

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОСТОРОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПРИХОПЛЕНОЇ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ ПІД ДІЄЮ ВИБУХОВОЇ ХВИЛІ

В. М. Мойсишин, В. Д. Яцишин

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua.*

Адаптовано метод просторових характеристик Р. Кліфтона для розв'язку осесиметричних задач динамічної пружності. Практичним втіленням методу став розрахунок напружено-деформованого стану вільної та прихопленої бурильних колон під дією вибухової хвилі на внутрішню стінку труби.

***Ключові слова:** метод просторових характеристик, система рівнянь, осесиметрична задача динамічної пружності, напружено-деформований стан порожнистого кругового циліндра, прихоплена бурильна колона, ударна хвиля вибуху.*

1. Актуальність та постановка задачі дослідження. Одним з найбільш ефективних методів ліквідації аварій та ускладнень у процесі спорудження свердловин є застосування енергії вибуху. Завдяки використанню торпед і перфораторів вдається ліквідувати різні аварії, пов'язані з прилипанням труб до стінки свердловини під дією перепаду тиску, заклинюванням в жолобах і місцях звуження отвору свердловини, утворенням сальника на бурильній колоні, втратою циркуляції промивальної рідини, залишенням сторонніх предметів на вибої і т.п. Спосіб торпедування у свердловині застосовують для “струшування” бурильного інструменту, розгвинчування різьбових з'єднань, обривання колони з метою підняття на поверхню вільної ділянки труби. За допомогою перфораторів вирішують задачі підвищення віддачі пластів, проведення ізоляційних робіт, відновлення циркуляції у свердловині тощо.

У [1] проаналізовано застосування прострільно-вибухової апаратури (ПВА) для ліквідації прихоплень бурильного інструменту на підприємствах Держкомгеології України за 1973-1997 р.р. Із 506 розвідувальних свердловин, на яких відбулося прихоплення, ПВА використовувалась у 283 (54,9%) випадках. Торпедування було успішним у 248 з 277 випадків, а перфорація – у 7 з 8 випадків, що склало відповідно 89,5% та 87,5%.

Вивчення напруженого стану бурильних труб і визначення їх радіальних зміщень є актуальною задачею під час проведення вибухових робіт у свердловині з метою ліквідації прихоплень бурильної колони без руйнування елементів останньої. Перед початком операції визначають

межі прихоплення, прикладають до колони цілком визначені силу натягу і крутний момент, перебивають усю прихоплену ділянку труб циліндричним зарядом [2]. Внаслідок дії ударної хвилі на внутрішню стінку колони затрубна порода відкладається і ущільнюється. Описаний метод “струшування” є найбільш ефективним на початкових стадіях аварії, коли хімічні процеси у свердловині ще не призвели до утворення механічно стійких осадів.

Для з’ясування особливостей напружено-деформованого стану (НДС) труби в умовах, що розглядаються, розв’яжемо методом просторових характеристик осесиметричну задачу пружності для порожнистого кругового циліндра при динамічній дії тиску на його внутрішню поверхню.

Затрубний матеріал, що взаємодіє з зовнішньою стінкою колони радіусом r_2 (рис.1), представимо пружними елементами з коефіцієнтом жорсткості K_0 . Тиск ударної хвилі $p(t)$ на внутрішню стінку труби радіусом r_1 задано залежністю

$$p(t) = \begin{cases} p_m \frac{t}{\theta_1}, & 0 \leq t \leq \theta_1; \\ p_m e^{-\frac{t-\theta_1}{\theta_2}}, & t > \theta_1, \end{cases} \quad (1)$$

де p_m – амплітуда імпульсу тиску, Па;

θ_1 – час наростання імпульсу, с;

θ_2 – характерний час спаду навантаження, с.

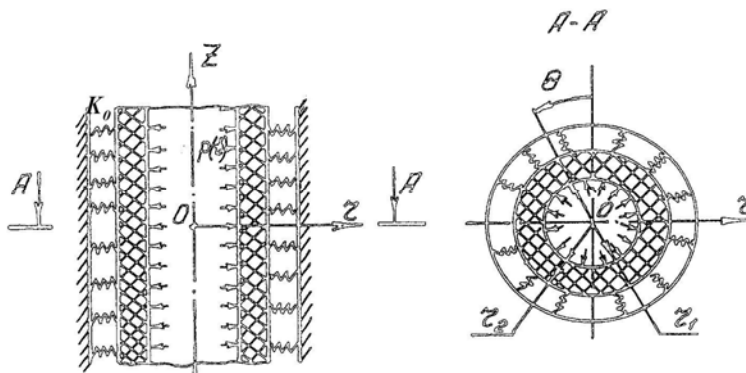


Рис. 1. Розрахункова схема

Метою даного дослідження є розвиток методу просторових характеристик для розв’язку осесиметричних задач динамічної пружності.

Метод просторових характеристик, який вперше запропоновано Р. Кліфтоном [3] для розв’язку плоских задач динамічної теорії пружності, має низку переваг у порівнянні з іншими чисельними методами.

По-перше, точність розв’язку порядку $O(k^3)$ (k – крок за часом) можна отримати, використовуючи для подання перших і других похід-

них скінченнорізницеві формули порядку точності $O(k^2)$ і $O(k)$ відповідно.

По-друге, метод прямим шляхом призводить до відповідних різницецевих рівнянь у граничних точках.

У роботі [4] метод просторових характеристик використано для дослідження хвильових процесів у суцільному напівнескінченному циліндрі з навантаженим торцем. Дослідження точності розв'язку там не наведено. Але оскільки чисельний розв'язок знайдено при $\Delta r = \Delta z = 0,025$; $k = 0,0125$ ($\Delta r, \Delta z$ – кроки за координатами, k – крок за часом), можна припустити, що саме за таких значень $\Delta r, \Delta z, k$ одержано прийнятні значення точності розв'язку.

У пропонованій роботі метод просторових характеристик при значно більших кроках по координатах і часу ($\Delta r = 0,1$; $\Delta z = 0,16$; $k = 0,07$) дає досить високу точність. Розбіжність між повною енергією і виконаною роботою по деформуванню труби на інтервалі часу 1000 мкс склала 1,78%.

2. Виведення різницецевих рівнянь

Оскільки суть методу просторових характеристик детально подано в роботах [3, 4], то обмежимося коротким викладом основних положень.

У циліндричній системі координат r, z, θ для осесиметричного випадку, коли змінні є функціями координат r, z , рівняння руху можна подати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для одержання замкненої системи до рівнянь (2) приєднаємо співвідношення закону Р. Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda \Omega + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \sigma_z &= \lambda \Omega + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_\theta &= \lambda \Omega + 2\mu \frac{u_r}{r}, \\ \tau_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

λ, μ – сталі Ламе;

u_r, u_z – переміщення вздовж осей r та z відповідно;

Ω – об'ємна деформація,

$$\Omega = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (4)$$

Розв'язок будемо шукати в змішаній формі (в напруженнях і переміщеннях). Співвідношення (2) – (4) подамо у безрозмірній формі. Для цього додамо і віднімемо вирази для напружень σ_r та σ_z , отримані рівняння закону Р. Гука продиференціюємо за часом, введемо безрозмірні величини за формулами:

$$\begin{aligned}\bar{r} &= \frac{r}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{t} = \frac{at}{h}, \\ p &= \frac{\sigma_r + \sigma_z}{2\rho a^2}, \quad \rho = \frac{\sigma_r - \sigma_z}{2\rho a^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_\theta}{\rho a^2}, \quad \tau = \frac{\tau_{rz}}{\rho a^2}; \\ \bar{u}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_r}{\partial t}, \quad \bar{V}(\bar{r}, \bar{z}, \bar{t}) = \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial t}; \\ a &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \gamma = \frac{a}{b} > 1,\end{aligned}$$

де h – характерний розмір (в даному випадку товщина циліндра), a – швидкість хвиль розширення, b – швидкість хвиль зсуву, ρ – густина матеріалу труби.

Виконавши вказані операції, отримаємо систему рівнянь в безрозмірному вигляді:

$$\begin{aligned}u_t - p_r - q_r - \tau_z &= \frac{p + q - \sigma}{r}, \\ v_t - p_z + q_z - \tau_r &= \frac{\tau}{r}, \\ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} p_t - u_r - v_z &= \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{u}{r}, \\ \gamma^2 q_t - u_r - v_z &= 0, \\ \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 2} \sigma_t - u_r - v_z &= \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 2} \frac{u}{r}, \\ \gamma^2 \tau_t - u_z - v_r &= 0,\end{aligned} \tag{5}$$

де індекси означають частинне диференціювання за вказаною незалежною змінною.

Перетворимо систему рівнянь (5) до симетричного виду. Для цього знайдемо різницю між п'ятим і третім рівняннями системи. Визначивши вираз для u/r , підставимо його в третє рівняння. Одержимо систему рівнянь, матриці за t, r, z якої симетричні:

$$\begin{aligned}u_t - p_r - q_r - \tau_z &= \frac{p + q - \sigma}{r}, \\ v_t - p_z + q_z - \tau_r &= \frac{\tau}{r},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\gamma^4}{3\gamma^2-4} p_t - \frac{\gamma^2(\gamma^2-2)}{3\gamma^2-4} \sigma_t - u_r - v_z &= 0, \\
\gamma^2 q_t - u_r + v_z &= 0, \\
-\frac{\gamma^2(\gamma^2-2)}{3\gamma^2-4} p_t + \frac{\gamma^2(\gamma^2-1)}{3\gamma^2-4} \sigma_t &= \frac{u}{r}, \\
\gamma^2 \tau_t - u_z - v_r &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Наступний етап виведення різницевих рівнянь достатньо повно відображено в роботі [4]. Запишемо тільки результат цього етапу – систему рівнянь у приростах:

$$\begin{aligned}
\delta u - \frac{k}{2r} \delta p - \frac{k}{2r} \delta \sigma + \frac{k}{2r} \delta \sigma &= \frac{a_1 - a_3}{2} - \frac{b_2 - b_4}{2} - \frac{k}{2} (p_r + q_r + \tau_z), \\
\delta v - \frac{k}{2r} \delta \tau &= \frac{a_2 - a_4}{2} + \frac{b_1 - b_3}{2} - \frac{k}{2} (p_z - q_z + \tau_r), \\
-\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k}{2} (u_r + v_z) + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2(\gamma^2 - 1)} \frac{k}{r} u, \\
\gamma^2 \delta q &= \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{2} + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k}{2} (u_r - v_z), \\
\frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 2)}{3\gamma^2 - 4} \delta p - \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2 - 4} \delta \sigma &= -\frac{k}{r} u, \\
\gamma \delta \tau &= \frac{b_1 - b_2 + b_3 - b_4}{2} - \frac{k}{2\gamma} (u_z + v_r),
\end{aligned} \tag{7}$$

де

$$a_i = -\frac{k}{2} S_1(\alpha_i) - W_1(\alpha_i),$$

$$b_i = -\frac{k}{2} S_2(\alpha_i) - W_2(\alpha_i),$$

$S_1(\alpha_i), W_1(\alpha_i), S_2(\alpha_i), W_2(\alpha_i)$ – вирази, що визначаються співвідношеннями вздовж біхарактеристик ([3], [4]).

Запишемо ці вирази в розгорнутому вигляді:

$$W_1(0) = (u' - u_1) + (p' - p_1) + (q' - q_1),$$

$$W_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = (v' - v_2) + (p' - p_2) - (q' - q_2),$$

$$W_1(\pi) = -(u' - u_3) + (p' - p_3) + (q' - q_3),$$

$$W_1\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -(v' - v_4) + (p' - p_4) - (q' - q_4).$$

$$S_1(0) = -\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} v_{z1} - \tau_{z1} - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \left(\frac{u}{r}\right)_1 + \left(\frac{p + q - \sigma}{2}\right)_1,$$

(8)

$$\begin{aligned}
 S_1\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\frac{\gamma^2-2}{\gamma^2}u_{r2} - \tau_{r2} - \frac{\gamma^2-2}{\gamma^2}\left(\frac{u}{r}\right)_2 - \left(\frac{\tau}{r}\right)_2, \\
 S_1(\pi) &= -\frac{\gamma^2-2}{\gamma^2}v_{z3} + \tau_{z3} - \frac{\gamma^2-2}{\gamma^2}\left(\frac{u}{r}\right)_3 + \left(\frac{p+q-\sigma}{r}\right)_3, \\
 S_1\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= -\frac{\gamma^2-2}{\gamma^2}u_{r4} + \tau_{r4} - \frac{\gamma^2-2}{\gamma^2}\left(\frac{u}{r}\right)_4 + \left(\frac{\tau}{r}\right)_4.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Індекси 1, 2, 3, ... означають, що значення змінної необхідно брати у відповідній точці (рис. 2). Слід звернути увагу на те, що величину r не можна вважати постійною в точках 1, 3.

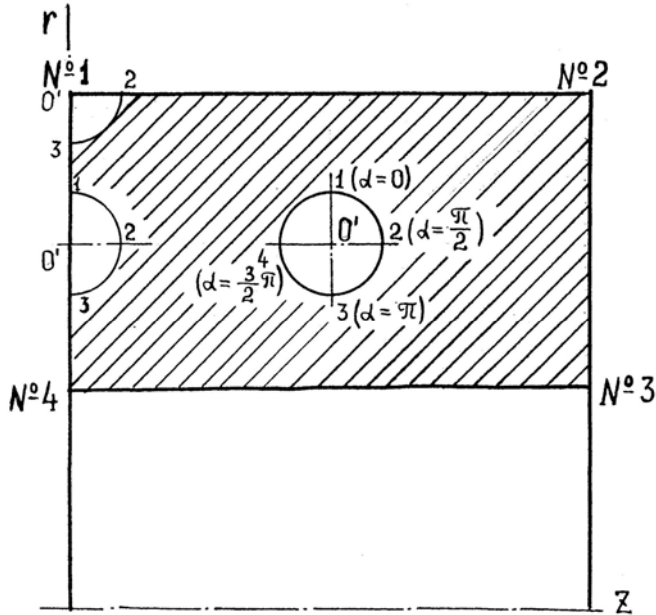


Рис. 2. Досліджувана ділянка труби, для якої складаємо систему різницевих рівнянь

Далі знаходимо вирази $a_1 + a_3$, $a_1 - a_3$, $a_2 + a_4$ і т.д.

$$a_1 + a_3 = -\frac{k}{2}[S_1(0) + S_1(\pi)] - [W_1(0) + W_1(\pi)].$$

Після відповідних підстановок і групувань отримаємо:

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_3 &= \frac{\gamma^2-2}{\gamma^2} - \frac{k}{2}(v_{z1} + v_{z3}) + \frac{\gamma^2-2}{\gamma^2} - \frac{k}{2}\left[\left(\frac{u}{r}\right)_1 + \left(\frac{u}{r}\right)_3\right] + (u_1 - u_3) + \\
 &+ \frac{k}{2}\left[\left(\frac{p+q-\sigma}{r}\right)_1 - \left(\frac{p+q-\sigma}{r}\right)_3\right] + (p_1 + p_3) + (q_1 + q_3) + \frac{k}{2}(\tau_{z1} - \tau_{z3}) - 2(p+q).
 \end{aligned} \tag{10}$$

Так само чином можна отримати інші вирази ($a_2 + a_4$, $a_1 - a_3$, ...).

Співвідношення типу (10) містить значення функцій і їх похідних в т. 1, 2, 3, 4 (рис. 2). Необхідно подати їх через значення функцій та їх похідних в точці $O'(r, z)$.

Співвідношення, що входять до (10) перетворюємо у наступні вирази:

$$\begin{aligned} & f(r+ck, z) - f(r-ck, z), \\ & f(r+ck, z) + f(r-ck, z), \\ & f_r(r, z+ck) - f_r(r, z-ck), \\ & f_r(r, z+ck) + f_r(r, z-ck), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{де } c = \begin{cases} 1 - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r^2} u + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u_r + \frac{k^2}{2} u_{rr} + \\ \frac{k^2}{2\gamma^2} u_{zz} + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2} v_{rz} + \frac{k}{r} (p + q - \sigma) + k(p_r + q_r + \tau_z), \end{cases}$$

Можна знайти також вирази, отримані після перестановки z і r . Розвинення функції $f(r, z)$ в ряд Тейлора в околі точки $O'(r, z)$ свідчить, що вирази (11) відрізняються від наведених нижче величин членами порядку $O(k^3)$:

$$2ckf_r(r, z), 2f(r, z) + (ck)^2 f_{rr}(r, z), 2ck^2 f_{rz}(r, z), 0. \quad (12)$$

Після відповідних перетворень отримаємо систему рівнянь для внутрішньої точки, яка відрізняється від наведеної в роботі [4].

$$\begin{aligned} \delta u - \frac{k}{2r} \delta p - \frac{k}{2r} \delta q + \frac{k}{2r} \delta \sigma &= -\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r^2} u + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u_r + \frac{k^2}{2} u_{rr} + \\ &+ \frac{k^2}{2\gamma^2} u_{zz} + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2} v_{rz} + \frac{k}{r} (p + q - \sigma) + k(p_r + q_r + \tau_z), \\ \delta v - \frac{k}{2r} \delta \tau &= \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u_z + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2} u_{rz} + \frac{k^2}{2\gamma^2} v_{rr} + \frac{k^2}{2} v_{zz} + \\ &+ k(p_z - q_z + \tau_r) + \frac{k}{r} \tau, \\ -\frac{\gamma^2 + 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p &= \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{r} u + k(u_r + v_z) - \frac{k^2}{2r^2} (p + q - \sigma) + \\ &+ \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r + \tau_z) + \frac{k^2}{2} (p_{rr} + q_{rr} + p_{zz} - q_{zz} + 2\tau_{rz}), \\ \gamma^2 \delta q &= k(u_r - v_z) - \frac{k^2}{2r^2} (p + q - \sigma) + \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r - \tau_z) + \\ &+ \frac{k^2}{2} (p_{rr} + q_{rr} - p_{zz} + q_{zz}), \\ \frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 2)}{3\gamma^2 - 4} \delta p - \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2 - 4} \delta \sigma &= -\frac{k}{r} u, \\ \gamma^2 \delta \tau &= k(u_z + v_r) + \frac{k^2}{2r} (p_z + q_z - \sigma_z + \tau_r) + \frac{k^2}{2} (2p_{rz} + \tau_{rr} + \tau_{zz}) - \frac{k^2}{2r^2} \tau. \end{aligned} \quad (13)$$

Під час складання різницевих рівнянь для поверхонь і кутових точок необхідно врахувати, що деякі біхарактеристики проходять поза досліджуваною областю і їх необхідно виключити із системи рівнянь (7).

Наведемо виведення системи різницевих рівнянь для лівої торцевої поверхні (рис.2). З рівняння (7) необхідно виключити співвідношення a_4 і b_4 . Для цього додамо перше і шосте, друге і третє рівняння та від другого відніmemo четверте. П'яте рівняння залишимо без змін.

Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \delta v - \gamma^2 \delta q - \frac{k}{2r} \delta \tau &= -\frac{a_1 + a_3}{2} + \frac{b_1 - b_3}{2} + a_2 - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k}{2} (u_r - v_z) - \\
 &- \frac{k}{2} (p_z - q_z + \tau_r), \\
 -\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{2r} \delta u + \delta v + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta \tau &= \frac{a_1 + a_3}{2} + \frac{b_1 - b_3}{2} + a_2 + \\
 + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 (\gamma^2 - 1)} \frac{k}{r} u - \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k}{2} (u_r + v_z) - \frac{k}{2} (p_z - q_z + \tau_r), & \quad (14) \\
 \delta u - \frac{k}{2r} \delta p - \frac{k}{2r} \delta q + \frac{k}{2r} \delta \sigma + \gamma \delta \tau &= \frac{a_1 - a_3}{2} + \frac{b_1 + b_3}{2} + \\
 + b_2 - \frac{k}{2} (u_z + v_r) - \frac{k}{2} (p_r + q_r + \tau_z), \\
 \frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - 2)}{3\gamma^2 - 4} \delta p - \frac{\gamma^2 (\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2 - 4} \delta \sigma &= -\frac{k}{r} u.
 \end{aligned}$$

Оскільки значення $a_1 + a_3$, $a_1 - a_3$, ... відомі, можна знайти a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , При цьому необхідно слідкувати за тим, щоб перетворення забезпечували точність $O(k^3)$.

Систему рівнянь для довільної точки на лівій торцевій поверхні (крім кутових точок) отримаємо з рівнянь (14) шляхом підстановки в них виразів $a_1 + a_3$, $a_1 - a_3$, ... :

$$\begin{aligned}
 \delta v - \gamma^2 \delta q - \frac{k}{2r} \delta \tau &= -k(u_r - v_z - p_z + q_z - \tau_r) + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u_z + \\
 + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2} u_{rz} + \frac{k^2}{2} (v_{zz} - p_{rr} - q_{rr} + p_{zz} - q_{zz}) + \frac{k^2}{2\gamma^2} v_{rr} + \\
 + \frac{k^2}{2r^2} (p + q - \sigma) - \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r - \tau_z) + \frac{k}{r} \tau, \\
 -\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{2r} \delta u + \delta v + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} \delta p - \frac{k}{2r} \delta \tau &= \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{r} u + k(u_r + v_z + p_z - q_z + \tau_r) + \\
 + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u_z + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2} u_{rz} + \frac{k^2}{2\gamma^2} v_{rr} + \frac{k^2}{2} (v_{zz} + p_{rr} + q_{rr} + p_{zz} - q_{zz} + 2\tau_{rz}) - \\
 - \frac{k^2}{2r^2} (p + q - \sigma) + \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r + \tau_z) + \frac{k}{r} \tau,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta u - \frac{k}{2r} \delta p - \frac{k}{2r} \delta q + \frac{k}{2r} \delta \sigma + \gamma \delta \tau = -\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} u_r + \\
& + \frac{k^2}{2} u_{rr} + \frac{k^2}{2\gamma^2} u_{zz} + \frac{k}{\gamma} (u_z + v_r) + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma} \frac{k^2}{2} v_{rz} + \frac{k}{r} (p + q - \sigma) + \\
& k(p_r + q_r + \tau_z) + \frac{k^2}{2\gamma r} (p_z + q_z - \sigma_z + \tau_r) + \frac{k^2}{2\gamma} (2p_{rz} + \tau_{rr} + \tau_{zz}) - \frac{k^2}{2\gamma r^2} \tau, \\
& \frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 2)}{3\gamma^2 - 4} \delta p - \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2 - 4} \delta \sigma = -\frac{k}{r} u.
\end{aligned} \tag{15}$$

Для отримання замкненої системи слід записати ще два рівняння, які складемо, виходячи з крайових умов.

Так само можна вивести рівняння для інших поверхонь.

При складанні системи рівнянь для кутової точки № 1 (рис. 2) з рівнянь (7) необхідно виключити a_1, b_1, a_4, b_4 , оскільки ці біхарактеристики проходять поза розглядуваною областю. При цьому отримуємо два рівняння, яких для деяких типів крайових умов може виявитися недостатньо [3]. Додаткове (третє) рівняння можна отримати безпосередньо із співвідношень на біхарактеристиках.

Після всіх перетворень система різницевих рівнянь для першої кутової точки набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1}\right) \delta u - \delta v - \left(\frac{\gamma^2}{\gamma^2 - 1} + \frac{k}{2r}\right) \delta p - \frac{k}{2r} \delta q + \frac{k}{2r} \delta \sigma + \left(\gamma + \frac{k}{2r}\right) \delta \tau = \\
& = -\left(\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2 - 1} \frac{k}{r} + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r^2}\right) u - k(u_r + v_z + p_z - q_z - p_r - q_r + \tau_r - \tau_z) + \\
& + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} (u_r - u_z) + \frac{k}{\gamma} (u_z + v_r) + \frac{k^2}{2} (u_{rr} - p_{rr} - q_{rr} - v_{zz} - p_{zz} + q_{zz} - 2\tau_{rz}) + \\
& + \frac{k^2}{2\gamma^2} (u_{zz} - v_{rr}) - \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2} (u_{rz} - v_{rz}) + \frac{k}{r} \left(1 + \frac{k}{2r}\right) \times (p + q - \sigma) - \\
& - \frac{k^2}{2r} (p_r + q_r - \sigma_r + \tau_z) + \frac{k^2}{2\gamma r} (p_z + q_z - \sigma_z + \tau_r) + \frac{k^2}{2\gamma} (2p_{rz} + \tau_{rr} + \tau_{zz}) - \\
& - \frac{k}{r} \left(1 + \frac{k}{2\gamma r}\right) \tau, \\
& \delta u + \delta v - \frac{k}{2r} \delta p - \left(\gamma^2 + \frac{k}{2r}\right) \delta q + \frac{k}{2r} \delta \sigma - \frac{k}{2r} \delta \tau = -\frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r^2} u - \\
& - k(u_r - p_r - q_r - \tau_r - v_z - p_z + q_z - \tau_z) + \frac{\gamma^2 - 2}{\gamma^2} \frac{k^2}{2r} (u_r + u_z) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{k^2}{2}(u_{rr} - p_{rr} - q_{rr} + v_{zz} + p_{zz} - q_{zz}) + \frac{k^2}{2\gamma^2}(u_{zz} + v_{rr}) + \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2} \frac{k^2}{2}(u_{rz} + v_{rz}) + \\
& + \frac{k}{r} \left(1 + \frac{k}{2r}\right) \cdot (p + q - \sigma) - \frac{k^2}{2r}(p_r + q_r - \sigma_r - \tau_z) + \frac{k}{r} \tau - \frac{k^2}{\gamma}(\tau_{rr} - \tau_{zz}), \quad (16) \\
& \frac{k}{2r} \delta u + \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 2)}{3\gamma^2 - 4} \delta p - \frac{\gamma^2(\gamma^2 - 1)}{3\gamma^2 - 4} \delta \sigma = -\frac{k}{r} u.
\end{aligned}$$

Наступні три (або чотири) рівняння отримаємо з крайових умов. Аналогічно можна скласти рівняння для інших кутових точок.

3. Чисельне представлення частинних похідних.

До правих частин рівнянь (13), (15), (16) входять частинні похідні, які необхідно представити в різницевому виді. Для забезпечення точності розв'язку порядку $O(h^3)$ необхідно і достатньо, щоб залишковий член в різницевих формулах для обчислення перших і других похідних був відповідно $O(h^2)$ і $O(h)$. Таку точність дає трьохточкова схема. Краще використати центровані різниці. У випадку, коли деякі точки з'являються на межі досліджуваної області, необхідно використати односторонні різниці.

Запишемо формули для обчислення похідних (3) з використанням центрованих різниць:

$$\begin{aligned}
f_r(m, n) &= \frac{1}{2\Delta r} [f(m+1, n) - f(m-1, n)] - O(\Delta r^2), \\
f_{rr}(m, n) &= \frac{1}{\Delta r^2} [f(m+1, n) - 2f(m, n) + f(m-1, n)] - O(\Delta r^2), \quad (17)
\end{aligned}$$

$$f_{rz}(m, n) = \frac{1}{4\Delta r \Delta z} [f(m+1, n+1) - f(m-1, n+1) - f(m+1, n-1) + f(m-1, n-1)]$$

і з використанням односторонніх різниць:

$$\begin{aligned}
f_r(m, n) &= \frac{1}{2\Delta r} [-3f(m, n) + 4f(m+1, n) - f(m+2, n)] + O(\Delta r^2), \\
f_{rr}(m, n) &= \frac{1}{\Delta r^2} [f(m, n) - 2f(m+1, n) + f(m+2, n)] - O(\Delta r), \quad (18)
\end{aligned}$$

$$f_{rz}(m, n) = \frac{1}{2\Delta r \Delta z} [f(m+1, n+1) - f(m+1, n-1) - f(m, n+1) + f(m, n-1)]$$

для точок поверхні $m = 1, 1 < n < n_f$,

$$f_{rz}(m, n) = \frac{1}{\Delta r \Delta z} [f(m+1, n+1) - f(m+1, n) - f(m, n+1) + f(m, n)]$$

для кутової точки $m = 1, n = 1$.

Замінивши r на z , можна записати формули для визначення похідних за незалежною змінною z .

Може здатися, що чим вищий порядок різницевих формул, за якими знаходились похідні, тим точнішим буде загальне рішення. Однак, як свідчать чисельні експерименти, використання різницевих схем більш високого порядку точності недоцільне. Точність рівнянь (7) і точність обчислення похідних повинні бути узгоджені. Порушення цього призводить або до нестійкості, або до зниження точності розв'язку.

4. Чисельний приклад. Вивчення НДС вільної та прихопленої труб

Методом просторових характеристик визначимо параметри НДС вільної та прихопленої (рис.1) труб під дією динамічного навантаження на внутрішній поверхні, заданого залежністю (1).

До моменту навантаження циліндр є вільним від напружень. Задача розв'язується для початкових нульових умов:

$$p = q = \sigma = \tau = u = 0, \quad t \leq 0. \quad (19)$$

Граничні умови мають вигляд:

для внутрішньої поверхні $\left(r = \frac{b}{2}, 0 < z < l \right)$

$$\begin{aligned} \delta p + \delta q &= \delta p_i, \\ \delta \tau &= 0; \end{aligned} \quad (20)$$

для зовнішньої поверхні $\left(r = \frac{a}{2}, 0 < z < l \right)$

$$\begin{aligned} \delta p + \delta q &= 0, \\ \delta \tau &= 0; \end{aligned} \quad (21)$$

для торцевих поверхонь $\left(z = 0 \vee z = l, \frac{b}{2} < r < \frac{a}{2} \right)$

$$\begin{aligned} \delta p - \delta q &= 0, \\ \delta \tau &= 0; \end{aligned} \quad (22)$$

для кутових точок

$$\begin{aligned} \delta p + \delta q &= 0, & \delta p + \delta q &= \delta p_i, \\ \delta p - \delta q &= 0, & \text{або} & \delta p - \delta q = 0, \\ \delta \tau &= 0 & \delta \tau &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Рівняння (13), (15), (16) та інші разом з граничними умовами утворюють замкнені системи, які можна розв'язати відносно приростів.

За наведеним алгоритмом створено програму, яка дає змогу знаходити параметри НДС труби в фіксовані моменти часу, а також напруження і переміщення (як функції часу) в фіксованих точках циліндра. Для контролю точності і стійкості розв'язку на кожному кроці за часом обчислювались повна енергія циліндра і виконана робота, які порівнювались, і у такий спосіб визначалась похибка.

Розрахунки проводились за наступних вихідних даних:

амплітуда імпульсу тиску $p_m = 0,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$, час наростання імпульсу $\theta_1 = 20 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, характеристичний час спаду навантаження $\theta_2 = 80 \cdot 10^{-6} \text{ с}$;

зовнішній та внутрішній діаметри труби $D = 0,146 \text{ м}$; $d = 0,0683 \text{ м}$; модуль Юнга $E = 0,19 \cdot 10^6 \text{ МПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,27$, густина матеріалу труби $\rho = 0,774 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^3$, жорсткість прихоплюючої породи $K_0 = 20 \cdot 10^6 \text{ Н/м}$.

Характеристики розрахункової сітки:

$$\Delta r = 0,1; \Delta z = 0,16; k = 0,07.$$

Результати розрахунків подано на рис.3–6.

Як бачимо, частоти поздовжніх коливань прихопленої труби у порівнянні з вільною зростають, а амплітуди напружень σ_z утричі зменшуються (рис.3), що природно, оскільки на зовнішню стінку прихопленої труби діють додаткові в'язі, накладені внаслідок обвалу або осипання розбурюваної породи.

Зіставляючи діаграми (рис.4а та 4б) бачимо, що, зменшення амплітуд колових напружень σ_θ на внутрішній поверхні прихопленої труби, призводить до змін характеру залежності $\sigma_\theta(t)$. На час дії імпульсу (0,2 мс) амплітуди напружень σ_θ доволі значні, а після дії імпульсу процес стає усталеним з амплітудою втричі меншою. Для вільної труби перехідний процес на час дії імпульсу майже не помітний, хоча амплітуди напружень σ_θ , зрозуміло, більші в 7 разів.

Як свідчать рис. 5а і 5б, так само характеризують процес графіки залежностей $u_r(t)$. На період дії імпульсу прихоплена труба “дихає” з амплітудами в 5-6 раз більшими, ніж в усталеному режимі коливань. Це і сприяє вивільненню прихопленої ділянки бурильного інструменту. Для вільної труби такого стрибка амплітуд не спостерігається.

Графіки 6а, 6б зміни в часі безрозмірної повної енергії циліндра використовуються для оцінки збіжності хвильового процесу. Зрозуміло, що вільна труба накопичує енергії більше, ніж прихоплена. Порівнюючи повну внутрішню енергію циліндра з роботою, виконаною ударною хвилею за деформування циліндра, можна оцінити похибку обчислень (у нас вона не перевищує 1,8%). Якщо процес розбіжний, то спостерігається різне зростання повної внутрішньої енергії і дисбаланс між енергією і роботою.

Висновки

1. У статті застосовано метод просторових характеристик Р. Дж. Кліфтона для розв'язку осесиметричних задач динамічної пружності.

2. З метою практичного втілення методу розраховано напружено-деформований стан вільної і прихопленої бурильних колон під дією вибухової хвилі на внутрішню стінку труби.

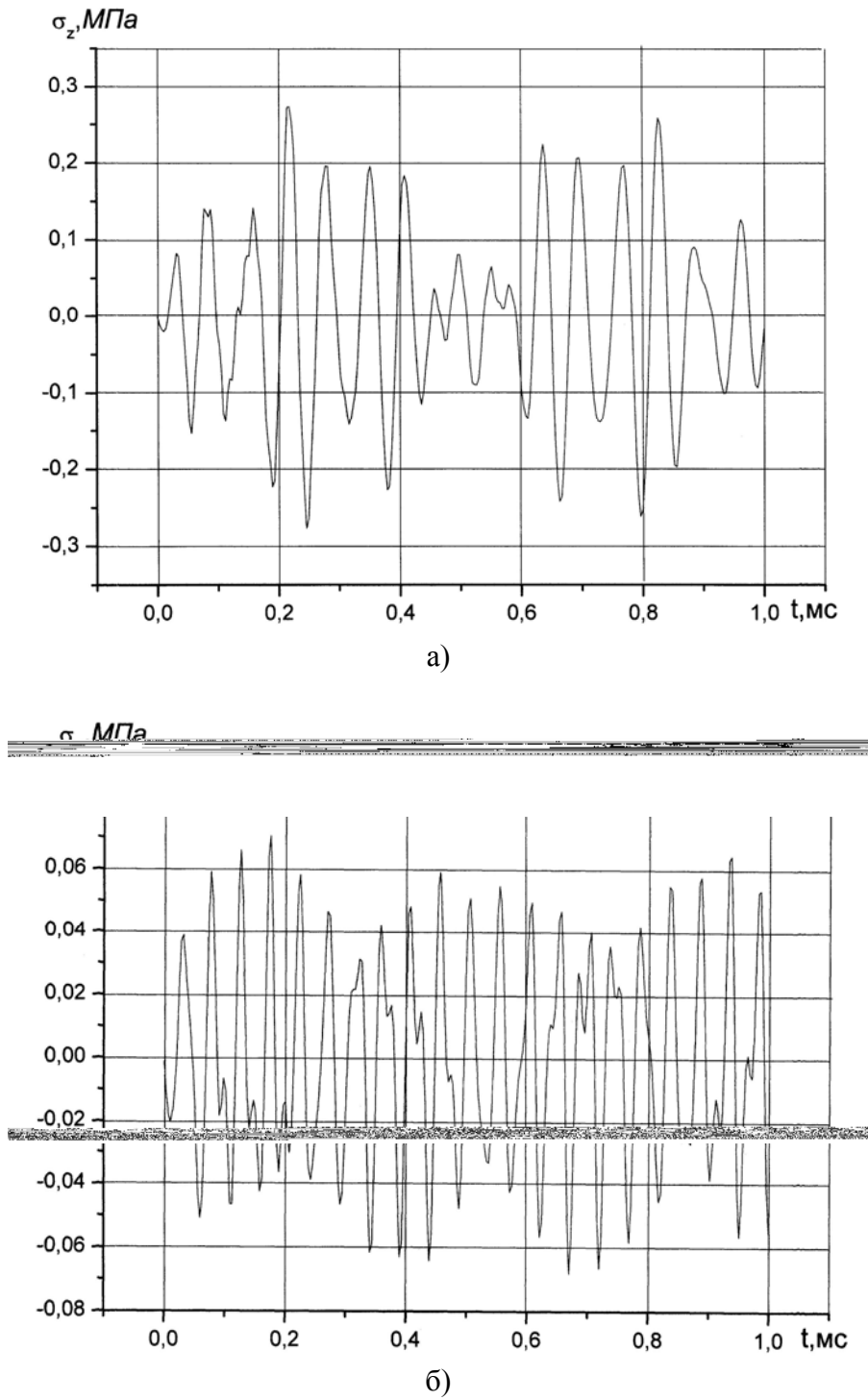


Рис. 3. Графіки зміни в часі осевого напруження σ_z на внутрішній поверхні труби (а – вільної, б – прихопленої)

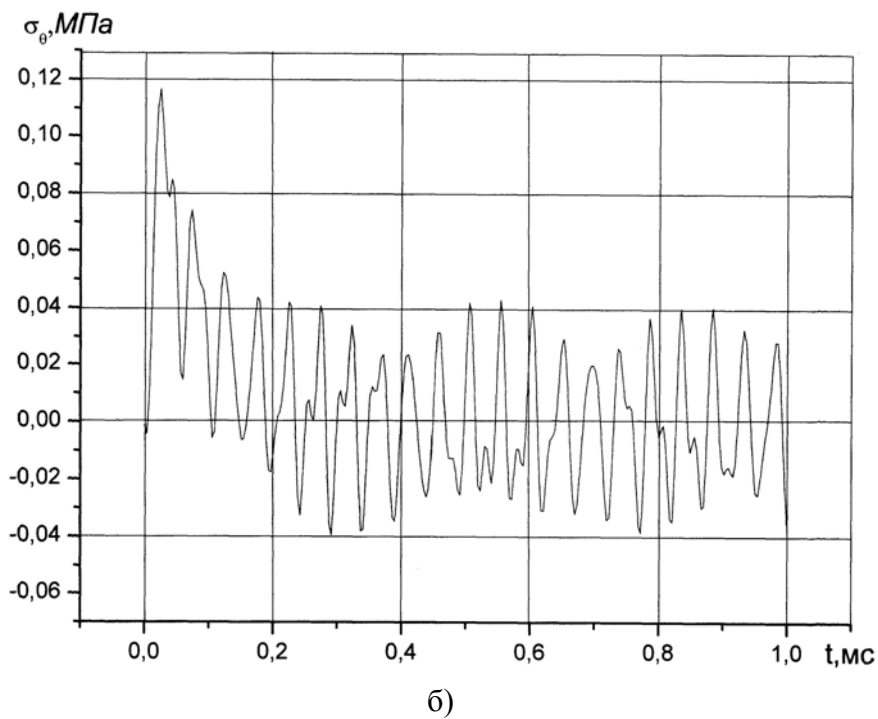
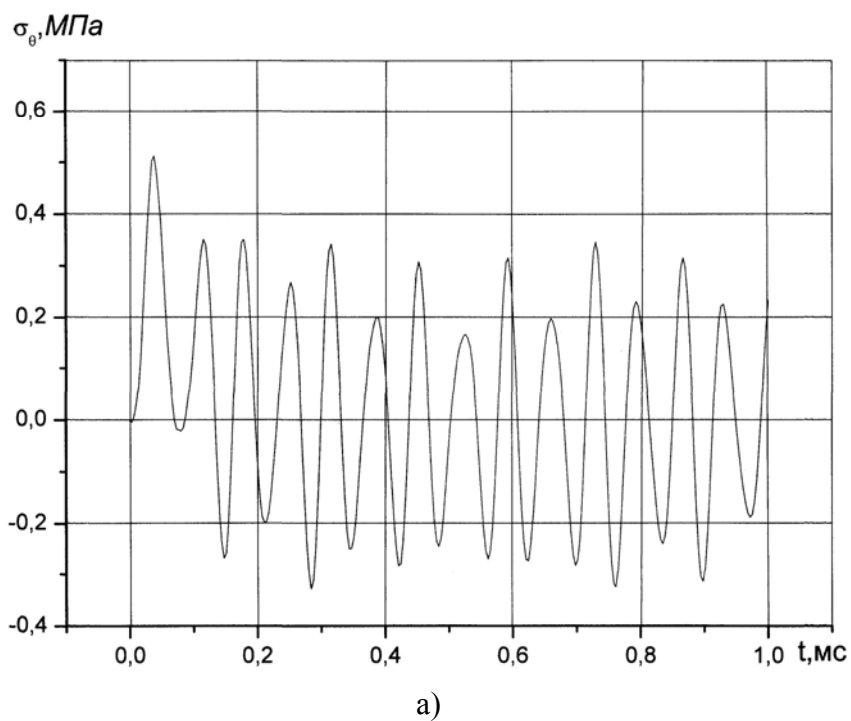


Рис. 4. Графіки зміни в часі колового напруження σ_θ на внутрішній поверхні труби (а – вільної, б – прихопленої)

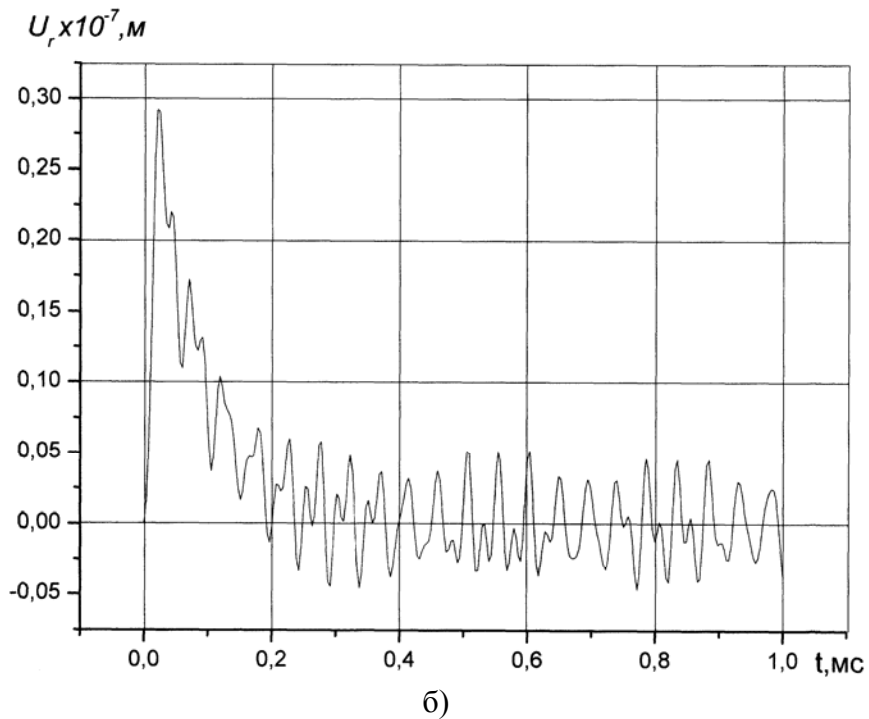
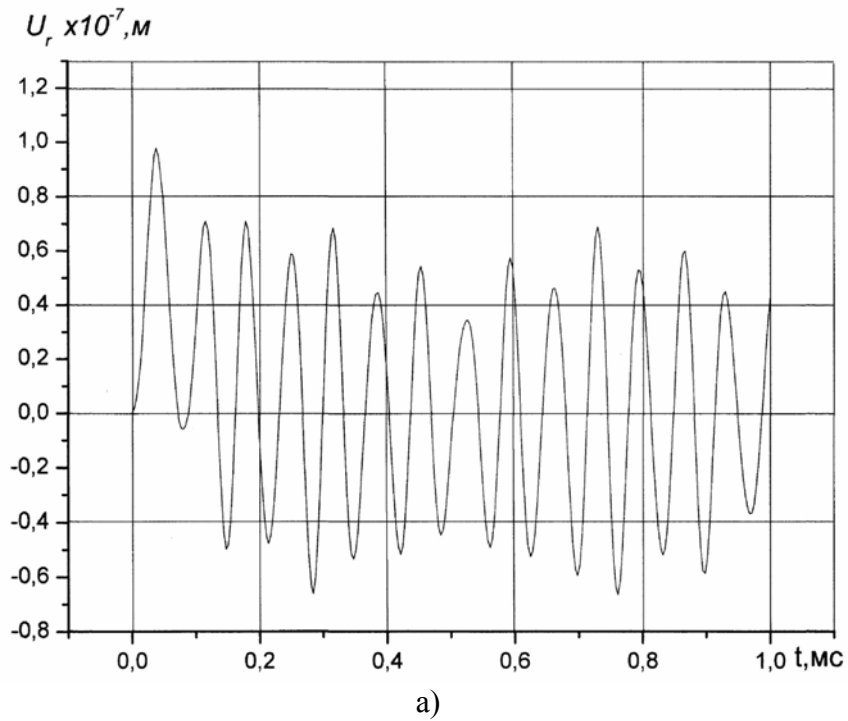


Рис. 5. Графіки зміни в часі радіальних переміщень u_r внутрішньої поверхні труби (а – вільної, б – прихопленої)

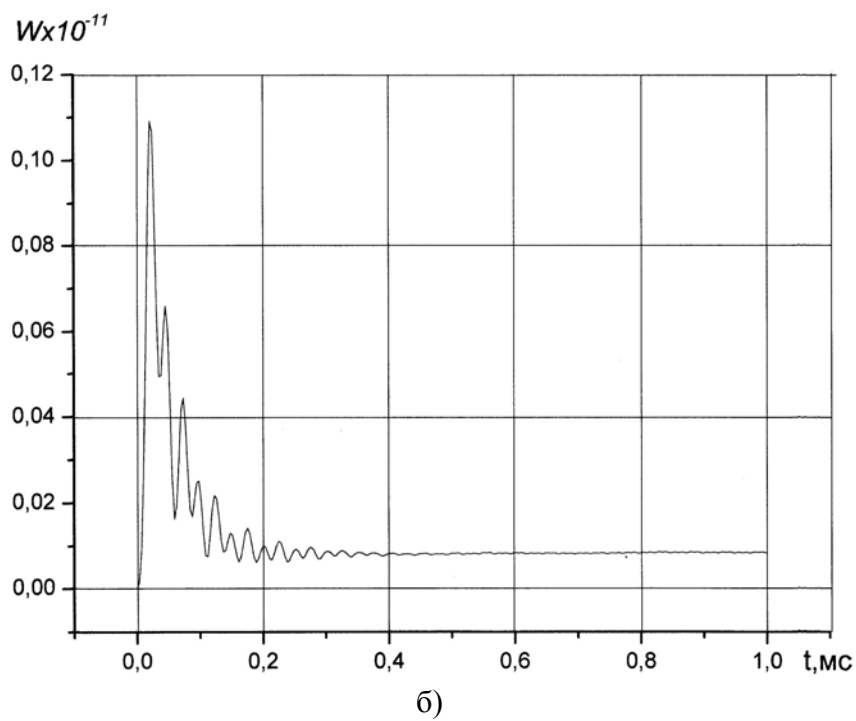
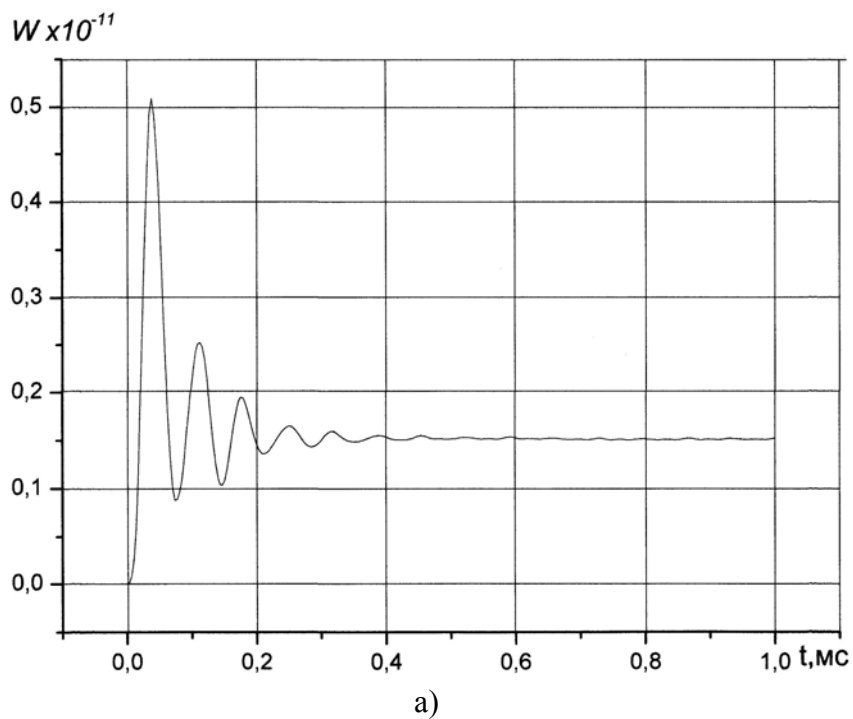


Рис. 6. Графіки зміни в часі повної внутрішньої енергії W труби (а – вільної, б – прихопленої; енергія W – безрозмірна)

Література

1. Мойсишин В.М. Застосування прострільно-вибухової апаратури для ліквідації прихоплень в геологорозвідальному бурінні / В.М. Мойсишин, С.В. Гошовський // Розвідка і розробка нафтових і газових родовищ. Серії: Буріння нафтових і газових свердловин, Розвідка та експлуатація нафтових і газових родовищ. – 1997. – Вип.34. – С. 69-74.
2. Техническая инструкция по прострелочно-взрывным работам в скважинах. – М.: Недра, 1978. – 64 с.
3. Клифтон Р.Дж. Разностный метод в плоских задачах динамической упругости / Р.Дж. Клифтон // Сб. переводов “Механика”. – 1968. – №1.
4. Сабодаш П.Ф. Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн / П.Ф. Сабодаш, Р.А. Чередниченко. – ПМТФ, 1971. – №4.

*Стаття поступила в редакційну колегію 12.11.2009 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Векериком В.І.***

**APPLICATION OF METHOD OF SPATIAL DESCRIPTIONS
FOR STUDY OF TENSE-DEFORMATION BEING
OF THE GRABBED BORING COLUMN UNDER ACTION
OF EXPLOSIVE WAVE**

V. M. Moisyshyn, V. D. Yatsyshyn

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka street, 15;
ph. +380 (3422); e-mail: math@nung.edu.ua.*

In the article the method of spatial descriptions R. Clifton is adapted for the decision of axessymmetrical tasks of dynamic resiliency. A calculation became practical embodiment of method of the tense-deformation being of free and grabbed boring columns under action of explosive wave on the internal wall of pipe.

Key words: *method of spatial descriptions, system of difference equalizations, axessymmetrical task of dynamic resiliency, tense-deformation being of hollow circular cylinder, grabbed boring column, shock wave of explosion.*