Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.95+511.2

ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

І. Р. Тимків
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: tymkiv_if@ukr.net

У циліндричній області досліджено задачу з багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для параболічних рівнянь довільних порядків зі змінними коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв’язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв’язку задачі.

Ключові слова: *багатоточкові умови, параболічні рівняння, малий знаменник, міра Лебега.*

1. Вступ. Цікавість до вивчення багатоточкових задач для рівнянь із частинними похідними зумовлена потребами загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними та їхніми застосуваннями до потреб практики.

Багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь із частинними похідними є, назагал, некоректними за Адамаром, а їх розв’язність у багатьох випадках пов’язана з проблемою малих знаменників.

У роботах [1-4] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для широких класів рівнянь із частинними похідними. Доведено метричні твердження про оцінки знизу малих знаменників, що виникають при побудові розв’язків розглядуваних задач, з яких випливає коректність задач для майже всіх (стосовно міри Лебега) параметрів задачі.

У даній статті встановлено коректність задачі з багатоточковими умовами, які містять дію диференціальних виразів за просторовими змінними на значення невідомої функції та її похідних у вузлах інтерполяції, для параболічних рівнянь вищих порядків і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із вузлів інтерполяції. Результати даної роботи розвивають та узагальнюють результати праць [3, 4] на випадок загальніших багатоточкових умов.

Надалі використовуватимемо такі позначення: Q – обмежена однозв'язна область в R^p з гладкою межею ∂Q; $x=(x_1,\dots,x_p)\in Q$; $D=\{(t,x): t\in(0,T), x\in Q\}$; $\Gamma=[0,T]\times\partial Q$; $L=-\sum\limits_{i,j=1}^{p}\partial/\partial x_i\left(p_{i,j}(x)\partial/\partial x_j\right)$ $+q(x)$, диференціальний вираз з достатньо гладкими коефіцієнтами $p_{i,j}(x)=p_{j,i}(x)$, $i,j\in\{1,\dots,p\}$, $q(x)\ge 0$. Відомо, що задача [5]

$$LX(x)=\lambda X(x),\quad X(x)|_{\partial Q}=0$$

має повну ортонормовану в $L_2(\overline{Q})$ систему власних функцій $\{X_k(x), k\in\mathrm{N}\}$ і нескінченну множину додатних власних значень $\{\lambda_k, k\in\mathrm{N}\}$, причому $X_k\in C^{2n}(\overline{Q})$, $k\in\mathrm{N}$, і виконуються оцінки

$$C_1k^{2/p}\le\lambda_k\le C_2k^{2/p},\quad 0<C_1<C_2,\quad k\in\mathrm{N}. \tag{1}$$

Нехай $mes_{\mathrm{R}^n}A$, – міра Лебега вимірної множини $A\subset\mathrm{R}^n$; $E^b_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, $b\in\mathrm{N}$, – простір функцій, одержаний поповненням простору скінченних сум $\varphi=\sum\varphi_kX_k(x)$, $\varphi_k\in\mathrm{C}$, $k\in\mathrm{N}$, за нормою

$$\left\|\varphi;E^b_{\alpha,\beta}\right\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|^2\lambda_k^{2\alpha}e^{2\beta\lambda_k^b}}.$$

$C^n\left([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\right)$ – простір функцій $u(t,x)=\sum u_k(t)X_k(x)$, $u_k(t)\in C^n[0,T]$, $k\in\mathrm{N}$, таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ $\partial^s u(t,\cdot)/\partial t^s\in E^b_{\alpha,\beta}$, $s\in\{0,1,\dots,n\}$ і є неперервними за $t\in[0,T]$ в нормі цього простору; норму в $C^n\left([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\right)$ задаємо рівністю

$$\left\|u;C^n\left([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\right)\right\|=\sum_{s=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^s\vec{u}(t,\cdot)}{\partial t^s};E^b_{\alpha,\beta}\right\|.$$

2. Постановка задачі та єдиність розв'язку. В області D розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{b(n-r)}A_{r,s}L^s\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}=f(t,x), \tag{2}$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(L)\frac{\partial^r u(t,x)}{\partial t^r}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad 0 \le N_j \le n-1, \quad j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{3}$$

$$L^m u(t,x)|_\Sigma = 0, \quad m \in \{0,1,\ldots,(\theta-1)\}, \quad \theta = \max\{bn, M\}, \tag{4}$$

де $A_{r,s} \in \mathsf{C}$, $a_r^j(L) = \sum_{i=0}^{M} a_{r,i}^j L^i$, $a_{r,i}^j \in \mathsf{C}$, $M \in \mathsf{N}$, $a_{N_j,M}^j \ne 0$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Нехай рівняння (2) є рівномірно параболічним за Петровським в області Q_T^p.

Розв'язок задачі (2)-(4) з простору $C^n\left([0,T]; E_{\alpha,\beta}^b\right)$, $\alpha,\beta \in \mathsf{R}$, шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x). \tag{5}$$

Кожна функція $u_k(t), k \in \mathrm{N}$, є розв'язком задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{b(n-r)} A_{r,s}\lambda_k^s \frac{d^r u_k(t)}{dt^r} = f_k(t), \tag{6}$$

$$\sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)\frac{d^r u_k(t)}{dt^r}\bigg|_{t=t_j} = \varphi_{j,k}, \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{7}$$

де $f_k(t)$ та φ_{jk}, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $k \in \mathrm{N}$, – коефіцієнти Фур'є функції f та φ_j за системою $\{X_k(x), k \in \mathrm{N}\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$.

Нехай $\mu_1(k),\ldots,\mu_n(k)$ – корені рівняння

$$\mu^n + \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{b(n-r)} A_{r,s}\lambda_k^s \mu^r = 0. \tag{8}$$

Для прорстоти викладу вважатимемо, що для кожного $k \in \mathsf{N}$, всі $\mu_q(k)$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, є попарно різними. Із параболічності (2) рівняння випливає, що μ-корені рівняння (8) справджують оцінки

$$Re\mu_q(k) \le -\delta_1\lambda_k^b, \quad \delta_1 > 0, \quad q \in \{1,\ldots,n\}, \ k \in \mathsf{N}. \tag{9}$$

Фундаментальну систему розв'язків рівняня (6) побудуємо використовуючи поділені різниці за набором простих коренів $\mu_1(k),\ldots,\mu_q(k)$ від функції $\exp(\mu t)$. Нехай

$$u_{k,1}(t) = \exp(\mu_1(k)t), \ u_{k,q}(t) = \sum_{j=1}^{q}\frac{\exp(\mu_j(k)t)}{\prod_{i=1, i\ne j}^{q}(\mu_j(k)-\mu_i(k))}, \ q \in \{2,\ldots,n\}. \tag{10}$$

Відзначимо, що для функцій (9) справедливі інтегральні зображення

$$u_{k,q}(t)=t^{q-1}\exp(\mu_1(k)t)\int\limits_0^1\exp((\mu_2(k)-\mu_1(k))t\xi_1)\int\limits_0^{\xi_1}\exp((\mu_3(k)-\mu_2(k))t\xi_2)\times$$

$$\ldots\times\int\limits_0^{\xi_{q-2}}\exp((\mu_q(k)-\mu_{q-1}(k))t\xi_{q-1})d\xi_{q-1}\ldots d\xi_2 d\xi_1,\ q\in\{2,\ldots,n\},\ k\in\mathbb{N}. \quad (11)$$

Розв'язність задачі (6), (7) пов'язана з властивістю визначника

$$\Delta(k,\vec{t})=\det\left\| \sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)\frac{d^r u_{k,q}(t)}{dt^r}\Bigg|_{t=t_j}\right\|_{j,q\in\{1,\ldots,n\}},\ \vec{t}=(t_1,\ldots,t_n), \quad (12)$$

який називається характеристичним визначником цієї задачі.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (2)-(4) *у просторі* $C^n\left([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\right)$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, *необхідно і досить, щоб справджувалась умова*

$$\forall k\in\mathrm{N}\quad \Delta(k,\vec{t})\neq 0. \quad (13)$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [5].

3. Існування розв'язку задачі. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (2)-(4). Надалі вважатимемо, що виконується умова (13). Тоді для кожного натурального $k\in\mathbb{N}$ розв'язок задачі (6), (7) визначається формулою

$$u_k(t)=\int\limits_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau+\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}\varphi_{jk}u_{k,q}(t), \quad (14)$$

де $\Delta_{j,q}(k,\vec{t})$ – алгебричне доповнення елемента $\sum\limits_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)\frac{d^r u_{k,q}(t)}{dt^r}\Bigg|_{t=t_j}$ у визначнику (12), а $G_k(t,\tau)$ функція Ґріна задачі (6), (7).

У кожній із областей $\{(t,\tau):0\le t\le T, t_j<\tau<t_{j+1}\}$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, $t_0=0$, $t_{n+1}=T$, функція $G_k(t,\tau)$, збігається, відповідно, з функцією

$$G_{k,j}(t,\tau)=\frac{\mathrm{sgn}(t-\tau)}{2}u_{k,n}(t-\tau)+\sum_{m=1}^{j}(-1)^{m+1}F_{k,m}(t,\tau)-$$

$$-\sum_{m=j+1}^{n}(-1)^{m+1}F_{k,m}(t,\tau), \quad (15)$$

де $F_{km}(t,\tau)=\frac{1}{2}\sum\limits_{q=1}^{n}\frac{\Delta_{m,q}(k,\vec{t})}{\Delta(k,\vec{t})}u_{k,q}(t)\left(\sum\limits_{r=0}^{N_m} a_r^m(\lambda_k)\frac{d^r u_{k,n}(t_m-\tau)}{dt^r}\right).$

На відрізках прямих $\tau=t_j$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, доозначуємо функцію $G_k(t,\tau)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau=T$ – за неперервністю зліва.

На підставі формул (5), (14) формальний розв'язок задачі (2)-(4) зображується формулою

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau+\sum_{j,q=1}^{n}\frac{\Delta_{j,q}(k,\vec{t}\,)}{\Delta(k,\vec{t}\,)}\varphi_{jk}u_{k,q}(t)\Big)X_k(x). \quad (16)$$

Збіжність ряду (16) у просторах $C^n\big([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\big)$, $\alpha,\beta\in\mathrm{R}$, взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки величина $\left|\Delta(k,\vec{t}\,)\right|$ будучи відмінною від нуля може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості натуральних k. Позначимо: $N_0=(N_1+\ldots+N_n)b+nM$, $N=N_0-b\max\limits_{j=\overline{1,n}}\{N_j\}-M$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова (13) та існують сталі* $\omega,\nu\in\mathrm{R}$*, такі, що для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k *виконується нерівність*

$$|\Delta(k,\vec{t}\,)|>\lambda_k^{-\omega}\exp(-\nu\lambda_k^b). \quad (17)$$

Якщо $f\in C\big([0,T];E^b_{\alpha_1,\beta_1}\big)$, $\varphi_j\in E^b_{\alpha_2,\beta_2}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_1=\alpha+\omega+N_0+nb$, $\beta_1=\beta+\nu+(T-nt_1)\delta_1$, $\alpha_2=\alpha+\omega+N+nb$, $\beta_2=\beta+\nu-(n-1)\delta_1t_1$, *то існує єдиний розв'язок задачі (2) – (4) з простору* $C^n\big([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\big)$. *Цей розв'язок зображується формулою (16) і неперервно залежить від функцій* f *та* φ_j, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Доведення. Згідно з [6, с. 102], для коренів $\mu_q(k)$ рівняння (8) справджуються нерівності

$$|\mu_q(k)|\le C_3\lambda_k^b,\quad q\in\{1,\ldots,n\}. \quad (18)$$

Із формул (11) на підставі оцінок (9), (18) отримуємо, що для кожного $t\in[0,T]$ виконуються оцінки

$$\left|\frac{d^su_{k,q}(t)}{dt^s}\right|\le C_4\lambda_k^{sb}\exp(-\delta_1t\lambda_k^b),\quad s\in\{0,1,\ldots,n\},\quad q\in\{1,\ldots,n\}. \quad (19)$$

Із встановлених оцінок (19) безпосередньо отримуємо

$$\left|\sum_{r=0}^{N_j}a_r^j(\lambda_k)\frac{d^ru_{k,q}(t_j)}{dt^r}\right|\le\sum_{r=0}^{N_j}\sum_{i=0}^{M}\left|a_{r,i}^j\right|\lambda_k^i\,\frac{d^ru_{k,q}(t_j)}{dt^r}\le C_5\lambda_k^{N_jb+M}\exp(-\delta_1t_j\lambda_k^b)\,, \quad (20)$$

де $j\in\{1,\ldots,n\}$, $q\in\{1,\ldots,n\}$. З огляду на (12) і (20) отримуємо

$$|\Delta_{j,q}(k,\vec{t}\,)|\le C_6\lambda_k^N\exp(-(n-1)\delta_1t_1\lambda_k^b),\quad j,q\in\{1,\ldots,n\}. \quad (21)$$

Із властивостей функції Гріна випливає, що

$$\frac{d^s}{dt^s}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau=\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial^sG_{k,j}(t,\tau)}{\partial t^s}f_k(\tau)d\tau+\delta_{s,n}f_k(t), \quad (22)$$

де $s \in \{0,1,\ldots,n\}$, а $\delta_{s,n}$ – символ Кронекера.

Із формули (19) на підставі оцінок (21), (24)-(27) встановлюємо

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^s}{dt^s}\int_0^T G_k(t,\tau)f_k(\tau)d\tau\right| \le C_7 \overline{f}_k \lambda_k^{\omega+N_0+sb}\exp((\nu+(T-nt_1)\delta_1)\lambda_k^b), \quad (23)$$

де $s \in \{0,1,\ldots,n\}$, $\overline{f}_k = \max\limits_{t\in[0,T]}|f_k(t)|$. Отже

$$\left\|u;C^n\left([0,T];E^b_{\alpha,\beta}\right)\right\| \le \sum_{s=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^s u_k(t)}{dt^s}\right|^2 \lambda_k^{2\alpha}\exp(2\beta\lambda_k^b)\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le C_8\left(\left\|f;C\left([0,T];E^b_{\alpha_1,\beta_1}\right)\right\| + \sum_{j=1}^{\infty}\left\|\varphi_j;E^b_{\alpha_2,\beta_2}\right\|\right). \quad (24)$$

Із (24) випливає твердження теореми.

Зауваження 1. Якщо виконуються умови теореми 2, то для кожного фіксованого $t_* \in [0,T]$ функція $u(t_*,x)$ за змінною x належить до простору $E^b_{\alpha,\beta+\delta_1 t_*}$.

Для з'ясування питання про можливість виконання нерівностей (17) встановимо допоміжне твердження. Позначимо:

$$Z_j(k) = \sum_{r=0}^{N_j} a_r^j(\lambda_k)(\mu_j(k))^r, \qquad j \in \{1,\ldots,n\}, \qquad C_9 = (\delta_1)^{n(M-1)}\prod_{j=1}^{n}\left|a^j_{N_j,M}\right|,$$

$$C_{10} = M \max_{0\le j\le n}(N_j \max_{0\le r\le N_j}\max_{0\le i\le M-1}\{|\, a^j_{r,i}/a^j_{N_j,M}\,|\}).$$

Лема 1. *Для довільних фіксованих* $a^j_{r,i}$, $r \in \{0,1,\ldots,N_j\}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, $i \in \{0,1,\ldots,M\}$, *нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n}\left|Z_j(k)\right| \ge C_9 \lambda_k^{b(N_1+\ldots+N_n)+n(M-1)}. \quad (24)$$

виконується для всіх $k \in \mathrm{N}$, *таких, що* $\lambda_k > (1+1/\delta_1)^{1/b} + C_{10}$.

Доведення. Очевидно, що

$$\left|Z_j(k)\right| = \left|a^j_{N_j,M}\right|\left|\lambda_k^M(\mu_j(k))^{N_j} + \sum_{r=0}^{N_j}\sum_{i=0}^{M-1}\frac{a^j_{r,i}}{a^j_{N_j,M}}\lambda_k^i(\mu_j(k))^r\right| \ge$$

$$\ge \left|a^j_{N_j,M}\right|\left|\lambda_k^M\left|\mu_j(k)\right|^{N_j} - \sum_{r=0}^{N_j}\sum_{i=0}^{M-1}\left|\frac{a^j_{r,i}}{a^j_{N_j,M}}\right|\lambda_k^i\left|\mu_j(k)\right|^r\right|, \; j \in \{1,\ldots,n\}. \quad (25)$$

Із параболічності рівняння (2) (див. нерівності (9)) випливає, що

$$|\mu_j(k)|\geq|Re\mu_j(k)|\geq\delta_1\lambda_k^b,\quad j\in\{1,\ldots,n\}. \qquad (26)$$

Якщо $\lambda_k>(1+1/\delta_1)^{1/b}$, то $|\mu_j(k)|\geq 1$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, і виконуються оцінки

$$\sum_{r=0}^{N_j}\sum_{i=0}^{M-1}\left|\frac{a_{r,i}^j}{a_{N_j,M}^j}\right|\lambda_k^i\,|\mu_j(k)|^r\leq C_{10}\,|\mu_j(k)|^{N_j}\,\lambda_k^{M-1}. \qquad (27)$$

На підставі нерівностей (25)-(27) встановлюємо, що для всіх $\lambda_k>(1+1/\delta_1)^{1/b}+C_{10}$, справджуються оцінки

$$\left|Z_j(k)\right|\geq\left|a_{N_j,M}^j\right|\left|\mu_j(k)\right|^{N_j}\lambda_k^{M-1}\left|\lambda_k-C_{10}\right|\geq(\delta_1)^{N_j}\left|a_{N_j,M}^j\right|\lambda_k^{bN_j+M-1}, \qquad (28)$$

де $j\in\{1,\ldots,n\}$. Перемножаючи нерівності (28) отримуємо твердження леми.

Теорема 3 *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *нерівність (17) виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел* $k\in\mathbb{N}$ *при* $\omega>n(n-1)(p+2b)/4-b(N_1+\ldots+N_n)-$ $-n(M-1)$ *і* $\nu=n\delta_2T$, $\delta_2=\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\max\limits_{q\in\{1,\ldots,n\}}\{|Re\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$.

Доведення. Враховуючи формули (9), (12) отримуємо

$$\Delta(k,\vec{t})=\prod_{1\leq j<q\leq n}\frac{\Upsilon(k,\vec{t})}{\mu_q(k)-\mu_j(k)}, \qquad (29)$$

де $\Upsilon(k,\vec{t})=\det\left\|\sum_{r=0}^{N_j}a_r^j(\lambda_k)\mu_q^r(k)\exp(\mu_q(k)t_j)\right\|_{j,q\in\{1,\ldots,n\}}$.

Доведемо спочатку, що при $\omega_0>n(n-1)(p+2b)/4$, оцінка

$$|\Upsilon(k,\vec{t})|>\lambda_k^{-\omega_0}\exp(-n\delta_2T\lambda_k^b)\prod_{q=1}^n|P_q(\mu_q(k),k)\|Z_q(k)|, \qquad (30)$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) $\vec{t}\in[0,T]^n$, для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, де $P_1(\mu,k)=1$, $P_q(\mu,k)=\prod_{j=1}^{q-1}(\mu-\mu_j(k))$, $q\in\{2,\ldots,n\}$. З огляду на лему Бореля Кантеллі [7] для цього досить довести, що збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}mes_{\mathbb{R}^n}W(k), \qquad (31)$$

де $W(k)$ множина тих векторів $\vec{t}\in[0,T]^n$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (30), виконується при фіксованому $k\in\mathbb{N}$.

Щоб встановити збіжність ряду (31), доведемо, що для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується оцінка

$$mes_{\mathbb{R}^n} W(k) \le C_{11} k^{-1-\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{32}$$

Для цього запровадимо позначення: $\Upsilon_q(k, t_1, \dots, t_q)$ визначник, який отримується з визначника $\Upsilon(k, \vec{t})$ викреслюванням останніх $n-q$ рядків та останніх $n-q$ стовбців, $q \in \{1, \dots, n\}$; зрозуміло, що $\Upsilon_n(k, t_1, \dots, t_n) = \Upsilon(k, \vec{t})$, $\Upsilon_1(k, t_1) = Z_1(k)\exp(\mu_1(k)t_1)$. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ розглянемо множини:

$$W_q(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Upsilon_q(k, t_1, \dots, t_q)| < \nu_q(k), |\Upsilon_{q-1}(k, t_1, \dots, t_{q-1})| \ge \nu_{q-1}(k)\},$$

де числа $\nu_q(k)$, $q \in \{2, \dots, n\}$, визначаються таким чином:

$$\nu_q(k) = \lambda_k^{-q(q-1)(p+2b)/4 - q\varepsilon/n} \exp(-q\delta_2 T \lambda_k^b) \prod_{j=1}^{q} |P_j(\mu_j(k), k)| \, |Z_j(k)|, \varepsilon > 0.$$

Легко перевірити, що $W(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} W_q(k)$. Тому

$$mes_{\mathbb{R}^n} W(k) \le \sum_{q=2}^{n} mes_{\mathbb{R}^n} W_q(k). \tag{33}$$

Оцінимо зверху міри Лебега множин $W_q(k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2, \dots, n\}$, де $\vec{\tau}_q = (t_1, \dots, t_{q-1}, t_{q+1}, \dots, t_n)$, $d\vec{\tau}_q = dt_1 \dots dt_{q-1} dt_{q+1} \dots dt_n)$, $W_q(k, \vec{\tau}_q) = \{t_q \in [0,T] : \vec{t} \in F_q(k)\}$, $q \in \{2, \dots, n\}$.

Для цього розкладемо визначник $\Upsilon_q(k, t_1, \dots, t_q)$ за елементами останнього рядка і до отриманої рівності застосуємо диференціальний вираз $P_q(\partial / \partial t_q, k)$, одержимо

$$P_q\left(\frac{\partial}{\partial t_q}, k\right) \Upsilon_q(k, t_1, \dots, t_q) = P_q(\mu_q(k), k) Z_q(k) \times$$
$$\times \exp(\mu_q(k) t_q) \Upsilon_{q-1}(k, t_1, \dots, t_{q-1}), \quad q \in \{2, \dots, n\}. \tag{34}$$

Зазначимо, що функція $\Upsilon_q(k, t_1, \dots, t_q)$, $q \in \{2, \dots, n\}$, як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \dots, t_q - 1$), є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_3 T \lambda_k^b$. Якщо $\vec{t} \in F_q(k)$, $q \in \{2, \dots, n\}$, то з формул (34) та означення множин $W_q(k)$ випливає, що

$$\forall t_q \in [0,T] \quad \left| P_q(\partial / \partial t_q, k) \Upsilon_q(k, t_1, \dots, t_q) \right| \ge |P_q(\mu_q(k), k)| \times$$
$$\times |Z_q(k)| \exp(-\delta_2 T \lambda_k^b) \nu_{q-1}(k), \quad q \in \{2, \dots, n\}. \tag{35}$$

Крім того, для кожного q, $q \in \{2,\dots,n\}$, степінь многочлена $P_q(\mu,k)$ за змінною μ дорівнює $q-1$, а модуль коефіцієнта при μ^{q-j-1}, $j \in \{0,1,\dots,q-1\}$, в цьому многочлені, не перевищує $C_{14}\lambda_k^{bj}$. Тому з оцінок (35) на підставі твердження леми 1 встановлюємо

$$mes_{\mathrm{R}} W_q(k,\vec{\tau}_q) \le C_{12}\lambda_k^b \left(\frac{\nu_q(k)\exp(\delta_2 T\lambda_k^b)}{\nu_{q-1}(k)\,|\,P_q(\mu_q(k),k)\,\|\,Z_q(k)\,|} \right)^{\frac{1}{q-1}} \le$$

$$\le C_{13}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{\varepsilon}{n(q-1)}}, \quad q \in \{2,\dots,n\}, \quad k \in \mathrm{N}. \qquad (36)$$

Інтегруючи оцінки (36) за змінними $t_1,\dots,t_{q-1},t_{q+1},\dots,t_n$ та враховуючи оцінки (1), (33) отримуємо

$$mes_{\mathrm{R}^n} W(k) \le C_{14} k^{-1-\varepsilon_0}, \quad k \in \mathrm{N}, \qquad (37)$$

де $\varepsilon_0 = \dfrac{2\varepsilon}{pn(n-1)}$. Із оцінок (37) випливає збіжність ряду (32). З наведених міркувань та формули (29) випливає, що при $\omega_0 > n(n-1)(p+2b)/4$ нерівність

$$|\,\Delta(k,\vec{t})\,| > \lambda_k^{-\omega_0} \exp(-n\delta_2 T\lambda_k^b)\prod_{q=1}^{n} |\,Z_q(k)\,| \qquad (38)$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$, для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k. Враховуючи оцінки (24), (38) отримуємо твердження теореми.

Із результатів, встановлених в теоремах 2, 3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Якщо* $f \in C\big([0,T]; E^b_{\alpha_1,\beta_1}\big)$, $\varphi_j \in E^b_{\alpha_2,\beta_2}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, *де* $\alpha_1 = \alpha + n(b+1+(n-1)(p+2b)/4), \beta_1 = \beta + nT\delta_2 + (T-nt_1)a_0\delta_1$, $\alpha_2 = \alpha + n(n-1)(p+2b)/4 - b\max\limits_{j=1,n}\{N_j\} - M + n$, $\beta_2 = \beta + nT\delta_2 - (n-1)t_1 a_0\delta_1$,

то для довільно фіксованих коефіцієнтів рівняння (2) та умов (3) і для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задач і (2)-(4) з простору* $C^n\big([0,T]; E^b_{\alpha_1,\beta_1}\big)$. *Цей розв'язок зображується формулою (16), причому*

$$\left\| u; C^n\big([0,T]; E^b_{\alpha,\beta}\big) \right\| \le C_{15}\left(\left\| f; C\big([0,T]; E^b_{\alpha_1,\beta_1}\big) \right\| + \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \varphi_j; E^b_{\alpha_2,\beta_2} \right\| \right)$$

Література

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
2. Пташник Б.Й. Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б.Й. Пташник, М.М. Симотюк // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 2. – С. 241-254.
3. Пташник Б.Й. Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області / Б.Й. Пташник, І.Р. Тимків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 15-26. (Переклад: Ptashnyk B.Yo. A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients in a cylindrical domain / B.Yo. Ptashnyk, I.R. Tymkiv // J. Math. Sci. – 2012. – V. 183, N.1. – P.1-16.)
4. Пташник Б.Й. Багатоточкові задачі для еволюційних рівнянь / Б.Й. Пташник // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. – 2011. – Т.1, №1-2. – С. 145-157.
5. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
6. Фаддєєв Д.К. Збірник задач з вищої алгебри / Д.К. Фаддєєв, І.С. Сомінський. – К.: Вища шк., 1971. – 316 с.
7. Спринжук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В.Г. Спринжук. – М.: Наука, 1977. – 143 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 15.11.2017 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., проф. ***Бігуном Я.Й.*** *(м. Чернівці),*
д.ф.-м.н., професором ***Ільківим В.С.*** *(м. Львів)*

PROBLEM WITH TWO-POINTS CONDITIONS FOR SYSTEM PARABOLIC EQUATIONS OF SECOND ORDER ON TIME

I. R. Tymkiv
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 15;
ph: +380(342) 727131; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

The correctness of the problem with multipoint conditions on time variable and Dirichlet type conditions on spatial coordinate for the parabolic equations of second order on time. The conditions of existence and uniqueness solution of the problem are established. The metrical theorem on evalution from below of small denominators of the problem are proved.

Key words*: multipoint conditions, parabolic equations, small denominators, Lebesque measure.*