УДК 517.53

УЗАГАЛЬНЕННЯ СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З ДОВІЛЬНИМИ ДОДАТНИМИ ПОКАЗНИКАМИ

І. Є. Овчар[1], Я. І. Савчук[1], О. Б. Скасків[2]
[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ; вул. Карпатська, 15
[2]Львівський національний університет імені І. Франка; 79000, м. Львів, вул. Університетська, 1

Для цілого ряду Діріхле $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$ *з довільною немонотонною послідовністю показників* $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset \mathbb{R}_+$, *встановлено умови, за яких* $\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\to 0$ *при* $x\to+\infty$ $(x\notin E, \int_E d\ln x<+\infty)$, *де* $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)| : y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n\ge 0\}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Ключові слова: *ряд Діріхле, співвідношення Бореля, максимальний член, максимум модуля, логарифмічна міра.*

Вступ

У цій статті розглядаємо цілі функції F, задані абсолютно збіжними у всій комплексній площині рядами Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}, \tag{1}$$

де $\lambda=(\lambda_n)$ – довільна послідовність попарно різних невід'ємних дійсних чисел, тобто $\lambda_n\ne\lambda_k$ $(n\ne k)$, $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset\mathbb{R}_+\overset{def}{=}[0,+\infty)$. Через D_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині

$$\Pi_a=\{z : Re z<a\},\quad a\le+\infty,$$

рядів Діріхле вигляду (0.1), де $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset\mathbb{R}_+$. Зрозуміло, що $D\overset{def}{=}D_{+\infty}$ – клас цілих рядів Діріхле вигляду (1).

Через D^Δ, $\Delta\in(0,+\infty]$, позначимо клас цілих рядів Діріхле з класу D, показники яких задовольняють умову

$$(\forall\, n\ge 0) : \lambda_n<\sup\{\lambda_j : j\ge 0\}\overset{def}{=}\beta,\quad \text{де } \beta\le\Delta. \tag{2}$$

Нехай $D^+(\lambda)$ та $D_0^+(\lambda)$ – підкласи класів D та D_0 відповідно, тобто у ці підкласи входять ряди Діріхле вигляду (1) з фіксованою

монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників $\lambda=(\lambda_n)$, такою, що
$$0\le\lambda_0<\lambda_n<\lambda_{n+1}\to+\infty\quad(1\le n\to+\infty).$$

Для $F\in D_a$, $a\le+\infty$, та $x<a$ позначимо
$$M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\},$$
$$\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n\ge 0\}.$$

У статті [1] доведено таку теорему, яка містить необхідну і достатню умову для того, щоб співвідношення Бореля на додатному дійсному промені виконувалось зовні деякої множини скінченної міри Лебега для кожної цілої функції $F\in D^+(\lambda)$.

Теорема А [1]. *Для того, щоб для кожної функції* $F\in D^+(\lambda)$ *співвідношення Бореля*
$$\ln M(x,F)=(1+o(1))\ln\mu(x,F)\tag{3}$$
виконувалось при $x\to+\infty$ зовні деякої множини $E\subset[0,+\infty)$ скінченної міри Лебега необхідно і достатньо, щоб для $\mu_n=\lambda_n$ $(n\ge0)$ виконувалась умова
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\mu_n}<+\infty.\tag{4}$$

У статті [2] встановлений такий аналог Теореми А для функцій з класу $D_0^+=\bigcup\limits_{\lambda}D_0^+(\lambda)$.

Теорема Б [2]. *Нехай* $F\in D_0^+$. *Якщо для коефіцієнтів* (a_n^*) *її мажоранти Ньютона виконується умова (4) з* $\mu_n=\ln a_n^*$, *то*
$$\ln M(x,F)=o\left(\frac{1}{|x|}\ln\mu(x,F)\right),$$
при $x\to-0$ зовні деякої множини E_1 скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[-1,0)$ (тобто, $\ln_0-\text{-meas}(E_1\cap[-1;0))\overset{def}{=}\int\limits_{E_1\cap[-1;0)}\frac{dx}{|x|}<+\infty$).

Якщо додатково вимагати виконання умови
$$(\exists q>0):|x|^q\ln\mu(x,F)\uparrow\quad(x_0\le x<0),$$
то при $x\to-0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[-1,0)$ справджується співвідношенння Бореля (3).

У статті [3] подібне твердження отримане у класі $D^{+\infty}$.

Додатну послідовність (x_n) назвемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta>0$ така, що $x_m\le\delta x_n$ для всіх $n\ge n_1$ і $m\ge n+1$.

Теорема Г [3]. *Нехай* $F\in D^{\Delta}$, $\Delta\le+\infty$, $\mu_n\overset{def}{=}-\ln|a_n|$. *Якщо* $\Phi_1\in L_1$, *послідовність* $(\ln n/\mu_n)$ *майже монотонно спадна і виконується умова (4), то співвідношення (3) виконується при* $x\to+\infty$ *зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.*

Для доведення основних результатів цього дослідження використовуватимемо оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу D через максимальний член цього ряду, яку отримано в статті [3]. Використаємо наступні позначення.

Нехай L – клас додатних неперервних функцій $\psi:\mathsf{R}_+\to\mathsf{R}_+$ таких, що $\psi(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$; L_0 – клас функцій $\Phi\in\mathsf{L}$ таких, що $\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi(t)}{t}dt=O(\Phi(x))$ $(x\to+\infty)$;

L^+ – підклас L, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x\to+\infty$ функції;

L_1 – клас функцій $\psi\in\mathsf{L}$ таких, що $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\psi(t)}<+\infty$; $\mathsf{L}_1^+=\mathsf{L}_1\cap\mathsf{L}^+$;

L_2 – клас диференційовних вгнутих функцій $\omega\in\mathsf{L}^+$ таких, що $\frac{1}{t}=O(\omega'(t))(t\to+\infty)$.

Для функції $F\in D^{+\infty}$, такої, що $\Phi_1\in\mathsf{L}_0$, де $x\Phi_1(x)=\ln\mu(x,F)$, визначимо таку сталу

$$K=K_F\overset{def}{=}\sup\{\frac{1}{\Phi_1(x)}\int_0^x\frac{\Phi_1(t)}{t}dt:x\ge x_0\}<+\infty, \tag{5}$$

де $x_0=\max\{x:\mu(x,F)=1\}$. Зауважимо, що для $x\in(0,x_0]$

$$\int_0^x\frac{\Phi_1(t)}{t}dt=0=\Phi_1(x). \tag{6}$$

З опуклості функції $\ln\mu(x,F)$ на проміжку $[0,x]$, $x>0$, отримаємо, що для $x_1>x_2>x_0$

$$\Phi_1(x_1)=\frac{\ln\mu(x_1,F)-\ln\mu(0,F)}{x_1-0}>\frac{\ln\mu(x_2,F)-\ln\mu(0,F)}{x_2-0}=\Phi_1(x_2),$$

тобто, Φ_1 монотонно зростає на $[x_0,+\infty)$. Тому для функції

$$\Phi_1:[x_0,+\infty)\to[0,+\infty)$$

існує обернена функція

$$\varphi_1:[0,+\infty)\to[x_0,+\infty).$$

Подібно, для функції $\Phi(x)=\ln\mu(x,F)$, визначеної на проміжку $[x_0,+\infty)$, існує обернена функція

$$\varphi:[0,+\infty)\to[x_0,+\infty),\quad \varphi(0)=x_0.$$

Логарифмічною мірою вимірної множини $E\subset[1,+\infty)$ назвемо величину

$$\ln-meas(E)\overset{def}{=}\int_E d\ln x.$$

Теорема В [3]. *Нехай функція* $F\in D^{+\infty}$, *така що* $\Phi_1\in L_1$, *а* $v(t)$ – *невід'ємна на* $[0,+\infty)$ *і додатна при* $t\to+\infty$ *функція, така, що* $\int_0^{+\infty}v(t)dt<+\infty$. *Якщо* $\ln n=o(\ln|a_n|)\,(n\to+\infty)$, *то існує функція* $c_1(t)\uparrow+\infty\ (t\to+\infty)$ *така, що для всіх* $n\ge 0$ *і для всіх* $x>0\ (x\notin E,\ln-meas(E)<+\infty)$ *виконується нерівність*

$$|a_n|\,\mathrm{e}^{x\lambda_n}\le\mu(x,F)\exp\left\{-xe^{-2K}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n-t)\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}v(4t)dt\right\},\tag{7}$$

де $\mu_n=-\ln|a_n|$, а $\nu=\nu(x,F)=\max\{n:|a_n|e^{x\lambda_n}=\mu(x,F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

У статті [4] для цілих рядів з довільною системою комплексних показників доведено теорему, подібну до Теореми B.

Узагальнення співвідношення Бореля

Позначимо через L_3 – клас додатних неперервно диференційовних на $[0,+\infty)$ функцій ω із спадною похідною

$$\omega'(x)\downarrow 0\quad (x\uparrow+\infty).$$

Для функції $\omega\in\mathrm{L}_1$ через $k(x)$ позначимо обернену функцію до функції $\dfrac{1}{\omega'(x)}$. Зрозуміло, що

$$k(x)\uparrow+\infty\quad (x\uparrow+\infty).$$

Для прикладу, описані щойно умови задовольняють такі функції

$$\omega(x)=(\ln\ln x)^{\alpha}\quad (x>e^2),\alpha>0,\quad \omega(x)=(\ln x)^{\alpha}\quad (x>e),\alpha>0,$$

$$\omega(x)=x^{\alpha}\quad (x>1),\alpha\in(0,1).$$

Для них, відповідно,

$$k(x)=\frac{\alpha x(\ln\ln x)^{\alpha-1}}{\ln x},\quad k(x)=\alpha x(\ln x)^{\alpha-1}\quad (x\to+\infty),$$

$$k(x)=(\alpha x)^{1/(1-\alpha)}\quad (x>1).$$

Тепер доведемо таке нове твердження про узагальнення співвідношення типу Бореля в класі $D^{+\infty}$.

Теорема 1. *Нехай* $F\in D^{+\infty}$, $\omega\in\mathrm{L}_3$. *Якщо існує додатна зростаюча до* $+\infty$ *при* $t\to+\infty$ *функція* $c(t)$ *така, що виконується умова*

$$\int_1^{\infty}\frac{k(c(t)\ln n_1(t))}{t^2}dt<+\infty,\ n_1(t)=\sum\nolimits_{\mu_n\le t}1\tag{8}$$

і існує невід'ємна функція $\alpha_1(t)$ така, що $\frac{\alpha_1(t)}{t}\downarrow\ (t\to+\infty)$ і

$$\ln n_1(t)=O(\alpha_1(t))\ (t\to+\infty),\ \int^{\infty}\frac{\alpha_1(t)}{t^2}dt<+\infty, \tag{9}$$

де $\mu_n=-\ln|a_n|$, $\frac{1}{x}\ln\mu(x,F)\in \mathrm{L}_0$, то при $x\to+\infty$ зовні деякої множини E скінченної логарифмічної міри виконується співвідношення

$$\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\to 0. \tag{10}$$

Зазначимо, що умови достатні для того, щоб виконувалось узагальнення співвідношення Бореля (10) встановлювались раніше в класі $D^+(\lambda)$ в [5] (подальшу бібліографію див також в [6]). Метод доведення, який при цьому використовується, відмінний від методу даної статті, який у свою чергу є близьким до методу, що використовується в [2, 6] для доведення подібних тверджень в класах абсолютно збіжних рядів Діріхле з монотонно зростаючою до $+\infty$ послідовністю показників.

Доведення Теореми 1. З умови (8) випливає, що Теорему В можна застосувати з функцією

$$v(t)=16t^{-2}k(c(t)\ln n_1(t)).$$

Покладаючи в (7) $n=0$ для всіх $x>0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри маємо

$$\ln\mu(x,F)\ge x\int_0^{\mu_\nu}\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\frac{k(c(4t)\ln n_1(4t))}{t}dt\ge x\int_{\mu_\nu/2}^{\mu_\nu}\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\frac{k(c(4t)\ln n_1(4t))}{t}dt\ge$$

$$\ge\frac{x}{\varphi(\mu_\nu)}c_1\left(\frac{\mu_\nu}{2}\right)k(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu))\ln 2\ge\frac{2x}{\varphi(\mu_\nu)}k(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)), \tag{11}$$

де $\varphi(t)$ – функція, обернена до функції $\Phi(x)=\ln\mu(x,F)$.

Умова (9) надає можливість використати Теорему В з функцією $v(t)=16t^{-2}\alpha_1(t)$. Згідно монотонності $\frac{t}{\varphi(t)}\uparrow$ і $\frac{\alpha_1(4t)}{t}\downarrow t\to+\infty$, для всіх $x>0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-x\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}\frac{\mu_n-t}{t^2}\alpha_1(4t)dt\right\}\le$$

$$\le\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-c_1(4\mu_\nu)\frac{\mu_\nu x}{\varphi(\mu_\nu)}\frac{\alpha_1(4\mu_n)}{\mu_n}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^2}dt\right\},$$

де $\nu=\nu(x,F)$ – центральний індекс. Нескладно обчислити, що $\max\left\{\frac{\ln x}{x}:x>0\right\}=\frac{1}{\mathrm{e}}$, тому для $\mu_n\ge 2\mu_\nu$ отримаємо

$$\frac{\mu_\nu}{\mu_n}\int_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n-t}{t^2}dt=1-\frac{\mu_\nu}{\mu_n}-\frac{\mu_\nu}{\mu_n}\ln\frac{\mu_n}{\mu_\nu}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{e}>0. \qquad (12)$$

З допомогою нерівності (12) при $x\to+\infty$ зовні множини скінченної логарифічної міри, отримаємо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\leq\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{\frac{-x\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{\varphi(\mu_\nu)}\alpha_1(4\mu_n)\right\}, \qquad (13)$$

де $\widetilde{c}_1(\mu_\nu)=c_1(4\mu_\nu)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)$. Зауважимо тепер, що для всіх досить великих x з нерівності $0\leq\ln\mu(x,F)=-\mu_\nu+x\lambda_\nu$ отримаємо $x\geq\frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu}$, а за означенням максимального члена для всіх n при $x=\varphi(\mu_n)$

$$\lambda_n\leq\frac{\ln\mu(x,F)+\mu_n}{x}=\frac{\Phi(x)+\mu_n}{x}=\frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)},$$

тому

$$x\geq\frac{1}{2}\varphi(\mu_\nu). \qquad (14)$$

Отже, з (11) і (13)при $x\to+\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри отримаємо

$$\ln\mu(x,F)\geq k(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)). \qquad (15)$$

Згідно першої частини умови (9) з деякою сталою $C>0$ отримаємо таку нерівність

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\frac{|a_n|e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)}\leq\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-\frac{\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{2}\alpha_1(4\mu_n)\right\}\leq$$
$$\leq\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-\frac{\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{2C}\ln n_1(4\mu_n)\right\}\leq$$
$$\leq\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}\exp\left\{-\frac{\widetilde{c}_1(\mu_\nu)}{2C}\ln(n+1)\right\}=o(1). \qquad (16)$$

З нерівності (16) послідовно при $x\to+\infty$ ($x\notin E$, E – скінченної логарифмічної міри) отримуємо

$$\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\leq$$
$$\leq\omega\Big(\sum_{\mu_n\leq2\mu_\nu}|a_n|e^{x\lambda_n}+\sum_{\mu_n>2\mu_\nu}|a_n|e^{x\lambda_n}\Big)-\omega(\ln\mu(x,F))\leq$$
$$\leq\omega(\ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1))+\ln\mu(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F)).$$

Звідси за теоремою Лагранжа про скінченні прирости, використовуючи при цьому монотонність похідної ω' і нерівність (15), при $x\to+\infty$ ($x\notin E$, E – скінченної логарифмічної міри) остаточно отримаємо

$$\omega(\ln M(x,F)) - \omega(\ln \mu(x,F)) \le \ln(n_1(2\mu_\nu) + o(1))\omega'(\ln \mu(x,F)) \le$$
$$\le \ln(n_1(2\mu_\nu) + o(1))\omega'\big(k\big(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)\big)\big) = \frac{\ln(n_1(2\mu_\nu) + o(1))}{c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)} = o(1).$$

Теорему 1 доведено.

Відзначимо, що на наш погляд умови (9) Теореми 1 відіграють тільки допоміжну роль і, тому є суто технічними. На це вказує і той факт, що їх можна замінити на таку умову

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\exists q > 0)(\exists u_0 \ge 0)(\forall u \ge u_0): \int_{2u}^{+\infty} e^{-\delta t/u^\varepsilon}\, dn_1(t) \le (n_1(2u))^q \qquad (17)$$

яка має дещо інший характер, де $n_1(t)$ – лічильна функція послідовності (μ_n), $\mu_n = -\ln|a_n|$.

Твердження. *Нехай $F \in D$. Якщо виконується умова і існує додатна зростаюча до $+\infty$ при $x \to +\infty$ функція $c(x)$ така, що виконується умова (8), а $\frac{1}{x}\ln \mu(x,F) \in \mathrm{L}_0$, то при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E_2 скінченної логарифмічної міри виконується співвідношення (10).*

Доведення Твердження. Застосуємо Теорему В з функціями

$$v(t) = \begin{cases} V_0 \cdot 4^{1+\varepsilon} t^{-1-2\varepsilon} & t \ge 1, \\ 0, \quad 0 \le t < 1, \end{cases} \qquad c_1(t) = t^\varepsilon \ (t \ge 0),$$

де $V_0 > 0$ – деяка стала, яку ми виберемо нижче. За монотонністю $\frac{t}{\varphi(t)} \uparrow$ та нерівністю (14) для всіх $x > 0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри послідовно отримаємо

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)} \le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-V_0 x \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{t}{\varphi(t)} \frac{\mu_n - t}{t^{2+\varepsilon}}\, dt\right\} \le$$
$$\le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-V_0 \frac{\mu_\nu x}{\varphi(\mu_\nu)} \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - t}{t^{2+\varepsilon}}\, dt\right\} \le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-V_0 \frac{\mu_\nu}{2} \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - t}{t^{2+\varepsilon}}\, dt\right\}. \qquad (18)$$

Проведемо наступні перетворення:

$$\mu_\nu \int_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{\mu_n - t}{t^{2+\varepsilon}}\, dt = \mu_\nu \Big(\frac{\mu_n}{(1+\varepsilon)\mu_\nu^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(1+\varepsilon)\mu_n^\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon\mu_n^\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon\mu_\nu^\varepsilon}\Big) =$$
$$= \frac{\mu_n}{(1+\varepsilon)\mu_\nu^\varepsilon}\Big(1 - \Big(\frac{\mu_\nu(1+\varepsilon)}{\varepsilon\mu_n} - \frac{\mu_\nu^{1+\varepsilon}}{\varepsilon\mu_n^{1+\varepsilon}}\Big)\Big) = \frac{\mu_n}{(1+\varepsilon)\mu_\nu^\varepsilon}\Big(1 - \frac{h(u)}{\varepsilon}\Big), \qquad (19)$$

де $h(t) = t(1+\varepsilon) - t^{1+\varepsilon}$. Оскільки для похідної функції виконується $h'(t) = (1+\varepsilon)(1 - t^\varepsilon) > 0$ $(t \in (0,1))$, то для $u \in [0, 1/2]$ маємо $0 = h(0) \le h(u) \le h(1/2) = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon - 2^{-\varepsilon})$.

Переконаємось, що $h_0 = 1 - \frac{h(1/2)}{\varepsilon} > 0.$ Справді, $h_0 = (2^{-\varepsilon} - (1-\varepsilon))/(2\varepsilon),$ але оскільки $y = 1 - x\ln 2$ – дотична до графіка $y = 2^{-x}$ у точці $x = 0$, то з опуклості графіка функції $y = 2^{-x}$ отримаємо $2^{-\varepsilon} > (1-\varepsilon\ln 2) > (1-\varepsilon)$ для будь-якого $\varepsilon > 0$. Тому, з (18) і (19) для всіх $x > 0$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри, вибираючи сталу $V_0 = \delta\frac{2(1+\varepsilon)}{h_0},$ за умовою (17), отримаємо

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n| e^{x\lambda_n}}{\mu(x,F)} \le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\left\{-V_0 h_0 \frac{\mu_n}{2(1+\varepsilon)\mu_\nu^\varepsilon}\right\} =$$
$$= \int_{2\mu_\nu}^{+\infty} \exp\{-V_0 h_0 \frac{t}{2(1+\varepsilon)\mu_\nu^\varepsilon}\} dn_1(t) = \int_{2\mu_\nu}^{+\infty} \exp\{-\frac{t\delta}{\mu_\nu^\varepsilon}\} dn_1(t) \le (n_1(2\mu_\nu))^q.$$

Звідси, подібно як і вище, за допомогою (15), при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри отримуємо

$$\omega(\ln M(x,F)) - \omega(\ln\mu(x,F)) \le$$
$$\le \omega(\ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q) + \ln\mu(x,F)) - \omega(\ln\mu(x,F)) \le$$
$$\le \ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q)\omega'(\ln\mu(x,F)) \le$$
$$\le \ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q)\omega'\big(k\big(c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)\big)\big) =$$
$$= \frac{\ln(n_1(2\mu_\nu) + (n_1(2\mu_\nu))^q)}{c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)} = o(1).$$

Твердження доведено.

Насамкінець висловимо такі припущення.

Припущення.

1. *Умови (9) у Теоремі 1 можна зняти.*

2. *Умова (8) є і необхідною для того, щоб співвідношення (10) виконувалось зовні деякої множини скінченної міри для кожної функції* $F \in D^{+\infty}$ *з фіксованою послідовністю* $(|a_n|)$.

Літератрура

1. Скаскив О.Б. О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / О.Б. Скаскив // Матем. заметки. – 1985. – Т.37, 1. – С. 41-47.
2. Скаскив О.Б. О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости / О.Б. Скаскив // Укр. мат. ж. – 1989. – Т.41, 11. – С.1532-1541.
3. Овчар І. Теорема типу Бореля для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками / І. Овчар, О. Скасків // Вісн. Львів. ун-ту., сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 232-242.

4. Овчар І. Теорема типу Вімана-Валірона для цілого ряду Діріхле з довільною комплексною послідовністю показників / І. Овчар, Я. Савчук, О. Скасків // Буковинський матем. журн. – 2016. – Т.4, 1-2. – С. 130-135.
5. Скаскив О.Б. О некоторых соотношениях между максимумом модуля и максимальным членом целого ряда Дирихле / О.Б. Скаскив // Матем. заметки. – 1999. – Т.66, 2. – С. 282-292.
6. Скасків О.Б. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів та цілі функції / О.Б. Скасків, А.І. Бандура. – Львів-Івано-Франк.: пп. Голіней, 2015. – 108 с.
7. Овчар І.Є. Теореми типу Вімана-Валірона для цілих рядів Діріхле з немонотонними показниками / І.Є. Овчар, О.Б. Скасків // Всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математ. аналізу”. Ворохта, 23-28.02.2011 р.: тези доповідей. – Івано-Франк., 2011. – С. 6-7.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2017 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

GENERALISATION OF BOREL'S RELATION FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH ARBITRARY POSITIVE EXPONENTS

I. Ye. Ovchar[1], Ya. I. Savchuk[1], O. B. Skaskiv[2]

[1]Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpatska Str., 15
[2]Ivan Franko National University of L'viv;
79000, Lviv, Universytetska Str., 1

For a entire Dirichlet series $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n e^{z\lambda_n}$ *with arbitrary unbounded sequence of exponents* $\{\lambda_n : n\ge 0\}\subset \mathbb{R}_+$, *conditions for* $\omega(\ln M(x,F))-\omega(\ln\mu(x,F))\to 0$ *as* $x\to+\infty$ $(x\notin E, \int_E d\ln x<+\infty)$, *where* $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|: y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n} : n\ge 0\}$ $(x\in\mathbb{R})$ *are established.*

Key words: *Dirichlet series, Borel's relation, maximal term, maximum of the modulus, logarithmic measure.*