Теорія ймовірностей та математична статистка

УДК 519.21

ПЕРЕТВОРЕННЯ СИМЕТРИЧНИХ СТІЙКИХ ПРОЦЕСІВ

Х. В. Мамалига, М. М. Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

В роботі розглядається питання перетворення фазового простору та випадкової заміни часу в одновимірному симетричному стійкому процесі. Побудовано символ твірного оператора утвореного таким чином процесу Маркова

Ключові слова: *симетричний стійкий процес, твірний оператор, символ оператора, випадкова заміна часу.*

Вступ

Зафіксуємо значення параметрів $\alpha \in (1,2]$ та $c > 0$. Симетричним α-стійким випадковим процесом в R зветься одновимірний процес Маркова, твірний оператор $\mathbf{A}$ якого діє на функції виду $\varphi(x) = \int_R e^{i\lambda x}\Phi(\lambda)d\lambda$, $x \in R$ за правилом $\mathbf{A}\varphi(x) = -c\int_R |\lambda|^\alpha e^{i\lambda x}\Phi(\lambda)d\lambda$. Його щільність ймовірності переходу задається рівністю

$$g_0(t,x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{i\lambda(y-x)-ct|\lambda|^\alpha}d\lambda . \tag{1}$$

При $\alpha = 2$ інтеграл в правій частині (1) можна легко обчислити і одержати $g_0(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{4c\pi t}}e^{-\frac{(y-x)^2}{4ct}}$. Тобто даний випадковий процес є вінеровим процесом (стандартним вінеровим процесом, якщо додатково покласти $c = 1/2$). Позначатимемо його через $(w(t))_{t\geq 0}$. Добре відомо (див., наприклад, [1, 2]), що за умови обмеженості функції $A(x) = \frac{1}{c}\int_0^x a(y)dy$ випадковий процес $\eta(t) = f^{-1}(w(\tau_t))$, де $f(x) = \int_0^x e^{-2A(y)}dy$, а $\tau_t = \inf\left\{ s \geq 0 : \int_0^s v\left(f^{-1}(w(\rho))\right)d\rho \geq t \right\}$ з функцією

$v(x)=\frac{1}{c}e^{4A(x)}$ є дифузійним процесом з дифузією $2c$ та переносом $(a(x))_{x\in R}$. Це означає, що твірний оператор процесу Маркова $\eta(t)$ визначений на двічі диференційованих функціях та має вигляд $c\frac{d^2}{dx^2}+a(x)\frac{d}{dx}$.

Природно задатися питанням: як виглядатиме твірний оператор процесу Маркова утвореного із симетричного α-стійкого (при $\alpha\in(1,2)$ випадкового процесу з допомогою деякого перетворення фазового простору та наступної випадкової заміни часу? Це дозволить виділити клас допустимих збурень симетричних стійких процесів. Деяку відповідь на поставлене питання наведено в пункті 2. Наступний пункт роботи присвячено формулюванню потрібних допоміжних понять та результатів.

1. Основні поняття та допоміжні результати

Нехай $(\xi(t),M_t,P_x)$ (чи, коротше, $(\xi(t)_{t\geq 0})$ або $\xi(t)$) однорідний процес Маркова в $(R,\mathfrak{B}(R))$. Тут $M_t\cdot(t\geq 0))$ – σ-алгебра подій, відносно якої вимірна випадкова величина $\xi(t)$, P_x – сім'я умовних ймовірнісних мір при умові $\{\xi(0)=x\}$, $\mathfrak{B}(R)$-борелева σ-алгебра підмножин R. Позначимо через $B(R)$ бананів простір обмежених на R функцій з нормою $\|f\|=\sup_{x\in R}|f(x)|$. Твірним(інфінітизимальним) оператором процесу Маркова називається оператор $\mathbf{A}$, що діє на функції з $B(R)$ за правилом $\mathbf{A}f(x)=\lim_{t\downarrow 0+}\frac{1}{t}(E_xf(\xi(t))-f(x))$ і визначений на тих функціях з $B(R)$, на яких вказана границя існує в сенсі сильної збіжності в $B(R)$. Функція $P(t,x,\Gamma)=P_x(\xi(t)\in\Gamma)$, $t>0$, $x\in R$, $\Gamma\in\mathfrak{B}(R)$ називається ймовірністю переходу процесу Маркова $\xi(t)$. Ймовірність переходу однозначно (за умови рівності початкових значень) задає процес Маркова з точністю до стохастичної еквівалентності.

Нехай γ вимірне відображення $(R,\mathfrak{B}(R))$ в $(R,\mathfrak{B}(R))$. Якщо має місце рівність $P(t,x,\gamma^{-1}\Gamma)=P(t,y,\gamma^{-1}\Gamma)$ для всіх $t\geq 0$, $\Gamma\in\mathfrak{B}(R)$ та $x,y\in R$ таких, що $\gamma x=\gamma y$, то $\eta(t)=\gamma\xi(t)$ є процесом Маркова утвореним з процесу $\xi(t)$ з допомогою перетворення γ його фазового простору.

Нехай функція $(v(x))_{x\in R}$ приймає тільки додатні значення. Визначимо сім'ю моментів зупинки рівністю

$$\tau_t=\inf\left\{s\geq 0:\int_0^s v(\xi(u))du\geq t\right\},\, t\geq 0\,.$$

Тоді випадковий процес $\xi(\tau_t)$ узгоджений з потоком σ-алгебр M_{τ_t} є процесом Маркова утвореним з $\xi(t)$ з допомогою випадкової заміни часу. При цьому твірний оператор утвореного процесу рівний $\frac{1}{v(\cdot)}\mathbf{A}$. З деталями викладеного можна ознайомитись в класичній монографії [3].

2. Перетворення фазового простору та випадкова заміна часу у симетричному стійкому процесі

Позначимо через $(\xi_0(t), M_t, P_x)$ симетричний α-стійкий (з $\alpha \in (1,2)$) випадковий процес зі щільністю ймовірності переходу відносно лебегової міри $(g_0(t,x,y))_{t>0,x\in R,y\in R}$ визначеною рівністю (1).

Нехай функція $f : D \to R\ (D \subseteq R)$ взаємно однозначна та диференційована. Покладемо $\xi(t) = f^{-1}(\xi_0(t))$. Випадковий процес $(\xi_0(t))_{t>0}$ є марківським зі щільністю ймовірності переходу

$$g(t,x,y) = \begin{cases} g_0(t, f(x), f(y))f'(y), \{x,y\} \in D, \\ 0, \textit{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Для кожної неперервної, обмеженої функції $\varphi((x))_{x\in R}$ функція

$$u_0(t,x,\varphi) = \int_R \varphi(y) g_0(t,x,y)dy$$

задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}u_0(t,\cdot)(x), \quad t > 0, \quad x \in R \tag{2}$$

та початкову умову $u(0+,x,\varphi) = \varphi(x)$.

Розглянемо функцію $(u(t,x,\varphi))_{t>0,x\in D}$, що задається рівністю

$$u(t,x,\varphi) = \int_R \varphi(y) g(t,x,y)dy = \int_D \varphi(y) g_0(t, f(x), f(y)) f'(y)dy =$$
$$= \int_R \varphi(f^{-1}(z)) g_0(t, f(x), z)dz = u_0(t, f(x), \varphi(f^{-1})).$$

З рівняння (2) маємо

$$\frac{\partial u(t,x,\varphi)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} u_0(t, f(x), \varphi(f^{-1})) = \mathbf{A}u_0(t,\cdot,\varphi(f^{-1}))(f(x)). \tag{3}$$

Для зручності позначимо $\psi = \varphi(f^{-1})$. Тоді

$$u_0(t,x,\psi) = \int_R \psi(z) g_0(t,y,z)dz = \int_R \psi(z) \frac{1}{2\pi} \int_R e^{i\lambda(y-z)-ct|\lambda|^\alpha} d\lambda dz.$$

Надалі вважатимемо, що функція $(\psi(z))_{z\in \mathrm{R}}$ абсолютно інтегровна. Тоді, змінивши порядок інтегрування, матимемо

$$u_0(t,x,\psi) = \int_R \Psi(\lambda) e^{i\lambda y - ct|\lambda|^\alpha} d\lambda,$$

де $\Psi(\lambda)=\dfrac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\lambda y}\psi(z)dz$. Тому

$$\mathbf{A}u_0(t,\cdot,\psi)(y)=-c\int_R|\lambda|^\alpha\Psi(\lambda)e^{i\lambda y-ct|\lambda|^\alpha}d\lambda. \tag{4}$$

Нехай $\mathcal{L}$ твірний оператор випадкового процесу $\xi(t)$. Тоді з рівностей (3), (4) одержуємо

$$\mathcal{L}u(t,\cdot,\varphi)(x)=\mathbf{A}u_0(t,\cdot,\psi)(f(y))=-c\int_R|\lambda|^\alpha\Psi(\lambda)e^{i\lambda f(x)-ct|\lambda|^\alpha}d\lambda \tag{5}$$

при $t>0$, $x\in D$. Розглянемо функцію

$$U(t,\lambda,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_R e^{-i\lambda y}u(t,x,\varphi)dx.$$

Нехай $(\chi(x,\lambda))_{z\in D,\lambda\in\mathrm{R}}$ символ оператора $\mathcal{L}$. Тоді

$$\mathcal{L}u(t,\cdot,\varphi)(x)=\int_R\chi(x,\lambda)e^{-i\lambda x}U(t,\lambda,\varphi)d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_R\chi(x,\lambda)e^{i\lambda x}\int_R e^{-i\lambda x}\int_R\Psi(\mu)e^{i\mu f(x)-ct|\mu|^\alpha}d\mu\,dy\,d\lambda.$$

Припустимо, що існує $K_x(z)=\dfrac{1}{2\pi}\int_R\chi(x,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda,\ \ z\in D-x,$ де $D-x=\{y-x: y\in D\}$.

Покладемо $K_x(z)=0$ при $z\notin D-x$. Тоді

$$\mathcal{L}u(t,\cdot,\varphi)(x)=\int_R e^{-ct|\mu|^\alpha}\Psi(\mu)d\lambda\int_D e^{-i\mu f(y)}K_x(y-x)dyd\mu. \tag{6}$$

Порівнявши рівності (5) і (6) отримаємо

$$c|\lambda|^\alpha=\int_D e^{i\lambda(f(y)-f(x))}K_x(y-x)dy.$$

Позначивши $f(x)=z\in R$ та зробивши заміну $f(y)=p$ в інтегралі з правої частини останньої рівності, одержимо при $\lambda\in R$, $z\in R$

$$c|\lambda|^\alpha=\int_R e^{i\lambda(p-z)}K_{f^{-1}(z)}\left(f^{-1}(p)-f^{-1}(z)\right)\frac{dp}{f'\left(f^{-1}(p)\right)}=$$

$$=\int_R e^{i\lambda u}K_{f^{-1}(z)}\left(f^{-1}(z+u)-f^{-1}(z)\right)\frac{du}{f'\left(f^{-1}(z+u)\right)}.$$

Це означає, що при всіх $z\in R$, $u\in R$

$$K_{f^{-1}(z)}\left(f^{-1}(z+u)-f^{-1}(z)\right)\frac{1}{f'\left(f^{-1}(z+u)\right)}=-\frac{c}{2\pi}\int_R|\lambda|^\alpha e^{-i\lambda u}d\lambda,$$

де інтеграл розуміється в сенсі головного значення.

Отже, при всіх $z\in R$, $u\in R$

$$K_{f^{-1}(z)}\left(f^{-1}(z+u)-f^{-1}(z)\right)\frac{1}{f'\left(f^{-1}(z+u)\right)}=\frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{1}{|u|^{\alpha+1}}.$$

Поклавши $z = f(x)$, $f^{-1}(z+u) - f^{-1}(z) = y$, одержимо, що при $x \in D$, $y \in D - x$

$$K_x(y) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{f'(x+y)}{\left|f(x+y)-f(x)\right|^{\alpha+1}}.$$

Тоді при $x \in D$, $\lambda \in R$

$$\chi(x,\lambda) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\int_{D-x}\frac{f'(x+y)}{\left|f(x+y)-f(x)\right|^{\alpha+1}}e^{i\lambda y}dy =$$

$$= \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}e^{-i\lambda x}\int_{D}\frac{f'(z)}{\left|f(z)-f(x)\right|^{\alpha+1}}e^{i\lambda y}dz,$$

де інтеграл розуміється в сенсі головного значення.

Застосуємо тепер до процесу $\xi(t)$ випадкову заміну часу описану в пункті 1 з деякою додатною функцією $(v(x))_{x\in R}$. Символ твірного оператора утвореного процесу матиме вигляд

$$\hat{\chi}(x,\lambda) = \frac{c}{\pi}\Gamma(\alpha+1)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\frac{e^{-i\lambda x}}{v(x)}\int_{D}\frac{f'(z)}{\left|f(z)-f(x)\right|^{\alpha+1}}e^{i\lambda y}dz. \qquad (7)$$

Таким чином, рівність (7) визначає можливі символи твірних операторів процесів Маркова, які можна одержати із симетричного α-стійкого процесу з допомогою перетворення фазового простору та випадкової заміни часу.

Література

1. Stroock D.W. Multidimensional diffusion processes / D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1979. – 350 p.
2. Бігун Г.С. Дифузії, породжені вінеровим процесом / Г.С.Бігун, М.М. Осипчук // Карпатські математичні публікації. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 180-186.
3. Дынкин Е.Б. Марковские процессы / Е.Б. Дынкин. – М: Физматгиз, 1963. – 860 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.12.2017 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Никифорчиним О.Р.**, чл.-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професором **Портенком М.І.** (м. Київ)*

TRANSFORMATION OF SYMMETRIC FIXED PROCESSES

Kh. V. Mamaliga, M. M. Osipchuk
Precarpathian National University named by Vasyl Stefanyk;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

The paper deals with the problem of transformation of phase space and the random change of time in a one-dimensional symmetric stable process. The symbol of the generator of Markov process thus for med is constructed.

Key words: *symmetric stable process, generator, symbol of operator, random change of time.*