УДК 519.217.4

ДИФУЗІЙНІ ПРОЦЕСИ
ТА ДЕЯКІ СПОСОБИ ЇХ ПОБУДОВИ І ЗАСТОСУВАННЯ

М.М.Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, м. Івано-Франківськ, 76000, Україна;
e-mail: myosyp@ukr.net

Статтю присвячено

Серед властивостей цього процесу слід відмітити те, що його ймовірність переходу має щільність $g(t,x,y)$, яка є фундаментальним розв'язком диференціального рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=\sum_{i=1}^{m}a_i(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}.$$

Крім того, такий процес є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$d\xi(t)=a(\xi(t))dt+B^{\frac{1}{2}}(\xi(t))dw(t), \qquad (1)$$

де $w(t)$ – вінерівський процес (стандартний броунівський рух) в R^m. Це дає змогу моделювати траєкторії такого процесу.

Більш загальні умови на вектор переносу, що гарантують існування дифузійного процесу та виконання рівності (1) наведено в наступному твердженні [2].

Теорема 2. Якщо існують константи $K>0$, $0<\alpha<1$, $0<C_1\le C_2$, $\delta>0$, $\gamma>-\frac{\delta+1}{2}+\frac{m}{2}$, для яких при всіх $x,y,\theta\in R^m$ та $i,j=1,2,...,m$ функції $a(x)$ та $B(x)=\left\|b_{ij}(x)\right\|_{i,j=1}^{m}$ задовольняють умовам:

1. $|b_{ij}(x)-b_{ij}(y)|\le K|x-y|^{\alpha}$;
2. $C_1\theta^2\le(B(x)\theta,\theta)\le C_2\theta^2$;
3. $\int\limits_{R^m}|a(y)|^{1+\delta}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{t}\right\}dy\le Kt^{\gamma}$,

то існує однорідний узагальнений дифузійний процес з вектором переносу $a(x)$ та матрицею дифузії $B(x)$.

Побудова такого процесу здійснюється шляхом розв’язання інтегрального рівняння збуреної дифузії

$$W(t,x,y)=W_0(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int\limits_{R^m}W(t-\tau,z,y)\ |a(z)|\ (\nabla_x g_0(\tau,x,z),e(x))dz, \qquad (2)$$

де $W_0(t,x,y)=(\nabla_x g_0(t,x,y),e(x))$, $g_0(t,x,y)$ – щільність ймовірності переходу дифузійного процесу з нульовим вектором переносу та дифузійною матрицею $B(x)$, $e(x)=\frac{a(x)}{|a(x)|}$ при $|a(x)|\ne 0$ та $e(x)=0$ в іншому випадку.

При виконанні умов теореми 2 рівняння (2) може бути розв’язане методом послідовних наближень, і при кожних $\varphi\in C_0(R^m,R)$, $t>0$ визначено значення оператора

$$T_t\varphi(x)=\int\limits_{R^m}g_0(t,x,y)\varphi(y)dy+\int_0^t d\tau\int\limits_{R^m}V(t-\tau,z,\varphi)|a(z)|g_0(\tau,x,z)dz, \qquad (3)$$

де $V(t,x,\varphi)=\int\limits_{R^m} W(t,x,y)\varphi(y)dy$. Оператор (3) визначає на $B(R^m)$ сім'ю імовірнісних мір ($t>0$, $x\in R^m$) $P(t,x,\Gamma)=T_t 1_\Gamma(x)$, які є ймовірностями переходу дифузійного процесу з вектором переносу $a(x)$ та матрицею дифузії $B(x)$.

Моделювання розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

Загалом стохастичним диференціальним рівнянням називається рівняння виду

$$d\xi(t)=a(t,\xi(t))dt+b(t,\xi(t))dw(t), \tag{4}$$

де $a:R_+\times R\to R^m$, $b:R_+\times R\to L_s(R^m)$ ($L_s(R^m)$ – множина симетричних додатньо визначених матриць розміру $m\times m$), $w(t)$ – m- вимірний вінерівський процес.

Для неперервних $a(t,x)$, $b(t,x)$ і таких, що $|a(t,x)|+\|b(t,x)\|\le C\left(1+|x|\right)$ існує єдиний розв'язок рівняння (4) з довільною початковою умовою

$$\xi(0)=\xi_0. \tag{5}$$

Розв'язком задачі (4), (5) вважаємо випадковий процес $\xi(t)$, що задовольняє інтегральному рівнянню

$$\xi(t)=\xi_0+\int\limits_0^t a(s,\xi(s))ds+\int\limits_0^t b(s,\xi(s))dw(s). \tag{6}$$

Тут другий інтеграл є інтегралом Іто за вінерівським процесом.

Розбивши відрізок $[0;T]$ на частини точками $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$, де $T>0$ деяке довільне число, одержимо різницевий аналог рівняння (6):

$$\xi(t_{k+1})=\xi(t_k)+\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} a(s,\xi(s))ds+\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} b(s,\xi(s))dw(s).$$

За умови, що $\max_k(t_{k+1}-t_k)\to 0$ значення інтегралів в останній рівності можна наближено замінити виразами:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} a(s,\xi(s))ds\approx a(t_k,\xi(t_k))(t_{k+1}-t_k),\quad \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} b(s,\xi(s))dw(s)\approx b(t_k,\xi(t_k))(w(t_{k+1})-w(t_k)).$$

Різниця $w(t_{k+1})-w(t_k)$ є нормально розподіленим випадковим вектором в R^m з нульовим математичним сподіванням та коваріаційною матрицею $(t_{k+1}-t_k)I$. Таким чином, розрахунковою формулою для моделювання траєкторій розв'язку стохастичного рівняння (4) з початковою умовою (5) в дискретні моменти часу t_0, $t_1,\ldots,$ t_n є:

$$\begin{gathered}\xi(t_{k+1})=\xi(t_k)+a(t_k,\xi(t_k))(t_{k+1}-t_k)+b(t_k,\xi(t_k))\eta_k\sqrt{t_{k+1}-t_k},\\ \xi(t_0)=\xi_0.\end{gathered} \tag{7}$$

Отже, досить змоделювати значення випадкового вектора $\xi(t_0)$ відповідно до розподілу ξ_0 та потрібну кількість незалежних значень m - вимірного випадкового вектора η_k із стандартним нормальним розподілом. За формулою (7) можна знайти всі значення траєкторії $\xi(t)$ в моменти часу t_k.

Стохастична модель процесу розповсюдження диму в повітрі

Основні припущення. Для побудови моделі домовимось про такі припущення:

- повітряний простір є необмеженим зверху та з боків;
- відома швидкість $a(t,x)$ руху повітряних мас;
- відома симетрична додатньо визначена матриця дифузії $B(t,x)$ у повітрі;
- джерело диму знаходиться на висоті h від підошви повітряного простору і має площу S;
- швидкість надходження v диму є відомою;
- концентрація диму біля джерела відома і дорівнює C_0.

Математична модель. Траєкторія руху частинки в деякому середовищі під дією теплового руху молекул середовища та макроскопічного його руху може бути описана, як реалізація $x(t)$ дифузійного процесу з вектором переносу $a_g(t,x) = a(t,x) + (0;0;v - g \cdot t)$, де g – прискорення вільного падіння та матрицею дифузії $B(t,x)$. Такі реалізації можна одержувати, як розв'язки стохастичного диференціального рівняння

$$dx(t) = a_g(t,x(t)) \cdot dt + B^{\frac{1}{2}}(t,x(t)) \cdot dw(t), \tag{8}$$

з деякою початковою умовою $x(0) = x_0$, де $w(t)$ – тривимірний стандартний вінерівський процес. Знайшовши ймовірність $P(t,x_0,\Gamma)$ попадання дифузійного процесу, який стартував у точці x_0, за час t в область Γ, можемо знайти концентрацію диму в кожній точці x повітряного простору в будь-який момент часу t за формулою

$$C(t,x) = C_0 \cdot v \cdot \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{V(\Gamma_x)} \int_0^t d\tau \int_E P(\tau, y, \Gamma_x) dy, \tag{0.1}$$

де Γ_x – окіл точки x, δ – діаметр Γ_x, $V(\Gamma_x)$ – об'єм Γ_x, E – множина надходження у повітряний простір диму.

Форма димової хмари буде визначатися нерівністю $C(t,x) \geq C_{гр}$, де $C_{гр}$ – деякий граничний рівень концентрації диму.

Доведемо формулу (9). Очевидно, що $C_0 \cdot v \cdot S$ дорівнює кількості диму, що надходить за одиницю часу в повітряний простір. Природно вважати, що розподіл точок, з яких стартують частинки диму, є рівномірним на множині E площею S. Щільність розподілу таких точок має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{S}, \text{ при } x \in E \\ 0, \text{ при } x \notin E \end{cases}.$$

За формулою повної ймовірності, ймовірність того, що частинка диму потрапить в множину Γ в момент часу t, дорівнює

$$\mathbf{P}(x(t) \in \Gamma) = \int_{R^3} P(t, y, \Gamma) \cdot f(y) \cdot \delta_E(y) dy = \frac{1}{S} \cdot \int_E P(t, y, \Gamma) dy.$$

Оскільки за час τ у повітряний простір потрапляє частинок диму в кількості, пропорційній $C_0 \cdot v \cdot S \cdot \tau$, то в момент часу t у множині Γ опиниться частинок диму в кількості, пропорційній величині

$$C_0 \cdot v \cdot S \cdot \tau \cdot \mathbf{P}(x(t-\tau) \in \Gamma) = C_0 \cdot v \cdot \tau \cdot \int_E P(t-\tau, y, \Gamma) dy.$$

Розбивши часовий інтервал від 0 до t на n частини тривалістю $\Delta\tau$, одержимо, що в множині Γ в момент часу t опиниться пропорційна

$$C_0 \cdot v \cdot \sum_{k=1}^{n} \int_E P(t - k \cdot \Delta\tau, y, \Gamma) dy \cdot \Delta\tau$$

кількість частинок диму. При $n \to \infty$ ця величина має границю, рівну $C_0 \cdot v \cdot \int_0^t d\tau \int_E P(\tau, y, \Gamma) dy$.

Розглянемо деякий окіл Γ_x точки x, діаметром δ і об'ємом $V(\Gamma_x)$. Тоді концентрація диму в точці x в момент часу t дорівнює

$$C_0 \cdot v \cdot \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{V(\Gamma_x)} \int_0^t d\tau \int_E P(\tau, y, \Gamma_x) dy,$$

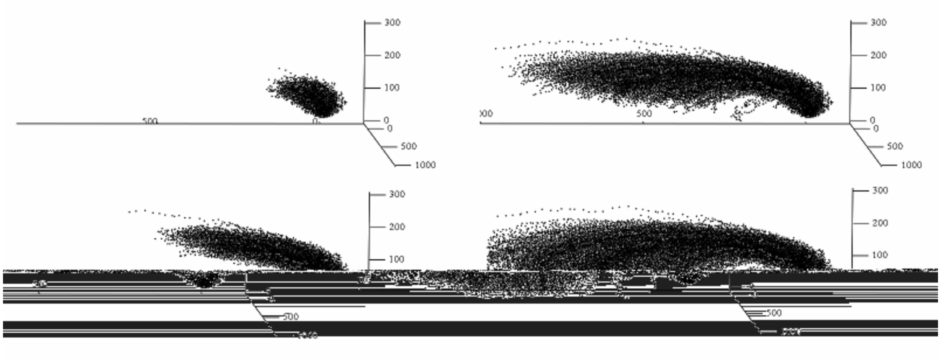
що й стверджувалось в (9).

Розв'язання математичної моделі. Основним при застосуванні формули (9) є обчислення ймовірності $P(t, x_0, \Gamma)$. На практиці можна обмежитись оцінкою такої ймовірності, яку маємо можливість знайти, змоделювавши велику кількість траєкторій – розв'язків рівняння (8). Для цього розглянемо дискретні моменти часу $t_k = k \cdot \Delta t$, $k = 0 \ldots N$ і відповідне (8) різницеве рівняння $x_{k+1} - x_k = a_g(t_k, x_k) \cdot \Delta t + B^{\frac{1}{2}}(x_k) \cdot \left(w_{k+1} - w_k\right)$ з початковою умовою $x_0 = \xi.$ Тут $x_k = x\left(t_k\right)$, $w_k = w\left(t_k\right)$, $\xi = (\xi^{(1)}; \xi^{(2)}; h)$ – рівномірно розподілена на E випадкова точка. Для випадку стандартного вінерівського процесу $w(t)$ прирости $w_{k+1} - w_k$ є незалежними випадковими векторами, що мають нормальний розподіл з нульовим вектором математичних сподівань та коваріаційною матрицею $\Delta t I$ (I – одинична матриця). Моделювання значень таких випадкових векторів є достатньо простою процедурою. Траєкторія обривається в перший момент часу t_k, якщо $x_k^{(3)} = 0$ або $x_{k+1}^{(3)} < 0$, а $x_k^{(3)} > 0$.

Оцінкою ймовірності $P(t_k, \xi, \Gamma)$ потрапляння в момент часу t_k траєкторії дифузійного процесу, що стартував з точки ξ, в область Γ, є Q_k відношення кількості траєкторій, для яких $x_k \in \Gamma$, до загальної кількості змодельованих траєкторій. Замінивши інтеграли в (9) відповідними сумами та взявши достатньо малі околи (об'єму V) точок, в яких нас цікавить значення концентрації диму, одержимо розрахункову формулу для обчислення $C(t_k, x)$

$$C(t_k, x) \approx \frac{C_0 \cdot v}{V} \cdot \sum_{i=1}^{k} Q_i \Delta t \tag{10}$$

На рисунку зображено зміну у часі форми димової хмари, змодельовану за допомогою розробленої процедури.



Література

1. Портенко Н.И., Скороход А.В., Шуренков В.М. Марковские процессы // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. – ВИНИТИ, 1989. – Т.46? №2 – С.5 - 248.
2. Осипчук М.М. Дифузія з нерегулярним переносом // Теорія ймовірностей та математична статистика. – 1996. – т.54. – С.122 - 128.

DIFFUSION PROCESSES AND SOME METHODS OF THEIR CONSTRUCTION AND APPLICATIONS

M.M.Osypchuk
Vasyl Stefanyk PreCarpathian National University,
57, Shevchenko Str., Ivano-Frankivsk, 76000, Ukraine,
e-mail: myosyp@ukr.net

Work is devoted consideration of diffusion processes of both Markov processes which own some properties and decisions of stochastic differential equations. It enables to design the trajectories of such processes. Possibility of the use of diffusion processes in the tasks of design motion of shallow particles in a mobile environment is applied for determination of distribution of smoke in mid air.

Keywords: *diffusive process, vector of transfer, stochastic differential equalization, mathematical model.*