Математика та механіка

УДК 517.925.3

ПРО ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В СИСТЕМАХ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

С.І.Гургула[1], І.Й.Перкатюк[2]
[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15, тел. (03422) 42123, e-mail: math@nung.edu.ua
[2]Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57, тел. (0342) 596016, e-mail: stat@ pu.if.ua

Досліджено питання стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу. Одержано критерії стійкості, асимптотичної стійкості та нестійкості розв'язків таких систем.

Ключові слова: *система диференціальних рівнянь, імпульсна дія, функція Ляпунова, стійкість за Ляпуновим.*

Розглядається система диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i , \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} \equiv x(t_i + 0) - x(t_i) = I_i(x), \end{aligned} \tag{1}$$

де t - час, $t \geq t_0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in R^n$, $I_i \in R^n$, $i = 1, 2, \dots$ Така система є математичною моделлю процесів, які описуються звичайними диференціальними рівняннями і в своїй еволюції піддаються дії короткочасних сил. При математичному описі такого роду процесів тривалістю дії збурюючих сил нехтують, вважаючи, що вони носять характер миттєвих «імпульсів» («поштовхів», «ударів»). У результаті приходять до системи вигляду (1), розв'язки якої мають розриви першого роду в моменти часу t_i, при цьому розв'язки вважаються неперервними зліва. Стрибки розв'язків у моменти часу t_i характеризуються функціями $I_i(x)$.

Одним з важливих питань у ході дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією є питання стійкості розв'язків. Зауважимо, що дослідження стійкості довільного розв'язку системи вигляду (1), як і у випадку системи безімпульсної дії, можна звести до дослідження стійкості нульового розв'язку деякої іншої системи з імпульсною дією. Тому надалі вважатимемо, що функція $f(t, x)$ визначена в області

$$Z = \{t \geq t_0 ,\ x \in \bar{J}_h\},$$

де $\bar{J}_h = \{x \in R^n , \|x\| \leq h ,\ h > 0\}$, і задовольняє в ній умовам, що забезпечують існування розв'язків системи, функції $I_i(x)$ визначені і неперервні в $\bar{J}_h$ та $f(t, 0) \equiv 0$ при $t \geq t_0$, $I_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, і на стійкість досліджується тривіальний розв'язок системи (1), який при зроблених припущеннях у неї існує. Послідовність моментів часу $\{t_i\}$ вважається строго зростаючою і такою, що $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Основним методом дослідження питання стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь є другий, або прямий метод Ляпунова, який дає змогу вирішувати дане питання не розв'язуючи системи. Зауважимо, що ми користуватимемось означенням стійкості за Ляпуновим. Функція Ляпунова $V(t, x)$ всюди вважається визначеною в області Z, скалярною і неперервно диференційовною по всіх своїх аргументах.

Очевидно, характер стійкості тривіального розв'язку системи (1) значною мірою визначається характером стійкості тривіального розв'язку відповідної системи безімпульсної дії

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{2}$$

Для системи (2) питання стійкості вирішується шляхом вивчення поведінки функції Ляпунова $V(t, x)$ вздовж розв'язків системи. Для цього розглядається похідна за часом функції $V(t, x)$, взята в силу системи

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot f_j \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \langle gradV ,\ f \rangle\ .$$

Але для вирішення питання стійкості тривіального розв'язку системи (1) розгляду лише V і $\frac{dV}{dt}$ недостатньо. Легко навести приклади, коли розв'язок $x \equiv 0$ системи (2) стійкий чи асимптотично стійкий, а розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) нестійкий, або навпаки. Поряд з V і $\frac{dV}{dt}$, які характеризують поведінку розв'язків на проміжках неперервності, необхідно також розглядати функції

$$V(t_i ,\ x + I_i(x)),$$

які характеризують стрибки розв'язків в моменти часу t_i. Крім того, важливою характеристикою, яка впливає на стійкість тривіального розв'язку, є довжина проміжків неперервності розв'язків.

Ясно, що практично придатні критерії стійкості, асимптотичної стійкості чи нестійкості можна одержати, якщо використовувати незалежні від i оцінки наведених вище величин, самі ж критерії повинні мати вигляд нерівностей, які пов'язують між собою ці оцінки. Надалі оціночне (зверху чи знизу) для $\dfrac{dV}{dt}$ використовується функція від V, для $V(t_i, x+I_i(x))$ - функція від $V(t_i, x)$, а для довжини проміжків неперервності – константи. Зауважимо, що функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$, які фігуруватимуть в перших двох оцінках вважаються неперервними і такими, що $\varphi(0)=\psi(0)=0$ і $\varphi(s)>0$, $\psi(s)>0$ при $s>0$.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$ така, що в області Z виконуються нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\langle gradV, f\rangle \le -\varphi(V), \tag{3}$$

$$V(t_i, x+I_i(x)) \le \psi(V(t_i, x)), \quad i=1, 2, \dots, \tag{4}$$

а також існує $\theta_1>0$, таке, що для всіх $i=1, 2, \dots$

$$t_i - t_{i-1} \ge \theta_1 . \tag{5}$$

Тоді, якщо при деякому $a_0>0$ для всіх $a\in(0, a_0]$ виконується нерівність

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \theta_1 , \tag{6}$$

то розв'язок $x\equiv 0$ системи стійкий. Причому він буде асимптотично стійким, якщо нерівність (6) виконується в більш сильній формі

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \theta_1-\gamma , \quad \gamma>0 . \tag{7}$$

При доведенні цієї і наступних теорем розглядається функція $v(t)=V(t, x(t))$, де $x(t)$ - розв'язок системи. В силу (3) $v'(t)\le -\varphi(v(t))$, $t\ne t_i$. Звідси $\dfrac{v'(t)}{\varphi(v(t))}\le -1$. Інтегруючи в межах $[t_i, t_{i+1}]$, маємо $\displaystyle\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{v'(t)dt}{\varphi(v(t))} \le -(t_{i+1}-t_i)$. Після заміни $v(t)=s$,отримаємо $\displaystyle\int_{v(t_{i+1})}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge t_{i+1}-t_i$. Із цієї нерівності і нерівності (6) з урахуванням нерівностей (4) і (5) легко одержати $\int\limits_{v(t_{i+1}+0)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq 0$. Це означає, що $v(t_{i+1}+0) \leq v(t_i+0)$, $i = 0,1,2,...$. Якщо врахувати, що $v(t)$ спадає на проміжках неперервності, то очевидно, що $v(t) \leq v(t_0)$ при $t \geq t_0$. Це означає, що розв'язок $x \equiv 0$ системи стійкий. Якщо підсилити нерівність (6) (нерівність (7)), то легко довести, що $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$. Це означає, що тривіальний розв'язок системи асимптотично стійкий.

Зауважимо, що в силу (3) тривіальний розв'язок відповідної системи безімпульсної дії (2) асимптотично стійкий. Як свідчать нерівності (4), (5) і (6), щоб він залишився стійким і в системі (1), імпульси повинні бути не занадто сильними і не занадто частими.

Теорема 2. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$ така, що в області Z виконуються нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle gradV , f \rangle \leq \varphi(V), \tag{8}$$

$$V(t_i , x + I_i(x)) \leq \psi(V(t_i , x)), \quad i = 1, 2, ... , \tag{9}$$

а також існує $\theta_2 > 0$, таке, що для всіх $i = 1, 2, ...$

$$t_i - t_{i-1} \leq \theta_2 \ . \tag{10}$$

Тоді, якщо при деякому $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконується нерівність

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_2 \ , \tag{11}$$

то розв'язок $x \equiv 0$ системи стійкий. Причому він буде асимптотично стійким, якщо замість нерівності (11) виконується нерівність

$$\int\limits_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_2 + \gamma , \quad \gamma > 0 \ . \tag{12}$$

Як видно із нерівності (8), тривіальний розв'язок системи (2) міг би бути і нестійким. Щоб в системі (1) він був стійким, як показують нерівності (9), (10) і (11), імпульси повинні бути досить частими і досить сильними.

Перейдемо до теорем про нестійкість. Перша з них відповідає випадку, коли тривіальний розв'язок системи (2) міг би бути стійким чи навіть асимптотично стійким; друга – випадку, коли він нестійкий. Функція Ляпунова, яка фігурує в цих теоремах, має такі властивості:

а) область додатності $V(t, x)$ $D = \{(t, x) \in Z, V(t, x) > 0\}$ при всякому $t \geq t_0$ має ненульовий відкритий переріз гіперплощиною $t = const$, який дотикається до початку координат;

б) в області D $V(t, x)$ обмежена; позначимо $a_0 = \sup\limits_{(t, x) \in D} V(t, x)$.

Теорема 3. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t, x)$, яка володіє властивостями а) і б) і така, що в області D виконуються нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle gradV, f \rangle \geq -\varphi(V), \qquad (13)$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \geq \psi(V(t_i, x)), \quad i = 1, 2, \dots, \qquad (14)$$

а також має місце умова (10). Тоді, якщо функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ такі, що при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \theta_2 + \gamma, \qquad (15)$$

то тривіальний розв'язок системи буде нестійким.

Довести цю теорему можна наступним чином. Згідно властивості а) функції Ляпунова для як завгодно малого $\delta > 0$ знайдеться x_0, таке, що $0 < \|x_0\| < \delta$ і $V(t_0, x_0) > 0$. Покажемо, що розв'язок $x(t)$ з початковою умовою $x(t_0) = x_0$ з часом вийде за межі кулі $\bar{J}_h$. Якщо припустити супротивне, то легко довести, що $(t, x(t)) \in D$ при $t \geq t_0$. Звідси випливає, що функція $v(t) = V(t, x(t))$ буде обмеженою. Як і при доведенні тереми 1, із нерівності (13) з урахуванням (10) одержуємо $\int_{v(t_{i+1})}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_2$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Із цієї нерівності і нерівності (15), враховуючи (14), маємо $\int_{v(t_i+0)}^{v(t_{i+1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \gamma$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Це означає, що послідовність $\{v(t_i + 0)\}$ є зростаючою, а також обмеженою (скажімо, числом a_0), отже, вона буде збіжною. Позначивши $c = \min\limits_{v(t_0) \leq s \leq a_0} \varphi(s) > 0$, із останньої нерівності легко одержуємо для всіх i $v(t_{i+1} + 0) - v(t_i + 0) \geq \gamma c = const$, що суперечить збіжності послідовності $\{v(t_i + 0)\}$.

Як свідчать нерівності (10), (14) і (15), імпульсні збурення в цьому випадку повинні бути досить частими і досить сильними.

Теорема 4. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t, x)$, наділена властивостями а) і б) і така, що в області D виконнуються нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle gradV, f \rangle \geq \varphi(V), \qquad (16)$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \geq \psi(V(t_i, x)), \quad i = 1, 2, \dots, \qquad (17)$$

а також має місце умова (5). Тоді, якщо функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ такі, що при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \theta_1 - \gamma\,, \tag{18}$$

то розв’язок $x \equiv 0$ системи буде нестійким.

Зауважимо, що при цьому, як видно із нерівностей (5), (17) і (18), імпульси повинні бути не дуже частими і не дуже сильними.

Введемо до розгляду функцію $i(t)$, $t \geq t_0$, що визначає кількість імпульсних збурень на проміжку $[t_0, t]$, тобто $i(t) = i$, якщо $t_i < t \leq t_{i+1}$. Тоді функція

$$\frac{i(t)}{t - t_0} \tag{19}$$

означатиме відносну частоту імпульсних збурень, а обернена до неї величина може слугувати оцінкою для середньої довжини проміжку неперервності розв’язків системи. Властивості функції (19) відіграють важливу роль при дослідженні питання стійкості нульового розв’язку системи (1).

Зокрема, якщо функція (19) така, що при деякому $T_0 > t_0$ для всіх $t > T_0$ виконуєтьсяа умова

$$\frac{i(t)}{t - t_0} \leq p\,, \quad p = const\,, \tag{20}$$

то теореми 1 і 4 залишаються справедливими, якщо в нерівностях (6), (7) і (18) замінити ϑ_1 на $\frac{1}{p}$ (зрозуміло, що при цьому умова (5) буде зайвою).

Якщо ж функція (19) така, що при деякому $T_0 > t_1$ для всіх $t > T_0$ виконується нерівність

$$\frac{i(t)}{t - t_0} \geq p > 0\,, \quad p = const\,, \tag{21}$$

то залишаться справедливими теореми 2 і 3, якщо в нерівності (11), (12) і (15) підставити $\frac{1}{p}$ замість θ_2; нерівність (10) при цьому не використовуватиметься. Зауважимо, що твердження про асимптотичну стійкість і нестійкість тривіального розв’язку системи (1) залишаться в силі, якщо

$$p = \lim_{t \to \infty} \frac{i(t)}{t - t_0}\,.$$

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472с.

2. Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием// Дифференциальные уравнения. – 1981.– т.17, №11, – С.1995-2001.
3. Гургула С.І., Перестюк М.О. Про стійкість розв'язків імпульсних систем. // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип. 23. – С. 33-40.
4. Гургула С.І., Собкович Р.І. Про стійкість в системах диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Наукові вісті Інституту менеджменту та економіки «Галицька академія». – 2007. – №2(12). – С. 29-33.

ABOUT THE SECOND LIAPOUNOV'S METHOD IN SYSTEMS WITH IMPULSIVE ACTION

S.I.Gurgula[1], I.Y.Percatyoc[2]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas
15, Carpats'ka Street, Ivano-Frankivs'k, 76019, Ukraine,
ph. +380 (3422) 4 21 23; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]PreCarpathian National University by V. Stefanic
Ivano-Frankivs'k, Shevchenko Street, 57, Ivano-Frankivs'k, 76000, Ukraine,
ph. (0342) 596016, e-mail: stat@pu.if.ua

The question of firmness of decisions of the systems of differential equalizations is explored with impulsive action in the fixed moments of time. The criteria of firmness, asymptotic firmness and instability of decisions of such systems are got.

Keywords*: system of differential equalizations, impulsive action, Liapunov's function, firmness by Liapunov.*