УДК 519.1

СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРА НА ПАРАДЕТЕРМІНАНТ ТРИКУТНОЇ МАТРИЦІ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Р.А.Заторський
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ, 76000, Україна
e-mail: romazz@rambler.ru

Подається означення скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці; розглядається застосування цієї операції до дослідження формальних операцій з формальними степеневими рядами. Автором одержано формули n-кратного диференціювання складеної функції та узагальнення многочленів розбиттів Белла.

Ключові слова: *трикутна матриця, парадетермінант, параперманент, скалярний добуток.*

Вступ

Теорія парадетермінантів трикутних матриць [1], [2] все частіше знаходить практичні застосування у різних галузях математики. Зокрема її апарат виявляється зручним для дослідження многочленів розбиттів, запроваджених Беллом у [3]. Проте, ряд многочленів розбиттів не може бути описаним з допомогою самих лише парадетермінантів, і вимагає введення поняття "скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці". Ця операція виявляється корисною також при диференціюванні складених функцій, суперпозиції формальних степеневих рядів з нульовим вільним членом, оберненні таких рядів тощо.

2. Скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці

Нижче під трикутною матрицею A ми розумітимемо трикутну таблицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \qquad (1)$$

чисел із числового поля K.

Означення 1. *Скалярним добутком вектора* $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *на парадетермінант трикутної матриці (1) назвемо число*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\cdot\left\langle\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}\right\rangle_n = \qquad (2)$$

$$=\sum_{r=1}^{n} b_r \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\}.$$

Аналогічно визначається скалярний добуток вектора на параперманент трикутної матриці.

Означення 2. *Скалярним добутком вектора* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *на параперманент трикутної матриці (1) назвемо число*

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n =$$

$$=\sum_{r=1}^{n} b_r \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_r=n} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s,\, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\}.$$

Таким чином, при множенні вектора на парадетермінант трикутної матриці, його r-та компонента перемножується на суму всіх тих доданків парадетермінанта чи параперманента, які відповідають розбиттям із r-компонентами. Відзначимо також, що добуток нуль-вектора, або вектора, всі компоненти якого дорівнюють одиниці? на парадетермінант чи параперманент трикутної матриці, відповідно дорівнює нулеві або парадетермінанту чи параперманенту цієї трикутної матриці. Отже, скалярний добуток вектора на парадетермінант трикутної матриці є деяким його узагальненням.

Наступна теорема істотно полегшує обчислення скалярного добутку вектора на парадетермінант чи параперманент трикутної матриці і є деяким аналогом розвинення парадетермінанта за елементами його останнього рядка чи першого стовпця (див. [1]).

Теорема 1. *Для довільного вектора* $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ *і трикутної матриці (1) справедливі рівності:*

(i) Розвинення за елементами останнього рядка:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n = \qquad (3)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \{a_{n,n-i}\}(b_2, \ldots, b_{n-i}) \cdot \mathrm{ddet}(R_{n-i-1,1}(A)),$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n = \qquad (4)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} \{a_{n,n-i}\}(b_2, \ldots, b_{n-i}) \cdot \mathrm{pper}(R_{n-i-1,1}(A)),$$

(ii) Розвинення за елементами першого стовпця:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \{a_{i+1,1}\}(b_2,\ldots,b_{n-i}) \cdot \operatorname{ddet}(R_{n,i+2}(A)),$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \{a_{i+1,1}\}(b_2,\ldots,b_{n-i}) \cdot \operatorname{pper}(R_{n,i+2}(A)),$$

тут $R_{n-i-1,1}(A)$, $R_{n,i+2}(A)$ *- роги трикутної матриці [1].*

Доведення. Доведемо справедливість першої формули із (i). Те, що у правій частині рівності (3) присутні всі доданки парадетермінанта $\operatorname{ddet}(A)$, випливає із того, що вона, по суті, є розвиненням цього парадетермінанта за елементами останнього рядка. Тому для доведення цієї рівності залишається довести, що m-та компонента вектора b у правій частині цієї рівності є співмножником кожного доданка парадетермінанта $\operatorname{ddet}(A)$, який породжений впорядкованим m-розбиттям натурального числа n на натуральні доданки.

Співмножником кожного доданка правої частини цієї рівності є факторіальний добуток $\{a_{r1}\}, r = 1,2,\ldots,n$, відповідний першій компоненті m-розбиття числа n. Тому компоненти всіх векторів правої частини рівності зсунуті вліво на одну позицію. Решті $m-1$ компонент розбиття відповідають ті доданки парадетермінантів рогів $R_{n-1,1}(A), R_{n-2,1}(A),\ldots,R_{m,1}(A)$, кожен з яких є добутком $m-1$ факторіальних добутків. Але з матриці $(n-1)-$го порядку $R_{n-1,1}(A)$ можна виділити $c_{m-1}(n-1)$ таких доданків; з матриці $R_{n-2,1}(A)$ - $c_{m-1}(n-2)$ таких доданків; і т.д. З матриці $R_{m,1}(A)$ – $c_{m-1}(m-1)$ таких доданків. Таким чином, використовуючи твердження про те, що для впорядкованих розбиттів натурального числа n на m натуральних доданків справедлива рекурсія

$$c(n,m) = \sum_{i=1}^{n-m+1} c(n-i, m-1),$$

робимо висновок, що рівність (3) справедлива. Рівність (4) доводиться аналогічно.

Справедливість рівностей із (ii) також доводиться аналогічно. Зауважимо лише, що для доведення того факту, що m-та компонента вектора b, у правій частині цих рівностей, є співмножником кожного доданка парадетермінанта $\operatorname{ddet}(A)$ чи параперманента $\operatorname{pper}(A)$, який породжений впорядкованим m-розбиттям натурального числа n, слід розглядати послідовність рогів

$$R_{n2}(A), R_{n3}(A), \ldots, R_{n,n+m-1}(A) .$$

Наслідок 1. *Нехай*

$$Z(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & a_1 \end{pmatrix}_n ,$$

тоді для довільного вектора $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ *справедливі тотожності:*

$$(b_1,b_2,\ldots,b_n)\cdot \mathrm{ddet}(Z(a_1,a_2,\ldots,a_n)) = a_1\cdot(b_2,\ldots,b_n)\cdot \mathrm{ddet}(Z(a_1,\ldots,a_{n-1})) -$$

$$-a_2(b_2,\ldots,b_{n-1})\mathrm{ddet}(Z(a_1,\ldots,a_{n-2}))+\ldots+(-1)^{n-2}a_{n-1}(b_2)\mathrm{ddet}(Z(a_1))+(-1)^{n-1}a_nb_1$$

,

$$(b_1,b_2,\ldots,b_n)\cdot \mathrm{pper}(Z(a_1,a_2,\ldots,a_n)) = a_1\cdot(b_2,\ldots,b_n)\cdot \mathrm{pper}(Z(a_1,\ldots,a_{n-1})) +$$

$$+a_2(b_2,\ldots,b_{n-1})\mathrm{pper}(Z(a_1,\ldots,a_{n-2}))+\ldots+a_{n-1}(b_2)\mathrm{pper}(Z(a_1))+a_nb_1 .$$

Доведення. Справедливість цього наслідку одразу випливає із теореми 1, бо

$\{a_{r1}\}=a_r$, а

$R_{n,r+1}(Z(a_1,\ldots,a_n)) = R_{n-r,1}(Z(a_1,\ldots,a_n)) = Z(a_1,\ldots,a_{n-r}),\ r=1,2,\ldots,n-1$.

Наступне твердження очевидне.

Твердження 1. *Нехай* a,b *– два вектори* n*-го порядку,* A *і* B *– трикутні матриці того ж порядку, а* α *– деяке число із числового поля* K. *Тоді справедливі рівності:*

$$\alpha\cdot a\cdot \mathrm{ddet}(A) = (\alpha\cdot a)\cdot \mathrm{ddet}(A),$$

$$(a+b)\cdot \mathrm{ddet}(A) = a\cdot \mathrm{ddet}(A) + b\cdot \mathrm{ddet}(A),$$

$$a\cdot(\mathrm{ddet}(A)+\mathrm{ddet}(B)) = a\cdot \mathrm{ddet}(A) + a\cdot \mathrm{ddet}(B) .$$

В [1] доведено, що якщо $A=(a_{ij})_{1\le j\le i\le n}$ – трикутна матриця (1), то справедлива тотожність

$$\mathrm{pper}(a_{ij})_{1\le j\le i\le n} = \mathrm{ddet}((-1)^{\delta_{ij}+1}a_{ij})_{1\le j\le i\le n} . \tag{5}$$

Тотожність (5) в термінах скалярного добутку може бути записана у вигляді

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_n = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} \\ (-1)^{n-2} \\ \cdots \\ (-1)^0 \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n . \tag{6}$$

Дійсно, згідно з означенням скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці маємо

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} \\ (-1)^{n-2} \\ \dots \\ (-1)^{0} \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \right\rangle_n =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \cdot \sum_{p_1+\ldots+p_r=n} (-1)^{n-r} \prod_{s=1}^{r} \{a_{p_1+\ldots+p_s, p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

із якої внаслідок рівності (2) випливає справедливість тотожності (6).

3. Застосування скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці

1. Нехай

$$S_n = x_1^n + x_2^n + \ldots x_n^n,$$

а $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ – елементарні симетричні многочлени від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

тоді справедлива формула Варінга (див. [4], стор. 393.):

$$\frac{S_n}{n} = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \cdot \sigma_1^{\lambda_1}\sigma_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot\sigma_n^{\lambda_n},$$

яка з допомогою скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці запишеться у вигляді:

$$\frac{S_n}{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix} \cdot \left\langle \begin{matrix} \sigma_1 & & & \\ \frac{\sigma_2}{\sigma_1} & \sigma_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{\sigma_n}{\sigma_{n-1}} & \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n} & \cdots & \sigma_1 \end{matrix} \right\rangle.$$

Остання тотожність випливає із означення скалярного добутку вектора на парадетермінант трикутної матриці та тотожності (див. [2], тотожність (5.9)):

$$\operatorname{ddet}(Z(x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n} (-1)^{n-(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)} \cdot \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \cdot x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

2. Многочленами розбиттів Белла називають (див. [5], стор.173) многочлени виду

$$Y_n(fg_1,\ldots,fg_n) = \sum_{k_1+2k_2+\ldots+nk_n=n} \frac{n!f_k}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_n!} \left(\frac{g_1}{1!}\right)^{k_1} \cdot\ldots\cdot \left(\frac{g_n}{n!}\right)^{k_n},$$

де $f^k = f_k$.

Поняття многочленів розбиттів можна істотно узагальнити. Нижче під многочленами розбиттів ми розуміємо многочлени вигляду

$$P(x_1,\dots,x_n;z)=\sum_{m=1}^{n} y_m z^m \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=m}} c(n;\lambda_1,\dots,\lambda_n)\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Тут $c(n;\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ – деякі дробово-раціональні вирази, а y_m, $m=1,2,\dots,n$ – компоненти деякого n-вимірного вектора. В [2] показано (див. теорема 10), що многочлени розбиттів можна подати у вигляді скалярного добутку вектора на деякий парадетермінант трикутної матриці. Трикутну матрицю вигляду

$$B(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n} \tag{7}$$

назвемо трикутною матрицею Белла.

Твердження 2. *Для трикутної матриці Белла справедлива тотожність*

$$\operatorname{pper}\left(\frac{j}{i-j+j\cdot\delta_{ij}}\cdot\frac{x_{i-j+1}}{x_{i-j}}\right)_{1\le j\le i\le n}=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n}\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot x_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\lambda_n}.$$

Доведення. Розвинемо параперманент трикутної матриці многочлена Белла за елементами останнього рядка:

$$\operatorname{pper}(B(x_1,\dots,x_n))=\binom{n-1}{0}x_1\operatorname{pper}(B(x_1,\dots,x_{n-1}))+\binom{n-1}{1}x_2\operatorname{pper}(B(x_1,\dots,x_{n-2}))+$$

$$+\dots+\binom{n-1}{n-2}x_{n-1}\operatorname{pper}(B(x_1))+\binom{n-1}{n-1}x_n=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x_{i+1}\operatorname{pper}(B(x_1,\dots,x_{n-i-1})). \tag{8}$$

Позаяк $\operatorname{pper}(B(x_1))=[x_1]=x_1$ і параперманент $\operatorname{pper}(B(x_1,\dots,x_n))$ та многочлен Белла (див. [5], стор. 174) задовольняють рекурентне співвідношення (8), то твердження доведене.

Тепер розглянемо задачу про встановлення загального вигляду формул похідних вищих степенів від складеної функції

$$y=f(g(x)).$$

Цю задачу вперше розв'язав Фаа ді Бруно. Його формула має такий вигляд

$$y^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f^{(k)}\left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\dots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=k}}\frac{n!}{\lambda_1!(1!)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n!(n!)^{\lambda_n}}\cdot\left(g^{(1)}\right)^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot\left(g^{(n)}\right)^{\lambda_n}\right).$$

Теорема 2. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ нескінченно диференційовні, причому виконуються рівності*

$$\frac{d^i}{dg^i}f(g)=f^{(i)},\ \frac{d^i}{dx^i}g(x)=g^{(i)},\ i=1,2,\dots,$$

тоді для довільного натурального n справедливі рівності:

$$\frac{d^n}{dx^n}f(g(x))=\begin{pmatrix} f^{(1)}\\ f^{(2)}\\ \vdots \\ f^{(n)}\end{pmatrix}_n \cdot \begin{bmatrix} g^{(1)} & & & \\ \frac{1}{1}\cdot\frac{g^{(2)}}{g^{(1)}} & g^{(1)} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{n-1}\cdot\frac{g^{(n)}}{g^{(n-1)}} & \frac{2}{n-2}\cdot\frac{g^{(n-1)}}{g^{(n-2)}} & \cdots & g^{(1)}\end{bmatrix}_n =$$

$$=\left(f^{(1)},f^{(2)},\ldots,f^{(n)}\right)\cdot \operatorname{pper}\left(B\left(g^{(1)},g^{(2)},\ldots,g^{(n)}\right)\right).$$

Доведення. Справедливість цієї теореми одразу випливає із твердження 2, означення скалярного добутку вектора на параперманент трикутної матриці (7) та формули Фаа ді Бруно.

3. Покажемо, що суперпозиція двох формальних степеневих рядів виражається за допомогою скалярного добутку вектора на параперманент трикутної матриці. Доведемо спочатку справедливість наступного твердження.

Твердження 3. *Справедлива тотожність*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_iz^i\right)^p=\sum_{n=p}^{\infty}\left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n\\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}}\frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!}\cdot a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}\right)\cdot z^n,$$

де $p-$ *деяке натуральне число.*

Доведення. Коефіцієнт біля z^n, вочевидь, має вигляд $m\cdot a_1^{\lambda_1}\cdot\ldots\cdot a_n^{\lambda_n}$, тут $m-$ деяке натуральне число. Причому виконуються рівності

$$\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n,$$
$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p.$$

Знаходимо коефіцієнт α при z^n, використовуючи твердження про те, що число всіх впорядкувань мультимножини із первинною специфікацією $[a_1^{k_1},a_2^{k_2},\ldots,a_n^{k_n}]$ дорівнює

$$\frac{(k_1+k_2+\ldots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_n!}.$$

Теорема 3. *Якщо формальний степеневий ряд* $c(z)=\sum_{i=1}^{\infty}c_iz^i$ *є результатом суперпозиції формальних степеневих рядів* $a(z)=\sum_{i=1}^{\infty}a_iz^i$ *і* $b(z)=\sum_{i=1}^{\infty}b_iz^i$, *то справедливі рівності:*

$$c_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ \frac{b_2}{b_1} & b_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{b_i}{b_{i-1}} & \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} & \dots & b_1 \end{bmatrix}_i .$$

Доведення. Справедливість цієї теореми випливає із твердження 3 та означення скалярного добутку вектора на параперманент. Дійсно

$$c(z) = a(b(z)) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p (b(z))^p =$$

$$= \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sum_{n=p}^{\infty} \left(\sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_n!} \cdot b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \cdot\ldots\cdot b_n^{\lambda_n} \right) \cdot z^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{p=1}^{i} a_p \sum_{\substack{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+i\lambda_i=i \\ \lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_i=p}} \frac{p!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdot\ldots\cdot\lambda_i!} \cdot b_1^{\lambda_1} b_2^{\lambda_2} \cdot\ldots\cdot b_i^{\lambda_i} \right) \cdot z^i =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix}_i \cdot \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ \frac{b_2}{b_1} & b_1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{b_i}{b_{i-1}} & \frac{b_{i-1}}{b_{i-2}} & \dots & b_i \end{bmatrix}_i \cdot z^i .$$

Висновок

Операція скалярного добутку вектора на параперманент чи парадетермінант трикутної матриці дає змогу спростити доведення деяких відомих тверджень теорії парадетермінантів трикутних матриць та довести низку нових важливих теорем. При цьому всі результати отримують компактний та зручний для практичних застосувань вигляд. Рекурентні співвідношення для скалярного добутку вектора на парадетермінант чи параперманент трикутної матриці дають змогу побудувати зручні рекурсивні алгоритми для їх обчислення, що виправдовує подальші їх застосування.

Література

1. *Заторський Р.А.* Про паравизначники та параперманенти трикутних матриць // Математичні студії. – 2002. – Т.17, №1. – С. 3 - 17.
2. *Zatorsky R.A.* Theory of paradeterminants and its applications // Algebra and Diskrete Mathematics. – 2007. – №1. – P. 109 - 138.

3. *Bell E.T.* Partition polynomials // Ann. Math. –1927. – Vol.29. – P. 38 - 46.
4. *Серре И.А.* Курс высшей алгебры. Второе русское изд. под ред. Л.А. Левенстерна. – М.: Изд-во т-ва М.О. Вольф, 1902. – 452 с.
5. *Риордан Д.* Комбинаторные тождества. – М.: Наука, 1982. – 256 с.

Scalar Product of a Vector on a Paradeterminant of a Triangular Matrix and Its Application

R.A. Zatorsky

PreCarpathian National University by V. Stefanic

Ivano-Frankivs'k, Shevchenko Street, 57, Ivano-Frankivs'k, 76000, Ukraine, e-mail: romazz@rambler.ru

Determination of scalar product of vector on paradeterminant is given three-cornered matrix, application of this operation is considered to the formal operations analysis with formal sedate rows. The formulas of n-multiple differentiation of the built function and generalization of polynomials laying out of Bell are got an author.

Keywords: *three-cornered matrix, paradeterminant, parapermanent, scalar product.*