$ є неперервною від *r*, її поведінка може бути менш правильною, ніж $N(r,f)$.

Характеристикою мероморфної функції $f(z)$ називається величина

$$T(r,f)=m(r,f)+N(r,f).$$

Нехай $\grave{a}\neq\infty$ - деяке комплексне число. Величина $m(r,a,f)=m\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ характеризує наближення функції $f(z)$ до a . Очевидно, що величини $n(r,a,f)=n\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ та $N(r,a,f)=N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ характеризують модулі a-точок функції $f(z)$, тобто модулі коренів рівняння

$$f(z)=\grave{a}.$$

Виявляється, що для довільної функції $f(z)\neq const$ сума $m(r,a,f)+N(r,a,f)$ майже інваріантна відносно a, а саме: має місце перша основна теорема розподілу значень.

Теорема 1. *Нехай* $N(z)$

Позначимо $E_V(f)=\{a\in \boldsymbol{C} : \Delta(a,f)>0\}$.

Для мероморфних функцій скінченного порядку А. Хіллєнгрен [3] отримав такий важливий результат щодо множини валіронівських дефектних значень $E_V(f)$.

Теорема 2. *Нехай $U\in \boldsymbol{C}$. Наступні умови еквівалентні:*

1) існують $\alpha>0$ та числа $a_1, a_2, \ldots \in \boldsymbol{C}$, такі, що для довільного $a\in U$ виконується $|a-a_n|<\exp\left(-e^{n\alpha}\right)$ для нескінченної кількості значень n;

2) існує мероморфна функція f скінченного порядку та число $x>0$, такі, що для довільного $a\in U$ виконується $\Delta(a,f)>x$.

Наслідок. *Для довільної мероморфної функції f скінченного порядку множина $E_V(f)$ є зліченним об'єднанням множин, які задовольняють умові 2) теореми 2.*

Основним результатом даної статті є така теорема.

Теорема. *Для довільної множини $U\subset \boldsymbol{C}$, яка є зліченним об'єднанням множин, що задовольняють умові 1) теореми 2, існує мероморфна функція f скінченного порядку, така що, $U\subset E_V(f)$.*

Доведення. Нехай $U=\bigcup\limits_{s=1}^{\infty} U_s$, де кожна множина U_s задовольняє умові 1) теореми 2; $\alpha_s>0$ та a_{ns}, $n=1, 2, \ldots$ відповідають U_s в розумінні, вказаному в умові 1) теореми 2. Не зменшуючи загальності, вважаємо всі $\alpha_s<1/5$.

Розіб'ємо півінтервал $[1;+\infty)$ на неперетинні множини $A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots$:

$$A_s=\bigcup_{j=1}^{\infty}\left[2^j-2^{j-s};\ 2^j-2^{j-s-1}\right).$$

Для кожного s виберемо систему чисел $M_{1s}, M_{2s}, \ldots$ із $\boldsymbol{R}$, таку, щоб виконувались наступні умови:

M_{1s} - таке найменше число, що $E_{1s}=[M_{1s}+1;\ M_{1s}+e^{\alpha_s})\subset A_s$;

M_{2s} - таке найменше число, що $E_{2s}=[e^{\alpha_s}+M_{2s};\ e^{2\alpha_s}+M_{2s})\subset A_s\setminus E_{1s}$;

. . . .

M_{ns} - таке найменше число, що $E_{ns}=[e^{(n-1)\alpha_s}+M_{ns};\ e^{n\alpha_s}+M_{ns})\subset A_s\setminus\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}E_{js}$;

. . . .

Очевидно, такий вибір можливий, оскільки A_s складається з півінтервалів $A_{sj}=\left[2^j-2^{j-s};\ 2^j-2^{j-s-1}\right)$, таких, що $mes A_{sj}\to\infty$ при $j\to\infty$.

Приймемо $c_{01}=1$, $c_{02}=0$. При $j\geq 1$ візьмемо $c_{j1}=\dfrac{a_{ns}}{1+|a_{ns}|}$, $c_{j2}=\dfrac{1}{1+|a_{ns}|}$, якщо

$$e^{(n-1)\alpha_s}+M_{ns}\leq j<e^{n\alpha_s}+M_{ns},\ \ n\in \boldsymbol{N},\ \ s\in \boldsymbol{N}.$$

Для всіх інших $j \ge 1$ приймемо $c_{j1} = 0,\ c_{j2} = 1$. Зауважимо, що для всіх значень $à \in \boldsymbol{C}$ та чисел $j \in \boldsymbol{N}$ виконуватиметься нерівність

$$\left|c_{j1} - ac_{j2}\right| < 1 + |a|. \tag{3}$$

Покажемо, що функція вигляду (1), де $f_1(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j1} z^j}{j!}$, , $f_2(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{j2} z^j}{j!}$ буде шуканою.

Зафіксуємо $s \in \boldsymbol{N}$. Нехай $A_s(r) = A_s \bigcap (0; r]$. Неважко побачити, що при всіх $r > r_0$ виконується умова

$$\frac{mes A_s(r)}{r} \ge 2^{-s-2}. \tag{4}$$

Оскільки $\frac{mes E_{ns}}{mes E_{n-1,s}} = e^{\alpha_s} < 2$, то при всіх $\nu \ge \nu_0$ маємо $\frac{mes\left(\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) \bigcap A_{s\nu}\right)}{mes A_{s\nu}} > \frac{1}{3}$.

Тоді на основі (4) при $r > r_0$ виконується нерівність

$$\frac{mes\left(\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) \bigcap [0; r)\right)}{r} \ge \frac{2^{-s-2}}{3}. \tag{5}$$

Якщо візьмемо $r = e^{n\alpha_s} + M_{ns}$, то $mes\left(\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) \bigcap [0; r)\right) = mes\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_{js}\right) = e^{n\alpha_s} - 1$. Враховуючи (5), отримаємо

$$M_{ns} \le 3 \cdot 2^{s+2} \cdot e^{n\alpha_s}. \tag{6}$$

Враховуючи цю нерівність, матимемо

$$\frac{e^{n\alpha_s} + M_{ns}}{e^{(n-1)\alpha_s} + M_{ns}} \ge \frac{e^{n\alpha_s} + 3 \cdot 2^{s+2} \cdot e^{n\alpha_s}}{e^{(n-1)\alpha_s} + 3 \cdot 2^{s+2} \cdot e^{n\alpha_s}} = \frac{1 + 3 \cdot 2^{s+2}}{e^{-\alpha_s} + 3 \cdot 2^{s+2}}. \tag{7}$$

Нехай тепер $à \in U_s$. Нам потрібно показати, що $\Delta(a, f) > 0$. Оскільки U_s задовольняє умові (1) теореми 2, то $|a - a_{ns}| < \exp\left(-e^{n\alpha_s}\right)$ для нескінченної кількості чисел n.

Позначимо $t = \left(\frac{1 + 3 \cdot 2^{s+2}}{e^{-\alpha_s} + 3 \cdot 2^{s+2}}\right)^{1/2}$, $\left[e^{(n-1)\alpha_s} + M_{ns}\right] = N$, $Nt = r$. Із (6) та (7) випливає, що $r < e^{n\alpha_s} + M_{ns} \le e^{n\alpha_s} + 3 \cdot 2^{s+2} \cdot e^{n\alpha_s} < 2^{s+4} \cdot e^{n\alpha_s}$. Тому $|a - a_{ns}| < \exp\left(-r \cdot 2^{-s-4}\right)$.

Тоді з врахуванням нерівності (3) отримуємо ($|z| = r$):

$$|f_1(z)-a\cdot f_2(z)|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{j1}-ac_{j2}}{j!}z^j\right|=\left|\left(\sum_{j=0}^{N}+\sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{c_{j1}-ac_{j2}}{j!}z^j+\sum_{j=N+1}^{[Nt^2]}\frac{a_{ns}-a}{(1+|a_{ns}|)j!}z^j\right|\le$$

$$\le\left(\sum_{j=0}^{N}+\sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{|c_{j1}-ac_{j2}|}{j!}|z|^j+\sum_{j=N+1}^{[Nt^2]}\frac{|a_{ns}-a|}{(1+|a_{ns}|)j!}|z|^j\le\left(\sum_{j=0}^{N}+\sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{1+|a|}{j!}r^j+$$

$$+\sum_{j=N+1}^{[Nt^2]}\frac{|a_{ns}-a|}{j!}r^j\le(et)^N+\left(e/t\right)^{Nt^2}+\exp\left(-r\cdot 2^{-s-4}\right). \qquad (8)$$

Оскільки $|a-a_{ns}|<\exp\left(-e^{n\alpha_s}\right)<1$, то $|a_{ns}|<|a|+1$, звідки $\frac{1}{|a_{ns}|+1}>\frac{1}{|a|+2}$. Тому

$$|f_2(z)|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{j2}}{j!}z^j\right|=\left|\left(\sum_{j=0}^{N}+\sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\frac{c_{j2}}{j!}z^j+\sum_{j=N+1}^{[Nt^2]}\frac{1}{(1+|a_{ns}|)j!}z^j\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{(1+|a_{ns}|)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}+\left(\sum_{j=0}^{N}+\sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\left(c_{j2}-\frac{1}{1+|a_{ns}|}\right)\frac{z^j}{j!}\right|\ge\left|\frac{1}{1+|a_{ns}|}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^j}{j!}\right|-$$

$$-\left|\left(\sum_{j=0}^{N}+\sum_{j=[Nt^2]+1}^{\infty}\right)\left(c_{j2}-\frac{1}{(1+|a_{ns}|)}\right)\frac{z^j}{j!}\right|\ge\frac{|e^z|}{2+|a|}-2\left((et)^N+\left(e/t\right)^{Nt^2}\right). \qquad (9)$$

Позначимо $\beta=\min\left\{\ln t,\ \arccos\left(1-2^{-s-4}\right)\right\}$. Очевидно, що $\beta<\alpha_s<1/5$, тому $(et)^N<\exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)$, $\left(e/t\right)^{Nt^2}<\exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)$. Підставивши ці вирази в (8) та (9), одержимо:

$$\left|\frac{1}{f\left(re^{i\varphi}\right)-a}\right|=\frac{\left|f_2\left(re^{i\varphi}\right)\right|}{\left|f_1\left(re^{i\varphi}\right)-a\cdot f_2\left(re^{i\varphi}\right)\right|}\ge\frac{\frac{1}{2+|a|}\exp(r\cos\varphi)-4\exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)}{2(1+|a|)\exp\left(r\cos\frac{\beta}{3}\right)+\exp\left(r\left(1-2^{-s-4}\right)\right)}\ge$$

$$\ge\frac{1}{2(2+|a|)^2}\exp\left(r\left(\cos\varphi-\cos\frac{\beta}{3}\right)\right)-\frac{2}{1+|a|}.$$

Тоді

$$m(r,a,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln^+\left|\frac{1}{f\left(re^{i\varphi}\right)-a}\right|d\varphi\ge\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta/3}^{\beta/3}\ln^+\left|\frac{1}{f\left(re^{i\varphi}\right)-a}\right|d\varphi\ge$$

$$\ge\frac{1}{2\pi}\int_{-\beta/3}^{\beta/3}r\left(\cos\varphi-\cos\frac{\beta}{3}\right)d\varphi+\mathrm{O}(1)=\frac{r}{\pi}\left(\sin\frac{\beta}{3}-\frac{\beta}{3}\cos\frac{\beta}{3}\right)+\mathrm{O}(1)>\frac{r\beta^3}{300}+\mathrm{O}(1),\quad r\to\infty. \qquad (10)$$

Відомо [1], що для функції виду (1) виконується рівність

$$T(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^r\ln\left(\left|f_1\left(re^{i\varphi}\right)\right|+\left|f_2\left(re^{i\varphi}\right)\right|\right)d\varphi+\mathrm{O}(1),\quad r\to\infty. \qquad (11)$$

В нашому випадку маємо

$$\left|f_1\left(re^{i\varphi}\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_{j1}}{j!}\left(re^{i\varphi}\right)^j\right| \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left|c_{j1}\right|}{j!}\left|re^{i\varphi}\right|^j \le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}r^j = e^r .$$

Аналогічно $\left|f_2\left(re^{i\varphi}\right)\right| \le e^r$. Тоді, враховуючи (11), отримуємо

$$T(r,f) \le r + O(1), \quad r \to \infty . \tag{12}$$

Оскільки при $a \in U_s$ нерівність $\left|a - a_{ns}\right| < \exp\left(-e^{n\alpha_s}\right)$ виконується для деякої послідовності чисел $n \in \boldsymbol{N}$, яка прямує до ∞, то нерівність (10) виконується для деякої послідовності чисел $r \in \boldsymbol{R}$, яка прямує до $+\infty$. Враховуючи (12), дістаємо $\Delta(a,f) > \dfrac{\beta^3}{300}$.

Література

1. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.
2. Хейман У. Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.
3. Hylltngren A. Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane // Acta math. – 1970. – 124, 1 - 2. – P. 1 - 8.

MEROMORF FUNCTIONS OF EVENTUAL ORDER WITH THE SET OF GREAT NUMBER VALIRON IMPERFECT VALUES

Y.I. Savchuk,
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas
15, Carpats'ka Street, Ivano-Frankivs'k, 76019, Ukraine,
ph. +380 (3422) 4 21 23; e-mail: math@nung.edu.ua

A question of distributing of values of meromorf functions of eventual *order is examined. It is got relatively complete description of great number of imperfect values in understanding of Valiron.*

Keywords*: meromorf function, great number of Valiron imperfect values, Nevanlinna's description.*