УДК 51(075)

ДЕЯКІ НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ТА ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

І. В. Федак

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника;
76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
Fedak_ivan@rambler.ru

Розглянуті дванадцять нестандартних методів розв'язування рівнянь та доведення нерівностей.

Ключові слова: *математична олімпіада, рівняння, нерівність.*

На математичних олімпіадах різних рівнів часто пропонуються задачі, які можна розв'язати як стандартними міркуваннями, так і з допомогою нестандартних підходів. Як правило, у другому з цих випадків процес розв'язання вдається суттєво скоротити у порівнянні з першим варіантом. У даній статті ми проаналізуємо дванадцять нестандартних методів розв'язування рівнянь та доведення нерівностей, які в різні роки пропонувалися на третьому та четвертому етапах Всеукраїнської олімпіади з математики.

Як перший приклад розглянемо таку задачу, яка була запропонована автором цієї статті учасникам третього етапу Всеукраїнської олімпіади з математики у 2003 році для учнів дев'ятого класу.

<u>Задача 1.</u> Петрусь виписав на дошці 2003 зведені квадратні рівняння і переконався, що жодне з них не має дійсних коренів. Потім він додав усі ці рівняння. Доведіть, що і отримане у такий спосіб рівняння також не має дійсних коренів.

У ході розв'язування цієї задачі учні міркували приблизно так:

Нехай задані рівняння

$$x^2 + p_k x + q_k = 0,\ k = 1, ..., 2003.$$

Оскільки вони не мають дійсних коренів, то при кожному k дискримінанти

$$D_k = p_k^2 - 4q_k < 0.$$

Отримане в результаті додавання рівняння має вигляд

$$2003x^2 + (p_1 + ... + p_{2003})x + (q_1 + ... + q_{2003}) = 0.$$

Доведемо, що його дискримінант

$$D = (p_1 + ... + p_{2003})^2 - 4 \cdot 2003 \cdot (q_1 + ... + q_{2003}) < 0.$$

Але довести останню нерівність вдалося лише одному учасникові олімпіади, який скористався нерівністю Коші-Буняковського для векторів $\vec{a}(1,...,1)$, $\vec{p}(p_1, ..., p_{2003})$:

$$(p_1 + ... + p_{2003})^2 = (\vec{a}, \vec{p})^2 \le |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{p}|^2 = 2003(p_1^2 + ... + p_{2003}^2) \le 2003(4q_1 + ... + 4q_{2003}).$$

Проте бажаного результату можна було би досягнути набагато простіше.

Розв'язання. Оскільки коефіцієнти біля x^2 у всіх рівняннях дорівнюють одиниці і рівняння не мають дійсних коренів, то їх ліві частини набувають лише додатних значень. А, отже, і ліва частина отриманого рівняння також набуватиме лише додатних значень. Тому таке рівняння не матиме дійсних коренів.

Розглянемо ще одну задачу, під час розв'язування якої більшість учнів та й вчителів зразу намагаються складати та розв'язувати систему з трьох рівнянь. У зв'язку з цим пропонуємо до уваги читачів спосіб розв'язування даної задачі на рівні програми з математики для молодших класів загальноосвітньої школи.

<u>Задача 2.</u> Лев і тигр з'їдають вівцю за 2 год. 24 хв., лев і вовк з'їдають таку ж вівцю за 3 год., а тигр і вовк – за 4 год. За який час вони могли б з'їсти цю вівцю троє разом?

Розв'язання. Припустимо, що зграя із двох левів, двох тигрів і двох вовків напала на отару овець. Розділившись на пари (лев і тигр), (лев і вовк), (тигр і вовк), вони наїдалися протягом 12 годин. За цей час перша пара з'їла 5 овець, друга – 4, а третя – 3. Отже, в середньому на з'їдання однієї вівці вони всі разом витрачали одну годину. Тому один лев, один тигр та один вовк змогли би з'їсти разом одну вівцю за вдвічі більший час, тобто 2 години.

Наступна задача належить авторові цієї статті і була запропонована на фіналі Соросівської олімпіади з математики у 2001 році. Її розв'язання цікаве тим, що ілюструє як звичайне множення обох частин рівняння на сталу призводить до дуже суттєвих спрощень.

<u>Задача 3.</u> Розв'яжіть рівняння

$$(x-1)(500x-501)(1000x-1001)^2 = 2001.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 2000 і запишемо його у вигляді:

$$(1000x-1000)(1000x-1002)(1000x-1001)^2 = 2000\cdot 2001.$$

Нехай $y = 1000x-1001.$ Тоді рівняння набуває вигляду

$$(y+1)(y-1)y^2 = 2000\cdot 2001.$$

З отриманого біквадратного рівняння знаходимо $y_{1,2} = \pm\sqrt{2001}.$ Отже,

$$x_{1,2} = \frac{1001\pm\sqrt{2001}}{1000}.$$

Розглянемо ще одне рівняння для учнів одинадцятого класу з четвертого етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 2002 року. Справилися з ним лише чотири учасники олімпіади. Більше того, авторське розв'язання задачі також виявилося доволі громіздким. Тому пропонуємо її розв'язання, доступне для розуміння навіть семикласникам.

Задача 4. Знайдіть всі цілочислові розв'язки рівняння

$$m^{2002} = n(n+m)(n+2m)\cdot\ldots\cdot(n+2001m).$$

Розв'язання. Зауважимо, що ліва і права частина рівності матимуть однакову парність тоді і тільки тоді, коли m та n будуть парними. Поклавши $n = 2n_1$, $m = 2m_1$, після скорочення на 2^{2002} прийдемо до початкового рівняння, але відносно нових змінних. Звідси випливатиме, що m_1 та n_1 також можуть бути лише парними. А отже, m та n повинні ділитися на 4. Міркуючи і далі аналогічно, одержимо, що числа m та n при кожному натуральному значенні k діляться на 2^k, а значить, можуть бути лише нулями. Перевірка показує, що пара чисел $m = n = 0$ задовольняє даному рівнянню.

Під час розв'язування наступної задачі на допомогу алгебрі доволі ефективно приходить геометрія.

Задача 5. Доведіть, що система рівнянь

$$x^2 + xy + y^2 = 4,\ y^2 + yz + z^2 = 9,\ z^2 + zx + x^2 = 36$$

не має розв'язків у додатних чисел.

Розв'язання. Припустимо, що такі розв'язки існують. Тоді існують такі трикутники AOB, BOC, COA зі спільною вершиною O і кутами 120^o при цій вершині, що жодні два з них не мають спільних внутрішніх точок і $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Для цих трикутників із рівнянь системи за теоремою косинусів отримуємо: $AB = 2$, $BC = 3$, $CA = 6$. Але це неможливо, бо трикутника ABC з такими довжинами сторін не існує. Отримане протиріччя доводить, що задана система не має розв'язків у додатних числах x, y, z.

Нестандартні міркування швидко приводять до успіху і при розв'язуванні наступного рівняння, в якому, здавалось би, в першу чергу слід в той чи інший спосіб позбутися радикалів. Проте отримати бажаний результат можна значно простіше.

Задача 6. Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} = \sqrt[6]{27-x^2}.$$

Розв'язання. Зауважимо, що множиною допустимих значень у цьому рівнянні є проміжок $\left[-3;3\sqrt{3}\right]$. Але при всіх належних цьому проміжку x права частина рівняння не перевищує $\sqrt[6]{27} = \sqrt{3}$. Що ж стосується лівої частини, то

$$\sqrt{3+x} + \sqrt[4]{9-x} > \begin{cases} \sqrt{3} + 0 = \sqrt{3},\ x \in \left(0;3\sqrt{3}\right], \\ 0 + \sqrt[4]{9} = \sqrt{3},\ x \in [-3;0). \end{cases}$$

А оскільки $x = 0$ також не задовольняє нерівності, то задане рівняння не має дійсних коренів.

Нестандартне розв'язування попередньої задачі звелося до доведення нерівностей. Але й при доведенні самих нерівностей на допомогу також часто приходять нестандартні підходи. Прикладом може слугувати така задача з четвертого етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків, яку її автор доволі громіздко пропонував розв'язувати методом математичної індукції. Але, як ми побачимо далі, просте підсилення нерівності зразу приводить до потрібного результату.

Задача 7. Доведіть нерівність

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<5,$$

якщо в обох доданках використано по 2005 радикалів.

Розв'язання.

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}<$$

$$<\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{8}}}}=3+2=5.$$

Таку ідею доведення нерівностей навряд чи можна віднести до нестандартних. Але, як свідчить досвід проведення математичних олімпіад, нею користується не так вже й багато учнів. Тому вважаю за доцільне навести відповідний приклад.

Задача 8. Для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2009}$ доведіть нерівність

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\ldots+\frac{a_{2008}^2}{a_{2009}}+\frac{a_{2009}^2}{a_1}\ge a_1+a_2+\ldots+a_{2009}.$$

Розв'язання. Для довільних дійсних чисел x, y справедлива нерівність

$$(x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow x^2\ge 2xy-y^2.$$

При $y>0$ її можна записати у вигляді

$$\frac{x^2}{y}\ge 2x-y.$$

Застосовуючи отриманий результат до кожного з доданків у лівій частині нерівності, заданої в задачі, переконуємося у справедливості цієї нерівності.

Зауважимо, що у більш загальному вигляді таку нерівність можна записати як

$$\frac{x^{n+1}}{y^n}\ge (n+1)x-ny,\ \ x>0,\ y>0,\ n\in N.$$

Для її доведення досить переписати цю нерівність у вигляді

$$\frac{x^{n+1}}{y^n}+\underbrace{y+\ldots+y}_{n}\ge (n+1)x$$

і скористатися нерівністю Коші між середнім арифметичним та середнім геометричним $n+1$ додатних чисел.

Далі розглянемо ще одну задачу з фінального етапу другої Соросівської олімпіади для учнів десятого класу. Її авторське розв'язування проводилось методом математичної індукції з використанням нерівності вигляду

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\le\frac{1}{1+ab}+1,\ a>0,\ b>0\,,$$

проте значно простіше було би тут скористатися принципом крайнього.

<u>Задача 9.</u> Довести, що для додатних чисел $a_1, a_2, ..., a_n,\ n>1,$ таких, що $a_1a_2...a_n=1$, виконується нерівність

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\le n-1..$$

Розв'язання. Нехай a_k та a_m – два найбільші із заданих чисел. Тоді $a_ka_m\ge 1,$ бо у протилежному випадку добуток всіх чисел був би меншим за 1. Оскільки при цьому

$$\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}-1=\frac{1-a_ka_m}{(1+a_k)(1+a_m)}\le 0,$$

то

$$\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}\le 1\,.$$

Але кожен з решти доданків також менший одиниці. Тому сума всіх доданків не перевищує $n-1,$ причому рівність досягається лише при $n=2.$

Зауважимо, що вибираючи два найменші числа a_k та $a_m,$ ми змогли би довести, що

$$\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+...+\frac{1}{1+a_n}\ge 1.$$

Справді, міркуючи аналогічно, отримаємо, що $a_ka_m\le 1$ та $\frac{1}{1+a_k}+\frac{1}{1+a_m}\ge 1.$

А оскільки решта доданків додатні, то нерівність доведена. Рівність досягається лише при $n=2.$

Окремо хочеться звернути увагу на геометричні підходи до доведення алгебраїчних нерівностей. Проілюструємо це на прикладі.

<u>Задача 10.</u> Числа $x,\ y,\ z$ належать інтервалу $(0;1)$. Доведіть нерівність

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1.$$

Розв'язання. Запишемо цю нерівність у вигляді

$$x\cdot(1-y)\cdot 1+y\cdot(1-z)\cdot 1+z\cdot(1-x)\cdot 1<1$$

і будемо трактувати доданки у лівій частині цієї нерівності як об'єми прямокутних паралелепіпедів з відповідними лінійними вимірами. Оскільки три такі паралелепіпеди можна помістити в одиничний куб, в якому ще залишаються вільні місця, то нерівність доведена.

Наведемо також приклад геометричного доведення нерівності з третього етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2008 року, 11 клас. Спроби розв'язувати задачу іншим способом практично заздалегідь були приречені на невдачу, про що й свідчать результати олімпіади – жоден учасник з даною нерівністю не впорався.

Задача 11. Для кожного натурального n доведіть нерівність

$$\sqrt{1\cdot(4n-1)}+\sqrt{2\cdot(4n-2)}+\ldots+\sqrt{(2n-1)\cdot(4n-(2n-1))}<\pi n^2.$$

Розв'язання. Розглянемо півкруг з діаметром $4n$. З кожної точки півкола такого круга його діаметр видно під прямим кутом. Проведемо перпендикуляри до цього діаметра на відстанях $1,2,3,\ldots,2n-1$ від його лівого кінця. Їх довжини в межах півкруга дорівнюють відповідним доданкам у лівій частині нерівності. На кожному з перпендикулярів справа від нього побудуємо прямокутник з основою 1, яка лежить на діаметрі півкруга. Сума площ таких прямокутників дорівнюватиме лівій частині нерівності. Зрозуміло, що ця сума менша площі половини півкруга, тобто менша πn^2, що й слід було довести.

На завершення статті пропонуємо ще одну цікаву задачу, пов'язану з нерівностями, з четвертого етапу Всеукраїнської олімпіади з математики 1995 року, яка проходила у місті Івано-Франківську. Ця задача пропонувалися учням і десятого, і одинадцятого класу. Але лише де кілька випускників – учасників олімпіади впоралися з нею. Зауважимо також, що авторське розв'язання задачі було доволі непростим, тому пропонуємо дещо хитріший підхід до розв'язування.

Задача 12. Чи існує многочлен вигляду

$$f(x)=x^{1995}+a_1x^{1994}+\ldots+a_{1994}x+a_{1995}$$

такий, що при всіх x з відрізка $\left[0;3^{1995}\right]$ виконується нерівність $|f(x)|\le 1$?

Розв'язання. Скористаємося розкладом многочлена $f(x)$ на лінійні та квадратичні множники. Назвемо проміжок $[a;b]$ забороненим, якщо у всіх його точках принаймні один із множників набуває лише таких значень, які за абсолютною величиною не перевищують 1. Зауважимо, що лінійний множник $x-c$ набуває таких значень лише на проміжку $[c-1;c+1]$. Квадратний тричлен x^2+px+q із від'ємним дискримінантом набуває мінімуму при $x=-\frac{p}{2}$, причому значення цього мінімуму додатне. Тоді для всіх x таких, що $\left|x+\frac{p}{2}\right|\ge 1$, будемо мати:

$$x^2+px+q\ge\left(-\frac{p}{2}\pm1\right)^2+p\left(-\frac{p}{2}\pm1\right)+q=-\frac{p^2}{4}+1+q>1.$$

Таким чином, кожен із множників розкладу визначає заборонений проміжок, довжина якого не перевищує 2. А оскільки всіх таких множників не більше 1995 то і загальна довжина всіх заборонених проміжків не перевищує $2\cdot1995=3370$. Але $3970<3^{1995}$, то на відрізку $[0;3^{1995}]$ знайдеться принаймні одна точка x_0, яка не належить жодному забороненому проміжку. Тоді $|f(x_0)| > 1$. Отже, такого многочлена $f(x)$, який при всіх $x \in [0; 3^{1995}]$ задовольняє нерівності $|f(x)| \le 1$, не існує.

Зауважимо, що аналогічно можна довести більш загальне твердження: не існує такого многочлена $P_n(x)$, $n \ge 1$, з коефіцієнтом 1 при старшому степені, який при всіх $x \in \left[0; 3^n\right]$ задовольняє нерівності $|P_n(x)| \le 1$.

Відзначимо також, що не існує вказаного многочлена, який би задовольняв нерівність $|P_n(x)| \le 1$ на відрізку з довжиною 4, проте доведення такого твердження уже не є настільки очевидним.

Стаття поступила в редакційну колегію 19.07.2009 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., с.н.с. ***Загороднюком А.В.***

SOME SUBSTANDARD METHODS OF THE SOLUTION OF EQUATIONS AND PROOF OF INEQUALITIES

I. V. Fedak
Precarpathian National University by V. Stefanyc;
Ukraine, 76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenko street, 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Twelve substandard methods of the solution of equations and proof of inequalities have considered.
Key words: *mathematical olympiad, equation, inequality.*