УДК 517.968.7

УСЕРЕДНЮВАННЯ В НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМАХ З ПОДВІЙНОЮ ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

С.С.Гулька

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, Україна, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4 21 23; e-mail: math@nung.edu.ua

Застосовується метод усереднювання Крилова-Боголюбова-Митропольського до систем інтегро-диференціальних рівнянь з подвійною імпульсною дією.

Ключові слова: *система інтегро-диференціальних рівнянь, подвійна імпульсна дія, усереднювання, похибка.*

Об'єктом наших досліджень будуть системи інтегро-диференціальних рівнянь з подвійною імпульсною дією. До необхідності вивчення таких систем рівнянь призводять багато задач фізики, техніки, біології, що описують реальні процеси, які піддаються і піддавались у процесі своєї еволюції короткотривалим збуренням.

$t \neq t_i$;

де: $$Y_j\left(x\left(s_j - 0\right)\right) \equiv K\left(t, s_j + 0, x\left(s_j + 0\right)\right) - K\left(t, s_j - 0, x\left(s_j - 0\right)\right), \qquad (2)$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i} = x\left(t_i + 0\right) - x\left(t_i - 0\right) = \varepsilon I_i\left(x\right) \equiv \varepsilon I_i\left(x\left(t_i - 0\right)\right); \qquad (3)$$

x, F, I_i - точки n - вимірного евклідового простору; K, Y_j - точки m - вимірного евклідового простору; ε - малий параметр; t - час.

Побудуємо для системи (1) - (3) відповідну усереднену систему

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_0\left(y(t), \int_0^t K_0\left(y(s)\right)ds + Y_j^{(0)}\left(y\left(s_j - 0\right)\right)\right), \qquad (4)$$

$t \neq t_i$;

$$Y_j^{(0)}\left(y\left(s_j - 0\right)\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s_0 < s_j < t} Y_j\left(y\left(s_j - 0\right)\right); \qquad (5)$$

$$F_0\left(y(t), \int_0^t K_0\left(y(s)\right)ds + Y_0\left(y_j - 0\right)\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F\left(t, y(t), \int_0^t K_0\left(t, s, y(s)\right)ds + Y_0\left(y_j - 0\right)\right); \qquad (6)$$

$$F_0\left(y(s)\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t K\left(t, s, y(t)\right)ds, \qquad (7)$$

$s \neq s_j$;

$$i_j^0\left(y\left(t_i - 0\right)\right) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{t_i} I_i\left(y\left(t_i - 0\right)\right). \qquad (8)$$

Наведемо теорему, суть якої полягає в тому, що за досить загальних умов різницю $\left|x(t) - y(t)\right|$ можна зробити як завгодно малою за достатньо малого $\varepsilon > 0$ на як завгодно великому інтервалі часу $0 < t < T$. До того ж, оскільки $y(t)$ залежить від t через εt, то необхідно щоб протягом вказаного інтервалу часу функція $y(t)$ могла встигнути відійти від свого початкового значення, тобто щоб цей інтервал був достатньо довгим з точки зору змінювання $y(t)$, за T треба взяти величину порядку $\dfrac{L}{\varepsilon}$, де L можна зробити як завгодно великим за достатньо малого ε.

Сформулюємо і наведемо доведення основної теореми Крилова-Боголюбова-Митропольського про малість похибки різниці $\left|x(t) - y(t)\right|$ у першому наближенні.

Теорема. Нехай функції $F(t, x, z)$, $K(t, s, x)$, $Y_j(x)$, $I_i(x)$ задовольняють умови:

а) для деяких областей D_1 і D_2 можна вказати такі додатні сталі M_1, M_2, M_3, M_4 та λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, що за всіх дійсних значень $t \geq 0$, $t_i \geq 0$, $s_0 < s < t$, $s_0 < s_j < t$ для будь-яких x, z, x', z' із цих областей виконано нерівності

$$\left|F(t,x,z)\right| \le M_1, \quad \left|K(t,x,z)\right| \le M_2, \quad \left|Y_j(x)\right| \le M_3, \quad \left|I_i(x)\right| \le M_4, \tag{9}$$

$$\left|F(t,x,z) - F(t,x',z')\right| \le \lambda_1 |x - x'| + \lambda_2 |z - z'|,$$

$$\left|K(t,s,x) - K(t,s,x')\right| \le \lambda_3 |x - x'|, \tag{10}$$

б) в областях D_1 і D_2 існують рівномірні щодо x, z границі

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t F(t,x,z)dt = F_0(x,z), \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t K(t,s,x)ds = K_0(x),$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{t_i} I_i(x_i - 0) = i_j^0(x_i - 0), \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{s_0<s_j<t} Y_j(x_j - 0) = Y_j^{(0)}(x_j - 0). \tag{11}$$

Тоді будь-яким як завгодно малим заданим ρ, η та як завгодно великому L можна поставити у відповідність таке додатне ε_0, що коли $y = y(t)$ - розв’язок рівняння

$$\frac{dy}{dt} = \varepsilon F_0\left(y(t), \int_0^t K_0(y(s))ds + Y_j^{(0)}(y(s_j - 0)) \right), \qquad t \ne t_i;$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i} = I_i^0(y(t_i - 0))$$

означений на інтервалі $0 < t < \infty$ і лежить в області D_1 разом із своїм ρ-околом, то для

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в інтервалі $0 < t < \dfrac{L}{\varepsilon}$ справедлива нерівність

$$\left|x(t) - y(t)\right| < \eta, \tag{12}$$

в якій $x(t)$ - розв’язок системи

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F\left(t, x(t), \int_0^t K(t,s,x(s))ds + \sum_{s_0<s_j<t} Y_j(x(s_j - 0)) \right), \qquad t \ne t_i;$$

$$\Delta x\Big|_{t=t_i} = \varepsilon I_i(x(t_i - 0)),$$

що дорівнює $y(0)$ за $t = 0$.

Доведення. Фіксуємо деяке додатне число a та будуємо функцію

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} \mathrm{A}_a\left\{1 - \dfrac{|x|^2}{a^2}\right\}, |x| \le a, \\ 0, \qquad |x| > a; \end{cases} \tag{13}$$

в якій додатну величину A_a визначає співвідношення $\int_{E_n} \Delta_a(x)dx = 1$, де інтегрування поширюється на весь розглядуваний простір E_n; dx позначає нескінченно малий елемент звичайного n- вимірного евклідового об'єму. Очевидно, введена функція $\Delta_a(x)$ є обмеженою разом із своїми частинними похідними до другого порядку включно.

Оскільки ця функція та її похідні тотожно дорівнюють нулеві при $|x| > a$, неважко пересвідчитися, що інтеграл

$$I_a = \int_E \left| \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} \right| dx \tag{14}$$

скінчений за будь-якого додатного a.

Зваживши на це, розглянемо функцію

$$U(t,x) = \int_{D_1} \Delta_a(x-x') \left\{ \int_0^t \left[F\left(t, x'(t), \int_{s_0}^t K(t,s,x'(s))ds + \sum_{s_0<s_j<t} Y_j\left(x'(s_j-0)\right) \right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - F_0\left(x(t), \int_{s_0}^t K_0(x'(s))ds + Y_j^0\left(x(s_j-0)\right) \right) \right] dt \right\} dx'. \tag{15}$$

З огляду на умову «б» можна побудувати таку монотонну спадну функцію $f(t)$, прямуючиє до нуля при $t \to \infty$, що в усій області D_1

$$\left| \frac{1}{t} \int_0^t \left[F(t, x(t), z(t)) - F_0(x(t), z(t)) \right] \right| \le f(t). \tag{16}$$

Тому маємо

$$|U(t,x)| \le tf(t) \int_{D_1} \Delta_a(x-x')dx' \le tf(t) \int_{E_n} \Delta_a(x-x')dx',$$

тобто

$$|U(t,x)| \le tf(t). \tag{17}$$

Відтак можна записати

$$\left| \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} \right| \le tf(t) \int_{D_1} \left| \frac{\partial \Delta_a(x-x')}{\partial x} \right| dx \le tf(t) \int_{E_n} \left| \frac{\partial \Delta_a(x)}{\partial x} \right| dx,$$

або згідно з виразом (14)

$$\left| \frac{\partial U(t,x)}{\partial x} \right| \le tf(t) I_a. \tag{18}$$

З іншого боку, з умови «а» випливає, що виконуються нерівності (9), (10) і тому

$$|F(t,x'(t),z'(t)) - F_0(x,z) - F(t,x(t),z(t)) + F_0(x,z)| \le 2\lambda_1 |x'-x| + 2\lambda_2 |z-z'|. \tag{19}$$

Як випливає з виразу (15)

$$\frac{\partial U(t,x)}{\partial t} = \int_{D_1} \Delta_a(x-x') \{ F(t,x(t),x(t)) - F_0(x'(t),z'(t)) \} dx'.$$

Звідси, врахувавши (19), пересвідчимось, що в області D_1 справедлива нерівність

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-\{F(t,x(t),z(t))-F_0(x,z)\}\times\int_{D_1}\Delta_a(x-x')dx'\right|\le 2(\lambda_1+\lambda_2)a\,. \quad (20)$$

Проте, згідно з означенням функції $\Delta_a(x)$ для будь-якої точки x, що разом зі своїм a-околом належить до області D_1, маємо

$$\int_{D_1}\Delta_a(x-x')dx=\int_{|x-x'|<a}\Delta_a(x-x')dx'=1\,.$$

Отже, зі співвідношення (20) для таких точок одержуємо

$$\left|\frac{\partial U(t,x)}{\partial t}-F(t,x(t),z(t))-F_0(x(t),z(t))\right|\le 2(\lambda_1+\lambda_2)a\,. \quad (21)$$

Фіксуємо тепер число a так, щоб

$$a<\rho\,,\quad a<\frac{\eta^*}{8\lambda Le^{\lambda L}}\,, \quad (22)$$

де $\eta^*=\min(n,\rho)$, і вводимо функції

$$F(\varepsilon)=\sup_{|r|<L}\left|rf\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)\right|,\quad \hat{O}(t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t tf(t)dt\,. \quad (23)$$

Очевидно, маємо $F(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$, $\hat{O}(t)\to 0$, $t\to\infty$.

Тому можемо знайти як завгодно мале додатне ε_0, таке, щоб для будь-якого додатного ε, не більшого за ε_0, мали місце нерівності

$$F(\varepsilon)<a\,,\quad F(\varepsilon)<\frac{\eta^*}{2}\,,\quad \hat{O}\left(\frac{L}{\varepsilon}\right)\le\frac{\eta^*}{4L^2e^{\lambda L}(\lambda+I_aM)}\,. \quad (24)$$

Зробивши такий вибір величин ε_0 та a, розглянемо вираз

$$\bar{x}=\bar{x}(t)=y(t)+\varepsilon U(t,y(t)), \quad (25)$$

де $y(t)$ розв’язок рівняння (4)-(5), що належить разом зі своїм ρ-околом області D_1.

З огляду на нерівності (17) та (22)-(24), в інтервалі

$$0<t<\frac{L}{\varepsilon} \quad (26)$$

маємо
$$|\varepsilon U(t,y)|\le\varepsilon t\,f(t)\le F(\varepsilon)<a<\rho\,. \quad (27)$$

Отже, в інтервалі (26) $\bar{x}(t)\in D$.

Далі
$$\frac{d\bar{x}}{dt}-\varepsilon F(t,\bar{x}(t),z(t))=R\,. \quad (28)$$

Використовуючи обмеження у вигляді умов Ліпшіца можемо дійти висновку, що

$$|x(t)-y(t)|<\eta \quad \text{і} \quad |x(t)-y(t)|<\rho \quad (29)$$

на інтервалі $0<t<\dfrac{L}{\varepsilon}$, що й завершує доведення теореми.

Література

1. Мышкис А.Д., Самойленко А.М. Системы с толчками в заданные моменты времени // Математический сборник. – 1974. – т.74, №2.
2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – №11.
3. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием // Дифференциальные уравнения. – 1978. – №6.
4. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: КГУ, 1980. – 80 с.
5. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Митропольський Ю.О. Методи нелінійної механіки. – К. Наукова думка, 2002.

MIDDLING IN THE NONLINEAR INTEGRAL-DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DOUBLE IMPULSIVE ACTION

S.S.Gulka
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas
15, Carpats'ka Street, Ivano-Frankivs'k, 76019, Ukraine,
ph. +380 (3422) 4 21 23; e-mail: math@nung.edu.ua

The method of middling by Crilov-Bogolyobov-Mitropolsky is applied to the systems of integral-differential equalizations with double impulsive action.

Keywords: *system of integral-differential equalizations, double impulsive action, middling, error.*