

УДК 519.63

**РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ
З ВИКОРИСТАННЯМ АЛЬТЕРНАТИВНИХ МОДЕЛЕЙ****С. О. Камаєва, М. Г. Федоришин**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4-21-27; e-mail: Svitlana.Kamaeva@gmail.com*

Дана робота присвячена розв'язуванню задачі про кручення призматичних стрижнів з прямокутним перерізом. При цьому розглядається можливість застосування методу скінченних елементів з використанням не лише стандартних моделей, а й альтернативних, побудованих засобами геометричного моделювання. Аналізується точність розрахунків в залежності від порядку та кількості елементів, на які розбивається поперечний переріз. Розв'язується обернена задача з метою отримання оптимізованих моделей.

Ключові слова: *функція напружень, крутний момент, максимальне дотичне напруження, модель, серендиповий елемент.*

Постановка проблеми. На сьогоднішній день у прикладних дослідженнях все частіше використовуються наближені методи. Це пояснюється, насамперед тим, що знайти аналітичний розв'язок буває надто важко або й взагалі неможливо. Одним з найбільш популярних обчислювальних методів є метод скінченних елементів (МСЕ), який успішно застосовується під час розв'язування різних інженерних задач. Проте проблема удосконалення схем МСЕ з метою зменшення витрат на їх реалізацію є актуальною не лише в Україні, а й за її межами.

Аналіз попередніх публікацій. Поява МСЕ пов'язана з розв'язуванням задач космічних досліджень (1950 р.). Вперше він був опублікований в роботі М. Тернера, Р. Клафа, Х. Мартіна і Л. Топпа [1], яка сприяла появі нових робіт із застосуванням МСЕ до задач будівельної механіки, гідро- і тепломеханіки та ін [2]. З появою продуктивних ЕОМ вдалось прискорити проведення надскладних обчислень та отримати більш точні розрахунки. Проте робота над вдосконаленням універсальних обчислювальних програм продовжується і понині.

Ціль статті. На прикладі задачі про кручення призматичних стрижнів з прямокутним перерізом реалізувати схеми МСЕ з використанням стандартних і альтернативних моделей та розглянути можливість їх оптимізації.

Основна частина. Дана робота присвячена розв'язуванню задач про кручення призматичних стрижнів з прямокутним перерізом $2a \times 2b$ (рис. 1). Як відомо, ці задачі утворюють важливий розділ теорії пружності, а концепції, що використовуються при дослідженні кручення стри-

жнів некругового перерізу, однаково корисні як для механічних задач, так і для задач теорії поля.

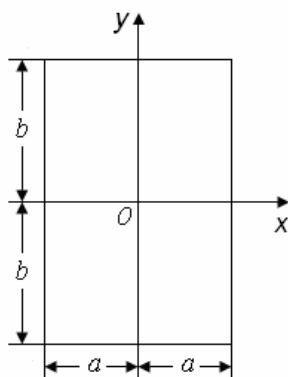


Рис. 1. Поперечний переріз стрижня

Математичною моделлю такої задачі є рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta,$$

де φ – функція напружень (функція Прандтля), G – модуль зсуву матеріалу, θ – кут закручування на одиницю довжини, з крайовою умовою:

$$\varphi(x, y)|_{\Gamma} = 0,$$

де Γ – контур поперечного перерізу.

Спочатку розглянемо частинний випадок, коли поперечний переріз – квадратний. За допомогою МСЕ знайдемо максимальне дотичне напруження τ_{max} та крутний момент M_t і порівняємо з результатами, отриманими аналітично [3]. При цьому аналізуватимемо точність розрахунків в залежності від кількості та порядку серендипових елементів, на які будемо розбивати переріз, з використанням стандартних та альтернативних моделей.

Дослід 1. Покриємо поперечний переріз стрижня 4-ма білінійними елементами (рис. 2а). В силу симетрії розглянемо його четвертину (рис. 2б).

Наведемо базисні функції білінійного елемента. Зазвичай, даний елемент розглядається в нормальних координатах, коли $|\xi| \leq 1$ та $|\eta| \leq 1$, тому для вузла 1 маємо [2]:

$$N_1(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y).$$

Решта функцій отримується з даної шляхом циклічної перестановки координат. (При розгляді довільного прямокутника $2a \times 2b$ замість ξ, η використовуються ξ/a та η/b).

Для переходу до глобальної системи координат Oxy зробимо заміну:

$$x = \xi + \frac{a}{2}, \quad y = \eta + \frac{a}{2}.$$

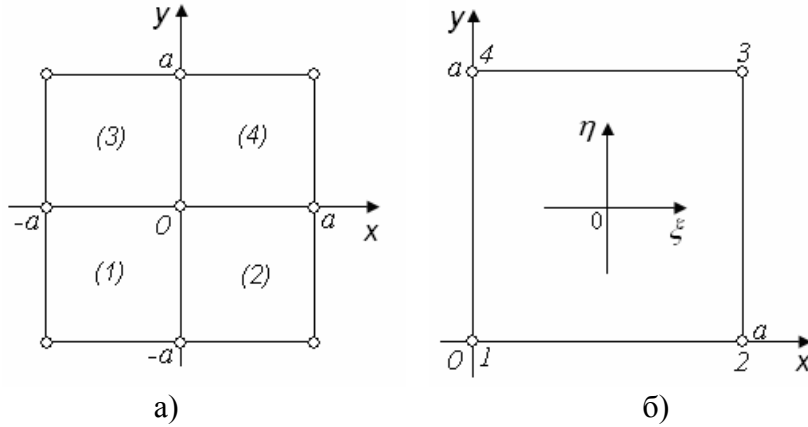


Рис. 2. Покриття поперечного перерізу чотирма білінійними СЕ

Поставлену задачу зручно розв’язувати в варіаційній постановці, яка пов’язана з розглядом функціоналу

$$\chi = \int_V \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2G\theta\varphi \right] dV.$$

Мінімізація χ за набором вузлових значень шуканої функції $\{\Phi\}$ призводить до системи лінійних рівнянь

$$\sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV \{ \hat{O} \} = \sum_{e=1}^E \int_{V^{(e)}} [N^{(e)}]^T (2G\theta) dV,$$

де $[N^{(e)}]$ – функції форми довільного елемента (e) , $[B^{(e)}]$ – матриця градієнтів, $[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Розв’язавши СЛАР відносно $\{\Phi\}$, знайдемо

$$\varphi^{(e)} = [N^{(e)}] \{\Phi\} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & N_2^{(e)} & \dots & N_r^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_r \end{Bmatrix},$$

де r – число вузлів елемента.

Як відомо, крутний момент (геометрична жорсткість) шукається за формулою:

$$M_t = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(x, y) dx dy, \tag{1}$$

де a, b – половини сторін прямокутного перерізу.

В [3] приводиться і спрощена формула для визначення M_t :

$$M_t = k_1 G\theta (2a)^3 2b, \tag{2}$$

де k_1 – числовий множник, що залежить від величини відношення b/a .

Компоненти напруження шукаються за допомогою операції диференціювання:

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (3)$$

Якщо $b = a$, то максимальне дотичне напруження, що відповідає максимальному нахилу мембрани [3], діє в середніх точках сторін квадрата. Якщо ж $b > a$, то – в середніх точках довших сторін $x = \pm a$ прямокутника.

В [3] наводиться спрощена формула для визначення τ_{max} :

$$\tau_{max} = k2G\theta a, \quad (4)$$

де k – числовий множник, що залежить від величини відношення b/a .

Маючи аналітичний вираз для $\varphi(x, y)$ знаходимо крутний момент та максимальне дотичне напруження за формулами (1) і (3) відповідно та порівнюємо отримані результати з результатами за формулами (2) та (4). Відносні похибки для τ_{max} та M_t становлять відповідно 44,444 % та 33,321 %. Зрозуміло, що такої кількості елементів недостатньо для отримання прийнятної точності, тому ми покрили поперечний переріз 16-ма білінійними елементами, в результаті чого відносні похибки для τ_{max} та M_t набули значень відповідно 28,571 % та 9,031 %. Очевидно, що точність буде покращуватись із збільшенням елементів, але це призведе до збільшення обсягу роботи та ускладнення обчислювального процесу.

Дослід 2. Спробуємо замість білінійних використати біквадратичні елементи (8 вузлів). Покриємо поперечний переріз одним 8-вузловим елементом (рис. 3). В даному випадку зручно зробити заміну

$$\varphi(x, y) = U(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta, \quad (5)$$

завдяки якій переходимо від рівняння Пуассона до рівняння Лапласа

$$\Delta U(x, y) = 0$$

з неоднорідною умовою Діріхле на границі

$$U(x, y)|_r = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)G\theta.$$

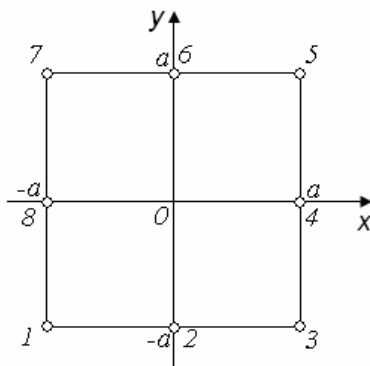


Рис. 3. Покриття поперечного перерізу одним SE

Функція всередині елемента визначається за формулою, що являє собою математичне сподівання:

$$U = \sum_{i=1}^{12} N_i \cdot U_i,$$

де U_i – значення функції в граничних точках, N_i – базисні функції.

Знайшовши $U(x, y)$, отримуємо $\varphi(x, y)$ за формулою (5). Відносні похибки розрахунків τ_{max} та M_t за (1) і (3) в порівнянні з результатами за (2) і (4) для стандартної [2] та альтернативних моделей [4] наведені в табл. 1. В цій же таблиці наведено порівняльний аналіз точності розрахунків при покритті поперечного перерізу 4-ма та 16-ма біквадратичними SSE.

Табл. 1. Відносні похибки для τ_{max} та M_t , [%]

Модель	1 SSE		4-и SSE		16 SSE	
	τ_{max}	M_t	τ_{max}	M_t	τ_{max}	M_t
$N_1^{(1)}(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)(-1-x-y),$ $N_2^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y)$ (стандартна)	100	100	2,37	2,11	2,42	0,18
$N_1^{(2)}(x, y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)xy,$ $N_2^{(2)}(x, y) = \frac{1}{4}(1-x^2)(1-y)^2$	25,92	20,97	2,98	18,56	3,86	3,71
$N_1^{(3)}(x, y) = \frac{1}{20}(1-x)(1-y)(1+x+y+6xy)$ $N_2^{(3)}(x, y) = \frac{1}{10}(1-x^2)(1-y)(2-3y)$ (гармонічна за критерієм Привалова)	11,11	5,17	6,06	24	0,8	5,81
$N_1^{(4)}(x, y) = \frac{1}{12}(1-x)(1-y)(1+x+y+4xy)$ $N_2^{(4)}(x, y) = \frac{1}{6}(1-x^2)(1-y)(1-2y)$ (гармонічна за критерієм Кьобе)	1,23	5,37	13,7	27	5,35	6,93

З таблиці видно, що із збільшенням кількості елементів однією з найкращих виявилась стандартна модель. Проте альтернативних моделей є безліч і тому можна припустити, що існує така модель, що забезпечує прийнятну точність розрахунків за менших витрат. Розв'язуючи

обернену задачу з врахуванням точного значення для τ_{max} та використовуючи процедуру «зважування» моделей

$$N_i^{(k)}(\xi, \eta) = \alpha N_i^{(1)}(\xi, \eta) + (1 - \alpha) N_i^{(2)}(\xi, \eta), \quad (i = \overline{1, 8}), \quad k = 3, 4, \dots$$

було отримано аналітичну залежність відносної похибки розрахунків δ від параметру α . Графік цієї залежності зображено на рис. 4.

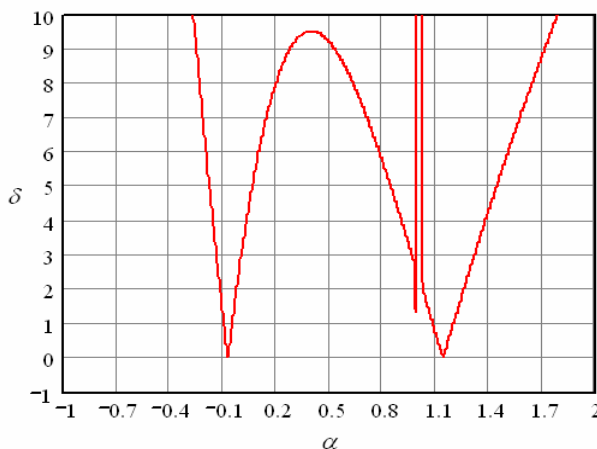


Рис. 4. Відносна похибка $\delta(\alpha)$ при зважуванні моделей

Виявилось, що існує два значення цього параметра, за яких отримані «зважені» моделі забезпечують точний результат по τ_{max} :

$$\alpha_1 = 1.138 \text{ та } \alpha_2 = -0.076.$$

Базисні функції моделі, отриманої зважуванням з коефіцієнтом α_1 :

$$N_1^{(5)}(x, y) = \frac{1}{2000} (1-x)(1-y)(-569 - 569x - 569y - 69xy);$$

$$N_2^{(5)}(x, y) = \frac{1}{2000} (1-x^2)(1-y)(1069 + 69y).$$

Базисні функції моделі, отриманої зважуванням з коефіцієнтом α_2 :

$$N_1^{(6)}(x, y) = \frac{1}{1000} (1-x)(1-y)(19 + 19x + 19y + 269xy);$$

$$N_2^{(6)}(x, y) = \frac{1}{1000} (1-x^2)(1-y)(231 - 269y).$$

Зазначимо, що отримані моделі будуть містити 9 параметрів.

Дослідження отриманих моделей показало, що модель $N_i^{(5)}(x, y)$ забезпечує кращу точність розрахунків, ніж $N_i^{(6)}(x, y)$. Так, відносні похибки для M_t при розбитті перерізу на 4 елементи становлять 1,51 % та 20,69 % відповідно (відносні похибки для τ_{max} становлять 0 %). Ця оптимізована модель була протестована на задачах про кручення призматичних стрижнів з прямокутними перерізами. Відносні похибки розрахунків для τ_{max} та M_t в порівнянні з точними [3] для різних відношень

сторін прямокутника b/a наведені в табл. 2. В цій же таблиці проведено порівняльний аналіз з відповідними результатами для стандартної і відомих альтернативних моделей.

Зауважимо, що ці результати були отримані при розбитті перерізу лише на чотири елементи.

Табл. 2. Відносні похибки для τ_{max} та M_t при прямокутному перерізі, [%]

$\frac{b}{a}$ Модель	1.0		1.2		1.5		2.0		2.5	
	τ_{max}	M_t	τ_{max}	M_t	τ_{max}	M_t	τ_{max}	M_t	τ_{max}	M_t
$N_i^{(5)}(x, y)$ (оптиміз.)	0	1.51	2.78	1.42	5.48	1.84	7.42	3.91	8.04	3.48
$N_i^{(1)}(x, y)$ (станд.)	2.37	2.11	5.46	2.03	8.58	2.47	11.14	4.59	12.37	4.25
$N_i^{(2)}(x, y)$	2.98	18.56	10.39	18.48	18.77	18.76	28.18	20.38	34.86	20.01
$N_i^{(3)}(x, y)$	6.06	24.11	2.35	23.95	12.09	23.91	23.28	24.85	31.17	24.02
$N_i^{(4)}(x, y)$	13.76	27.41	4.83	27.19	5.74	26.91	18.15	27.38	26.89	26.22

Висновки. В даній роботі нам вдалось отримати нову модель на біквадратичному елементі, що забезпечує кращу точність розрахунків за меншої кількості елементів, на які розбивається поперечний переріз. Таким чином, зменшується об'єм обчислювальної роботи. Отриману модель можна рекомендувати до використання і в інших прикладних задачах.

Література

1. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures / M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin, L.J. Topp // J. Aeronaut. Sci. – 1956. – V.23. – P. 805-824.
2. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 328 с.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1979. – 2-е изд. – 560 с.
4. Камаєва С.О. Дослідження властивостей серендипових моделей / С.О. Камаєва // Актуальные достижения европейской науки – 2009: V Междунар. науч.-практ. конф., Дніпропетровськ, 17-25 черв. 2009 р.: тез. докл. – Чехія ; Дніпропетровськ, 2009. – Т. 11. – С. 55-58.

Стаття постуила в редакційну колегію 09.11.2009 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Хомченком А.Н.

**REALIZATION OF FINITE ELEMENT METHOD USING
ALTERNATIVE MODELS****S. O. Kamaieva, M. G. Fedoryshyn***Ivano-Frankivs 'k National Technical University of Oil and Gas;**76019, Ivano-Frankivs 'k, Carpats 'ka street, 15;**ph. +380 (3422) 4 21 27; e-mail: Svitlana.Kamaeva@gmail.com*

This work is devoted to the solving task about torsion of prism rod with the rectangular section. The opportunity to apply the finite element method using not only standard models, but also alternative, built by the geometric modeling, is examined. The accuracy of estimation depending on the order and quantity of elements, that cover the transverse section is analyzed. The inverse task with the aim to obtain optimized models is being solved.

Key words: *stress function, moment of torsion, maximum tangent stress, model, serendipity element.*