Фізика і хімія твердого тіла

УДК 530.1

МОДЕЛЬ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ З ВИПАДКОВИМ ЧИСЛОМ КВАНТІВ ДІЇ

М. А. Рувінський
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: bruvinsky@gmail.com

На основі уявлення про існування фундаментального кванта дії $\hbar/2$ і наявності у частинки (або системи частинок) стохастичного числа квантів дії з неоднорідним розподілом Пуассона, після усереднення і введення постулату про пропорційність імовірності нульового значення числа квантів дії густині імовірності положення частинки, можна прийти до рівняння Шредінгера і співвідношення невизначеності Гейзенберга. З нової точки зору розглянуто принцип тотожності однакових мікрочастинок і сформульовано варіаційний принцип квантової механіки.

Ключові слова: *фундаментальний квант дії $\hbar/2$, стохастичне поле, неоднорідний розподіл Пуассона, рівняння Шредінгера, співвідношення невизначеності, принцип тотожності, варіаційний принцип.*

Вступ

Історичний нарис проблеми

У межах сучасної квантової фізики постійно робляться спроби по-новому осмислити глибоку відмінність між фізичним і філософським змістом класичної і квантової теорії [1-19]. Якщо зосередитись лише на інтерпретації хвильової функції Ψ, то можна вважати, що імовірнісну інтерпретацію нерелятивістської квантової механіки, вперше запропоновану Борном, підтверджено експериментом з достатньою точністю, і вона практично не викликає сумнівів. З цього приводу слід звернути увагу на рекомендацію Фейнмана [16]: “Існує декілька проблем, пов’язаних з інтерпретацією, над якими можна було б ще попрацювати… . Одна з них – це довести, що імовірнісна інтерпретація Ψ-функції є єдиною послідовною інтерпретацією цієї величини… . Було б цікаво показати, що не можна запропонувати жодного іншого послідовного тлумачення цієї величини…”. Остаточно це можна буде з’ясувати лише з подальшим виходом за межі сучасної квантової теорії, якого на даний час ще не існує. На наш погляд, залишаючись у межах квантової теорії, слід пов'язати існуючу інтерпретацію з універсальною фундаментальною сталою Планка, яка визначає квантову теорію (подібно до того, як теорію відносності, релятивістську механіку і електродинаміку визначає інша універсальна стала – c (швидкість світла у вакуумі), з якою пов'язана нова інтерпретація властивостей простору і часу, відмінна від ньютонівської).

Поширеною є думка про те, що класична теорія ймовірностей не може пояснити "інтерференцію ймовірностей" в квантовій механіці, яку яскраво ілюструють на прикладі ідеалізованого досліду з дифракції електронів на двох щілинах. В [13], наприклад, підкреслено, що квантовомеханічне означення густини ймовірності відрізняється від статистичного; в [14] визначено новий, квантовомеханічний, закон додавання ймовірностей, який містить, на відміну від класичного закону, інтерференційний доданок. Тому викликає подив, що центральне математичне поняття теорії ймовірностей виявляється непридатним для опису інтерферуючих альтернативних подій [16]. В роботі [19] автора показано, що при адекватному визначенні квантових подій інтерференція ймовірностей не суперечить класичній теоремі додавання ймовірностей.

Існують дві різні точки зору відносно того, чи описує хвильова функція стан квантового ансамблю мікрочастинок чи стан окремої мікрочастинки у відповідних макроскопічних умовах досліду. Перша точка зору була запропонована Мандельштамом [5] і розвинута Блохінцевим [6] і Нікольським [7]. Концепція квантових ансамблів [5-7] є дуже близькою до концепції класичного ансамблю Гіббса, добре відомого із статистичної термодинаміки. На відміну від класичного ансамблю, стан квантового ансамблю не визначається якоюсь імовірністю, а лише амплітудою імовірності, тобто хвильовою функцією для чистого ансамблю, а в більш загальних умовах – матрицею густини для змішаного ансамблю. Більшість фізиків [4, 8-19] підтримує другу точку зору, пов'язану з так званою "копенгагенською інтерпретацією", згідно з якою хвильова функція характеризує стан окремої мікрочастинки у заданих умовах. Остання концепція була розвинута, насамперед, в роботах Бора, Борна, Гейзенберга, Паулі, Фока та інших. Слід зауважити, що обидві концепції дають однакові практичні результати. Друга концепція здається більш природною, оскільки з самого початку не потребує для пояснення руху однієї мікрочастинки введення уявного ансамблю невзаємодіючих копій частинки.

Найбільш складною і досі нез'ясованою є відповідь на принципове питання: яка природа імовірнісної інтерпретації квантової механіки? В роботах Л. де Бройля [17] і Д. Бома була здійснена спроба повернутись до детермінізму класичної механіки в теорію із "схованими змінними" (невідомими дійсними положеннями частинок), для яких вводились відповідні імовірності. У найбільш розвинутій каузальній механіці Бома стан системи описується хвильовою функцією Ψ разом з дійсними положеннями частинок. Тому ця теорія визначається двома рівняннями еволюції: рівнянням Шредінгера для Ψ і рівнянням еволюції першого порядку (для схованих конфігураційних змінних). Статистичний опис в механіці Бома пов'язаний з невідомою дійсною конфігурацією частинок, як це прийнято в класичній статистичній механіці.

В подібних теоріях із схованими змінними повинні виконуватись нерівності Белла [4, 14]. Проте поставлені критичні експерименти не підтвердили виконання цих нерівностей для мікрочастинок, що свідчить на користь квантової механіки і відхиляє назавжди цілий клас локальних теорій із схованими змінними [4].

В роботі [20] густину імовірності було введено для опису статистичної поведінки уявного ансамблю [5, 6] нерелятивістських невзаємодіючих частинок, кожна з яких рухається за рівнянням Гамільтона-Якобі. Якщо для густини імовірності у згаданому ансамблі формально і невідомо чому виконується аналог закону Фур'є для теплопровідності з коефіцієнтом пропорційності $\hbar / 2m$, де $\hbar = h / 2\pi$, h – стала Планка, m – маса частинки, то можна прийти до рівняння Шредінгера.

В роботі [21] подано короткий огляд теорії зв'язку різних стохастичних процесів з квантовою механікою, причому основна увага приділяється стохастичним диференціальним рівнянням дифузійного типу з коефіцієнтом дифузії $\hbar / m$, коли можна отримати рівняння Шредінгера (Нельсон, 1966 р.) та рівняння Паулі при узагальненні рівняння на двокомпонентні спінори.

Робота [22] враховує давно відому формальну аналогію між рівнянням Шредінгера і рівнянням дифузії. Показано, що квантова динаміка може розглядатись як випадковий процес у фазовому просторі, але цей процес описується "псевдоімовірностями", тобто ймовірностями як додатного, так і від'ємного знаку. При цьому еволюція функції сумісного розподілу за координатою та імпульсом збігається з динамікою функції Вігнера квантової системи.

В додатку до книги [23] Гейлікмана сформульовані класичні моделі квантовомеханічних систем, для яких функція Лагранжа залежить не тільки від координат і швидкості, але і від прискорення. Після усереднення класичної динаміки за швидкозмінним рухом і формального введення як просторового масштабу довжини хвилі де Бройля можна отримати рівняння Шредінгера.

Все більшого поширення набуває фейнманівське формулювання [16] квантової механіки, яке ґрунтується на постулаті Дірака про квазікласичний зв'язок [14] пропагатора з функцією дії S частинки і введенні поняття безмежнократних функціональних інтегралів за траєкторіями. Слід мати на увазі [6, 13], що ці "траєкторії", строго кажучи, не можна вважати траєкторіями руху частинки в класичному розумінні, оскільки вони можуть не мати неперервних дотичних (похідних) в жодній точці. У зв'язку з підходом Фейнмана в [25] влучно зауважено, що "… дія S, якою прекрасною б вона не була, відігравала лише дуже незначну роль в класичній механіці, оскільки там потрібно було лише знати положення її екстремумів. У квантовій же механіці дія використовується у всіх точках. Звертаючись до минулого, як не замислитись над тим, чи задавали собі фізики минулого століття питання, чому так мало береться від поняття дії”.

В основу подальшого розгляду ми покладаємо факт існування фундаментального кванта дії, що вже явно використовувалось ще на зорі розвитку старої квантової теорії Зоммерфельдом (з напівкласичних позицій [1]) і у дослідженнях Румера [24] з 5-вимірної теорії поля (де квантування було проявом гіпотетичної періодичної залежності фізичних величин від п‘ятої координати – дії). Деякі попередні ідеї і результати на ранній і початковій стадії нашого розгляду викладено в [26-29].

В даній роботі при формулюванні нерелятивістської квантової механіки використовується метод Ланжевена [30, 31], при якому досліджуються певні стохастичні диференціальні рівняння для функцій дії.

1. Кванти дії, неоднорідний розподіл Пуассона і хвильове рівняння Шредінгера

Фундаментальним квантом дії вважаємо [26] величину $\hbar/2$, що збігається також з висновком нещодавньої роботи Суханова [32] з квантового узагальнення рівноважної статистичної термодинаміки. У відповідності з методом Ланжевена [30, 31] функцію дії S мікрочастинки представляємо у вигляді суми двох функцій:

$$S = S_C + S', \qquad (1)$$

де $S'(\vec{r},t)$ – стохастична дія, а $S_C(\vec{r},t)$ – дія, що має звичайний класичний аналог при $\hbar \to 0$. Зауважимо, що у фейнманівському формулюванні квантової механіки [16, 13] виділення доданку функціонала дії за класичною траєкторією розглядається як зручний методичний прийом для обчислення функціональних інтегралів. Стохастичну дію $S'(\vec{r},t)$, в якій виявляється існування скінченного кванта дії $\hbar/2$, визначимо так:

$$S'(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{2} N(\vec{r},t), \qquad (2)$$

де $N(\vec{r},t)$ приймає випадкові цілочисельні і невід’ємні значення, що дорівнюють числу квантів стохастичної дії мікрочастинки під час її руху у зовнішньому полі $V(\vec{r},t)$. Згідно (1), швидкість частинки з масою m дорівнює

$$\frac{\nabla S}{m} = \frac{\nabla S_C}{m} + \frac{\nabla S'}{m}. \qquad (3)$$

Нехай джерелом поля швидкостей $\nabla S_C / m$ і $\nabla S'/m$ частинки є частота зміни у неї числа квантів дії *N*:

$$div \frac{\nabla S_C}{m} = \left(\frac{dN}{dt} \right)_C, \qquad (4)$$

$$div \frac{\nabla S'}{m} = \frac{\delta N}{\delta t}, \qquad (5)$$

де $$\left(\frac{dN}{dt}\right)_C \equiv \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial \vec{r}}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_C, \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_C \equiv \frac{\nabla S_C}{m}; \tag{6}$$

$$\frac{\delta N}{\delta t} \equiv \left(\frac{dS_C}{dt} - L\right)/(\hbar/2), \tag{7}$$

$$\frac{dS_C}{dt} \equiv \frac{\partial S_C}{\partial t} + \frac{\partial S_C}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \frac{\nabla S}{m}; \tag{8}$$

$$L = \frac{(\nabla S)^2}{2m} - V \tag{9}$$

– функція Лагранжа.

З рівнянь (4) і (5) випливає, що вихід частинки з даної точки простору (або її прибуття) пов’язано із зростанням (або зменшенням) у неї числа квантів дії, і рух мікрочастинки значною мірою обумовлений стохастичною дією S'. Диференційованість випадкових функцій в (3)-(9) має певний математичний зміст з точки зору імовірнісної збіжності [31]. Якщо ж похідної в імовірнісному понятті не існує, то відповідні “диференціальні рівняння” мають лише деякий символічний зміст. Тоді в ланжевенівському підході цікавляться змістом кінцевого розв’язку або розв’язком усереднених рівнянь (подібно до того, як визначають функціональний інтеграл за відсутності похідних до фейнманівських “траєкторій” в кожній точці).

Після підстановки (1)-(3), (6)-(9) в (5) і (4) і усереднення за випадковим числом квантів дії N, враховуючи просторово-часову неоднорідність у зовнішньому полі $V(\vec{r},t)$, отримаємо систему рівнянь для усереднених функцій дій $\overline{S}_C(\vec{r},t)$ і $\overline{S}'(\vec{r},t) = -\frac{\hbar}{2}\overline{N}(\vec{r},t)$:

$$\frac{\partial \overline{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla \overline{S}_C)^2}{2m} - \frac{\hbar}{2} div \frac{\nabla \overline{S}'}{m} - \frac{(\nabla \overline{S}')^2}{2m} + V + \frac{\overline{(\nabla \sigma_C)^2}}{2m} - \frac{\overline{(\nabla \sigma')^2}}{2m} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla \overline{S}_C \nabla \overline{S}' + \frac{\hbar}{2} div \frac{\nabla \overline{S}_C}{m} + \frac{1}{m}\overline{\nabla \sigma_C \nabla \sigma'} = 0, \tag{11}$$

де $$\sigma_C = S_C - \overline{S}_C, \quad \sigma' = S' - \overline{S}', \tag{12}$$

($\overline{V} = V$). Дисперсія “класичної” швидкості $\nabla S_C / m$ повністю обумовлена дисперсією стохастичної швидкості $\nabla S'/m$, а їх випадкові значення статистично незалежні (за означенням (1)), тобто

$$\overline{(\nabla \sigma_C)^2} = \overline{(\nabla \sigma')^2}, \tag{13}$$

$$\overline{\nabla \sigma_C \nabla \sigma'} = 0. \tag{13'}$$

Тоді з (10) і (11) маємо замкнену систему рівнянь:

$$\frac{\partial \overline{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla \overline{S}_C)^2}{2m} - \frac{\hbar}{2} div \frac{\nabla \overline{S}'}{m} - \frac{(\nabla \overline{S}')^2}{2m} + V = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial S'}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla \overline{S}_C \nabla \overline{S}' + \frac{\hbar}{2} div \frac{\nabla \overline{S}_C}{m} = 0. \tag{15}$$

З розглянутої точки зору поняття просторової локалізації частинки в даний момент часу повинно бути пов’язано з випадковою подією наявності у частинки нульового числа квантів дії $N = 0$. При $N \geq 1$ в даній точці простору виникає делокалізованість і виявляється невизначеність місцеположення частинки, що можна тлумачити, як появу “віртуального стану” частинки. Отже, вводимо постулат: густина імовірності $w(\vec{r},t)$ знаходження частинки у просторово-часовій точці $(\vec{r},t)$ пропорційна імовірності $P_0(\vec{r},t)$ нульового значення числа квантів дії у частинки в даній точці, тобто

$$w(\vec{r},t) = CP_0(\vec{r},t), \tag{16}$$

де C – константа, яка визначається з умови нормування $w(\vec{r},t)$.

Якщо для випадкового числа N квантів дії частинки існують неоднорідний розподіл Пуассона [31] (під час руху частинки у зовнішньому полі $V(\vec{r},t)$), то імовірність

$$P_N(\vec{r},t) = \frac{(\bar{N})^N}{N!} e^{-\bar{N}}. \tag{17}$$

При $N = 0$

$$P_0(\vec{r},t) = e^{-\bar{N}(\vec{r},t)}. \tag{18}$$

При $N = 1$

$$P_1(\vec{r},t) = -P_0(\vec{r},t) ln(P_0(\vec{r},t)) = -[w(\vec{r},t)/C] ln[w(\vec{r},t)/C]. \tag{19}$$

Згідно з (17) і (16)

$$P_N(\vec{r},t) = \frac{(-1)^N}{N!}[w(\vec{r},t)/C]\{ln[w(\vec{r},t)/C]\}^N. \tag{20}$$

Бачимо, що функція $P_1(\vec{r},t)$ (19) є “першим моментом” міри невизначеності місцеположення частинки в даній просторово-часовій точці $(\vec{r},t)$ (певний аналог поняття густини ентропії в статистичній фізиці [33]).

З (2), (18) і (16) матимемо

$$\bar{S}' = \frac{\hbar}{2} ln[w(\vec{r},t)/C]. \tag{21}$$

Після підстановки (21) в (14) і (15) одержимо:

$$\frac{\partial \bar{S}_C}{\partial t} + \frac{(\nabla \bar{S}_C)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 \sqrt{w}}{\sqrt{w}} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + div\, w \frac{\nabla \bar{S}_C}{m} = 0. \tag{23}$$

Рівняння (22) і (23), як відомо [15], еквівалентні нерелятивістському рівнянню Шредінгера для хвильової функції частинки

$$\Psi = \sqrt{w}\, exp(i\bar{S}_C/\hbar), \tag{24}$$

а рівняння (23) є звичайним квантовомеханічним рівнянням неперервності. В рівнянні (22) останній член

$$V_{кв}(\vec{r},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2\sqrt{w}}{\sqrt{w}} \tag{25}$$

часто формально трактують [1] як "квантовий потенціал" в узагальненому рівнянні Гамільтона-Якобі (на відміну від класичного потенціалу *V*). Зауважимо, що основне рівняння нерелятивістської квантової механіки виявилось пов'язаним з неоднорідним розподілом Пуассона для квантів дії мікрочастинки.

Розглянуті міркування легко узагальнюються на випадок системи частинок. Замість (2)-(6), (8), (9) тепер будемо мати (формули (1), (7) зберігають свій вигляд):

$$S'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t) = -\frac{\hbar}{2}N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t), \tag{26}$$

$$\frac{\nabla_i S}{m_i} = \frac{\nabla_i S_C}{m_i} + \frac{\nabla_i S'}{m_i}, \tag{27}$$

$$\sum_{i=1}^{n} div_i \frac{\nabla_i S_C}{m_i} = \left(\frac{dN}{dt}\right)_C, \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{n} div_i \frac{\nabla_i S'}{m_i} = \frac{\delta N}{\delta t}, \tag{29}$$

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_C \equiv \frac{\partial N}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial N}{\partial \vec{r}_i}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_C, \quad \left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)_C \equiv \frac{\nabla_i S_C}{m_i}; \tag{30}$$

$$\frac{dS_C}{dt} \equiv \frac{\partial S_C}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S_C}{\partial \vec{r}_i}\frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad \frac{d\vec{r}_i}{dt} \equiv \frac{\nabla_i S}{m_i}; \tag{31}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n}\frac{(\nabla_i S)^2}{2m_i} - V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t), \tag{32}$$

де S, S_C, S', N, L і V – вже відносяться до системи n частинок. Крім зовнішнього поля, $V(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ містить також і міжчастинкову взаємодію; $N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ є випадковим числом квантів стохастичної дії $S'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ (26) всієї системи; m_i – маса і-ої частинки. Певна дійсна конфігурація системи частинок пов'язана лише з випадковим значенням $N = 0$ (при $N \geq 1$ маємо "віртуальні конфігурації"). Подібно до одночастинкового випадку після відповідного усереднення (28), (29) за умов

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{(\nabla_i\sigma_C)^2}}{2m_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{(\nabla_i\sigma')^2}}{2m_i}, \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\overline{\nabla_i\sigma_C\nabla_i\sigma'} = 0 \tag{34}$$

(σ_C і σ' визначаються формулами (12)), узагальнення постулату (16) для всієї системи і підстановки

$$\bar{S}'(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t) = \frac{\hbar}{2}ln[w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)/A] \tag{35}$$

отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \bar{S}_C}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\nabla_i \bar{S}_C)^2}{2m_i}+V-\sum_{i=1}^{n}\frac{\hbar^2}{2m_i}\frac{\nabla_i^2\sqrt{w}}{\sqrt{w}}=0\,, \qquad (36)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} div_i\; w\frac{\nabla_i \bar{S}_C}{m_i}=0\,, \qquad (37)$$

де $w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ – густина імовірності певної конфігурації системи (A – стала нормування w). З рівняння (36) випливає рівняння Шредінгера для хвильової функції системи частинок

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)=[\,w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)]^{1/2}\,exp\left[\frac{i}{\hbar}\overline{S_C}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)\right], \qquad (38)$$

а (37) є узагальненням рівняння неперервності на випадок системи частинок [6, 12]. Отже, рівняння Шредінгера системи частинок пов‘язано з пуассонівським характером стохастичної дії S' всієї системи. У розглянутій трактовці не виникають труднощі, властиві стандартним моделям квантових систем в абстрактному конфігураційному просторі.

2. Співвідношення невизначеності

Виявляється, що з рівності (13) дисперсій двох швидкостей частинки випливає співвідношення невизначеності Гейзенберга для координати та імпульсу. Оскільки густина імовірності знаходження частинки у просторово-часовій точці $(\vec{r},t)$ визначається згідно (16), (18) середнім числом $\bar{N}(\vec{r},t)$ квантів дії мікрочастинки у цій точці

$$w(\vec{r},t)=Ce^{-\bar{N}(\vec{r},t)}\,, \qquad (39)$$

то ліва і права частини в (13) залежать від випадкових місцеположень частинки. Проведемо усереднення (13) за просторовим розподілом (39) у довільний фіксований момент часу t, яке позначимо кутовими дужками <...>:

$$\left\langle\overline{(\nabla\sigma_C)^2}\right\rangle=\left\langle\overline{(\nabla\sigma')^2}\right\rangle. \qquad (40)$$

Для одновимірного руху вздовж осі x, враховуючи (12), (2) і (39) в (40), отримаємо

$$\left\langle\overline{(\Delta p_x)^2}\right\rangle=\frac{\hbar^2}{2}\left\langle\overline{\left(\frac{d\Delta N}{dx}\right)^2}\right\rangle, \qquad (41)$$

де $\left\langle\overline{(\Delta p_x)^2}\right\rangle$ – дисперсія складової імпульсу p_x, $\Delta N\equiv N-\bar{N}$. Визначимо середнє квадратичне відхилення координати $\sqrt{\left\langle\overline{(\Delta x)^2}\right\rangle}$ за лінійною дисперсією [6, 13] числа квантів дії $\sqrt{2\left\langle\overline{(\Delta N)^2}\right\rangle}$, тобто

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} = \frac{\sqrt{2\left\langle \overline{(\Delta N)^2} \right\rangle}}{\sqrt{\left\langle \overline{\left(\frac{d\Delta N}{dx}\right)^2} \right\rangle}} . \tag{42}$$

Тоді, як легко бачити з (41) і (42), добуток невизначеностей імпульсу і координати дорівнює

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2\left\langle \overline{(\Delta N)^2} \right\rangle} . \tag{43}$$

Згідно з розподілом Пуассона [30,31]

$$\overline{(\Delta N)^2} = \overline{N} , \tag{44}$$

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{2\left\langle \overline{N} \right\rangle} , \tag{45}$$

де

$$\left\langle \overline{N} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{N}(x,t) w(x,t) dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{N}(x,t) e^{-\overline{N}(x,t)} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\overline{N}(x,t)} dx} . \tag{46}$$

Оцінку (46) проведено, виходячи з того, що найбільш імовірне положення частинки відповідає мінімальному середньому числу квантів дії $\overline{N}(x_0,t)$ у частинки в даній точці:

$$\overline{N}(x,t) \approx \overline{N}(x_0,t) + \frac{(x-x_0)^2}{2} \left. \frac{d^2\overline{N}(x,t)}{dx^2} \right|_{x=x_0} , \tag{47}$$

$$\overline{N}(x_0,t) \geq 0 , \quad \left. \frac{d^2\overline{N}(x,t)}{dx^2} \right|_{x=x_0} > 0 \tag{48}$$

і домінуючий внесок в (46) пов‘язаний з околом точки x_0. Тоді

$$\left\langle \overline{N}(x,t) \right\rangle = \overline{N}(x_0,t) + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} . \tag{49}$$

З (45) і (49) маємо відоме співвідношення невизначеності Гейзенберга

$$\sqrt{\left\langle \overline{(\Delta p_x)^2} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \overline{(\Delta x)^2} \right\rangle} \geq \frac{\hbar}{2} . \tag{50}$$

яке свідчить про відсутність поняття траєкторії мікрочастинки. В розглянутому підході до квантової механіки рівняння Шредінгера і співвідношення невизначеності Гейзенберга "генетично" пов‘язані.

3. Принцип тотожності однакових частинок

У системі багатьох частинок густина імовірності певної конфігурації системи визначається середнім числом квантів стохастичної дії

$\bar{N}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)$ всієї системи (див. (26), (35)):

$$w(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)=A\,exp[-\bar{N}(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_n,t)]\ . \qquad (51)$$

Хвильова функція системи частинок визначається формулою (38). Принцип тотожності однакових частинок набуває тепер такого змісту:

Середнє число квантів стохастичної дії $\bar{N}(x_1,x_2,...,x_n,t)$ системи однакових частинок не залежить від перестановки частинок, де x_i – сукупність просторових і спінових змінних i-ої частинки.

Оскільки $\bar{N}(x_1,x_2,...,x_n,t)$ визначає густину імовірності $w(x_1,x_2,...,x_n,t)$ певної конфігурації системи однакових частинок, то з переставної інваріантності $\bar{N}(x_1,x_2,...,x_n,t)$ випливає переставна інваріантність $w(x_1,x_2,...,x_n,t)$. На останньому ґрунтується доведення Жирардо (M. D. Girardeau, Phys. Rev. B 139, 500 (1965); J. Math. Phys. 10, 1302 (1969)) принципу симетрії для хвильових функцій системи тотожних частинок з висновком про одномірність незвідних представлень групи перестановок [34, 35]. Звідси, як відомо [12-14], і випливає можливість реалізації в природі лише станів з симетричними і антисиметричними хвильовими функціями. Що стосується загального припущення про одномірність незвідних представлень групи перестановок, то в роботі [35] було показано, що опис стану однакових частинок багатомірними незвідними представленнями суперечить поняттю тотожності частинок.

Отже, уявлення про фундаментальні кванти дії узгоджуються з принципом тотожності однакових частинок.

4. Варіаційний принцип

Рівняння (14) і (15) для $\bar{S}_C$ і $\bar{S}'$, які разом з постулатом про зв‘язок густини імовірності $w(\vec{r},t)$ з неоднорідним розподілом Пуассона $P_0(\vec{r},t)$ (згідно (16), (18), (21), (24)) приводять до рівняння Шредінгера, можна встановити також на основі варіаційного принципу, пов‘язаного із функціоналом, що являє собою середнє від різниці частот зміни числа $\bar{N}=-2\bar{S}'/\hbar$ квантів дії мікрочастинки:

$$I=\left\langle \frac{d\bar{N}}{dt}-\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_C-\frac{\delta\bar{N}}{\delta t}\right\rangle = C\int\left[\frac{d\bar{N}}{dt}-\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_C-\frac{\delta\bar{N}}{\delta t}\right]e^{-\bar{N}}d\vec{r}\ , \qquad (52)$$

де $\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_C$ визначається формулою (6) при заміні $N\to\bar{N}$, $S_C\to\bar{S}_C$; $\frac{\delta\bar{N}}{\delta t}$ – формулами (7)-(9), (1) при $N\to\bar{N}$, $S_C\to\bar{S}_C$, $S\to\bar{S}$; $\frac{d\bar{N}}{dt}$ – формулою типу (8), де $S_C\to\bar{N}$, $S\to\bar{S}$. Тоді функціонал

$$I=\frac{2C}{\hbar}\int F\left(\frac{\partial\bar{S}_C}{\partial t},\nabla\bar{S}_C,\bar{S}',\nabla\bar{S}'\right)d\vec{r}\ , \qquad (53)$$

$$F\left(\frac{\partial\overline{S}_C}{\partial t},\nabla\overline{S}_C,\overline{S}',\nabla\overline{S}'\right)=-\left[\frac{\partial\overline{S}_C}{\partial t}+\frac{(\nabla\overline{S}_C)^2}{2m}+\frac{(\nabla\overline{S}')^2}{2m}+V\right]e^{2\overline{S}'/\hbar}. \quad (54)$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа [36] мають вигляд:

$$\frac{\partial F}{\partial\overline{S}_C}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial(\partial\overline{S}_C/\partial t)}-\nabla\frac{\partial F}{\partial(\nabla\overline{S}_C)}=0, \quad (55)$$

$$\frac{\partial F}{\partial\overline{S}'}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial(\partial\overline{S}'/\partial t)}-\nabla\frac{\partial F}{\partial(\nabla\overline{S}')}=0. \quad (56)$$

Використовуючи (54)-(56), отримаємо, що рівняння (55) збігається з рівнянням (15), а рівняння (56) – з рівнянням (14). Таким чином, рівняння Шредінгера можна отримати з варіаційного принципу, який накладає певні обмеження на частотні зміни кількості квантів дії мікрочастинок.

Висновки

У межах ланжевенівського підходу до нерелятивістської квантової механіки вказано на можливий зв‘язок хвильового рівняння Шредінгера, співвідношень невизначеності Гейзенберга і принципу тотожності із стохастичним полем, пов‘язаним з існуванням у мікросвіті фундаментальних квантів дії $\hbar/2$ з неоднорідним розподілом Пуассона. Сформульовано квантовий постулат про густину імовірності положення частинок і подано іншу версію варіаційного принципу квантової механіки.

Література

1. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики / М. Джеммер. – М.: Наука, 1985. – 380 с.
2. Кадомцев Б.Б. Динамика и информация / Б.Б. Кадомцев. – М.: УФН, 1999. – 400 с.
3. Поппер К.Р. Квантовая теория и раскол в физике / К.Р. Поппер. – М.: Логос, 1998. – 192 с.
4. Боум А. Квантовая механика: основы и приложения / А. Боум. – М.: Мир, 1990. – 720 с.
5. Мандельштам Л.И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике / Л.И. Мандельштам. – М.: Наука, 1972.–438 с.
6. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики / Д.И. Блохинцев. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
7. Никольский К.В. Квантовые процессы / К.В. Никольский. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1940. – 348 с.
8. Бом Д. Квантовая теория / Д. Бом. – М.: Наука, 1965. – 727 с.
9. Фок В.А. Начала квантовой механики / В.А. Фок. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
10. Ландау Л.Д. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1974. – 752 с.
11. Давыдов А.С. Квантовая механика / А.С. Давыдов. – М.: Наука, 1973. – 703 с.
12. Глауберман А.Ю. Квантова механіка / А.Ю. Глауберман. – Львів:

ЛДУ, 1962. – 506 с.
13. Юхновський І.Р. Основи квантової механіки / І.Р. Юхновський. – К.: Либідь, 2002. – 390 с.
14. Вакарчук І.О. Квантова механіка / І.О. Вакарчук. – Львів: ЛНУ, 2004. – 784 с.
15. Мессиа А. Квантовая механика / А. Мессиа. – М.: Наука, 1978. – Т.1. – 480 с.
16. Фейнман Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям / Р. Фейнман, А. Хибс. – М.: Мир, 1968. – 382 с.
17. Бройль де Л. Соотношение неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. (С критическими замечаниями автора) / Л. де Бройль. – М.: Мир, 1986. – 344 с.
18. Курс загальної фізики. Квантова фізика атомів, молекул і конденсованих середовищ / М.А. Рувінський, Б.К. Остафійчук, М.О. Галущак, Д.М. Фреїк, М.М. Яцура. – К. – Ів.-Франківськ: Плай, 1998. – 520 с.
19. Рувінський М.А. Про правило додавання ймовірностей у квантовій механіці / М.А.Рувінський // Фізика і хімія твердого тіла. – 2005. – Т.6. – №4. – С. 708-711.
20. Ioannidou H. A new derivation of the Schrödinger equation / H. Ioannidou // Lett. Nuovo cim. – 1982. – V.34, №15. – P. 453-458.
21. Jona-Lasinio G. Stochastic processes and quantum mechanics / G. Jona-Lasinio // Asterisque. – 1985. – №10. – P. 203-216.
22. Рубин П.Л. Квантовая динамика как случайный процесс в фазовом пространстве / П.Л. Рубин // ТМФ. – 1997. – Т.110. – №3. – С. 454-458.
23. Гейликман Б.Т. Исследования по физике низких температур / Б.Т. Гейликман. – М.: АИ, 1979. – 216 с.
24. Румер Ю.Б. Исследования по 5-оптике / Ю.Б. Румер. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 152 с.
25. Рамон П. Теория поля. Современный вводный курс / П. Рамон. – М.: Мир, 1984. – 336 с.
26. Рувинский М.А. Нерелятивистское уравнение Шредингера и двухскоростная пуассоновская стохастическая механика / М.А. Рувинский // Изв. вузов. Физика. – 1986. – №1. – С. 125; Деп. в ВИНИТИ 25.07.85, №5429-85.
27. Рувінський М.А. Кванти дії, розподіл Пуассона і нерелятивістська квантова механіка / М.А. Рувінський // Фізика і хімія твердих тіл. – 1994. – №2. – С. 120-128.
28. Рувінський М.А. Співвідношення невизначеності і принцип тотожності у новому формулюванні квантової механіки / М.А. Рувінський // Вісник Прикарпатського університету. Природничо-математичні науки. – 1995. – В.1. – С.58-63.
29. Рувінський М.А. Про кванти дії, спін електрона, рівняння Паулі і Клейна-Гордона / М.А. Рувінський // Вісник Прикарпатського університету. Природничо-математичні науки. – 1996. – В.2. – С. 91-101.
30. Киттель Ч. Элементарная статистическая физика / Ч. Киттель. – М.: ИЛ, 1960. – 279 с.

31. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Ч.1. Случайные процессы / С.М. Рытов. – М.: Наука, 1976. – 495 с.
32. Суханов А.Д. К квантовому обобщению равновесной статистической термодинамики. Эффективные макропараметры / А.Д. Суханов // ТМФ. – 2008. – Т.154. – №1. – С. 183-196.
33. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика / Ю.Л. Климонтович. – М.: Наука, 1982. – 608 с.
34. Каплан И.Г. Принцип запрета и неразличимость тождественных частиц в квантовой механике / И.Г. Каплан // УФН. – 1975. – Т.117. – №4. – С. 691-704.
35. Каплан И.Г. Постулат симметрии и его обоснование в рамках квантовой механики / И.Г. Каплан // Теоретико-групповые методы в физике. Т.1. Труды международного семинара. – М.: Наука, 1980. – С. 175-181.
36. Мэтьюз Дж. Математические методы физики / Дж. Мэтьюз, Р. Уокер. – М.: АИ, 1972. – 400 с.

Стаття поступила в редакційну колегію 12.10.2009 р.
*Рекомендовано до друку д.х.н., професором **Фреїком Д.М.***

THE MODEL OF QUANTUM MECHANICS WITH RANDOM NUMBER OF ACTION QUANTA

M. A. Ruvinskii
PreCarpathian National University by V.Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko street, 57;
e-mail: bruvinsky@gmail.com.

On the basis of idea about existance of the fundamental quantum of action $\hbar/2$ and availability of the stochastic number of action quanta of particle (or system of particles) with the non-uniform Poisson distribution, after the averaging and introduction of the postulate about proportionality of the probability of the zero value of the number of action quanta to the probability density of particle's position, it may come to the Schrodinger equation and the uncertainty Heisenberg's relation. The identity principle of the same microparticles is considered and the variational principle of quantum mechanics is formulated from the new point of view.

Key words: *fundamental quantum of action $\hbar/2$, stochastic field, non-uniform Poisson distribution, Schrödinger's equation, uncertainty relation, identity principle, variational principle.*