

УДК 517.518.45

**РЯДИ ФУР'Є В КОМП'ЮТЕРНІЙ ГРАФІЦІ****Л. І. Криштопа**

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;  
Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +380 (3422) 4-21-23, e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)*

*Статтю присвячено застосуванню рядів Фур'є в комп'ютерній графіці, оскільки двовимірні зображення можна представляти як двовимірний сигнал, незважаючи на те, що в аналоговій формі цей сигнал нескінченний, у дискретній він позначений тільки в точках растрового зображення. Запропоновано і розроблено алгоритм ущільнення, що використовується у форматі збереження зображення JPEG, побудований на основі дискретного косинус перетворення з метою уникнення явища Гіббса. Обґрунтовано актуальність досліджень періодичних функцій, розкладених на спектр, що є фізичним аналогом математичних викладів.*

**Ключові слова:** *ряд Фур'є, періодичні функції, явище Гіббса, дискретне перетворення, косинус перетворення, синус перетворення, графічне зображення.*

На сьогоднішній день ряди Фур'є є часто вживаними, як у науці, так і у техніці та побуті. У повсякденному житті ми дуже часто слухаємо музику, дивимося телевизор, але не усвідомлюємо, що насправді виконуємо перетворення Фур'є. Переглядаючи телевізійні передачі, наше око сприймає інформацію, і наш орган зору будує перетворення, представляючи картинку, що є коливальним рухом частинок пружного середовища, що розповсюджується у вигляді хвиль, як спектр кольорів різної яскравості, інтенсивності тощо. Мозок перетворює цю інформацію на сприймане зображення.

Одним із прикладів є сонячний промінь, розкладений на спектр, який є фізичним аналогом математичних перетворень. Інтенсивність сонячного променя, що входить в призму, постійно міняється в часі. Світло, що виходить з призми, роздільне в просторі на окремі «чисті» кольори або частоти. У цьому спектрі є середня амплітуда на кожній частоті. Таким чином, функція інтенсивності від часу трансформувалася у функцію амплітуди залежно від частоти. Перетворення Фур'є може представити сигнал, що змінюється в часі, у вигляді залежності частоти і амплітуди, але воно дає також інформацію про фазу. На рис. 1 зображено графік у поперечному перерізі, і він нам нагадує складну хвилю, яка складається із великої кількості простих гармонік з різними частотами, сума яких є періодичною функцією.

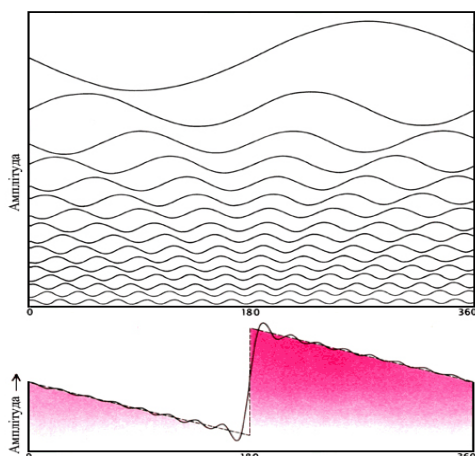


Рис. 1. Розклад на прості гармоніки графіка функції в ряд Фур'є та апроксимуюча крива

Графік суми гармонік різко відрізняється від графіків функцій, що додаються. Описана сума є рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Дана функція  $f(x)$  з періодом  $T = 2\pi$  на проміжку від  $(-\pi; \pi)$  повинна задовольняти умовам Діріхле, а саме:

1. Якщо вона на цьому інтервалі має скінченну кількість точок розриву першого роду;
2. Якщо вона на цьому інтервалі має скінченну кількість точок екстремуму;
3. Якщо існує правостороння границя лівого кінця функції та лівостороння границя правого кінця.

Також слід звернути увагу на явище Гіббса: зі збільшенням числа членів у сумі апроксимуюча крива наближається до графіка вихідної функції у всіх точках, крім точок розриву. У цих точках з'являються маленькі виступи. Зі збільшенням числа доданків ці виступи зміщуються до точки розриву. Коли число доданків у частинній сумі збільшується, площа виступу на кривій зменшується, причому виступи не зменшуються по висоті, а лише стають вужчими.

Таким чином, нескінченний ряд в границі наближається за видом до потрібної функції, за виключенням виступів, які з'являються, як вказано, біля точок розриву. Така поведінка частинних сум називається явищем Гіббса, причому з ним ми повсякчас зустрічаємося, коли маємо справу з апроксимацією розривних функцій у їхніх точках розриву. Доведено, що величина виступу залежить від величини стрибка функції у точці розриву. Якщо цей стрибок дорівнює  $h$ , то величина виступу для функції періоду  $2\pi$  дорівнює  $0,0895h$ .

З явищем Гіббса можна боротися у випадку парних функцій, які за періодичного поширення не мають розривів; а також функцій, заданих на половинному періоді, які поширюють у сусідній інтервал (для запобігання цьому явищу) за допомогою розкладу в ряд Фур'є за косинусами, якому притаманні кращі властивості збіжності. Проте, якщо функція  $f(x)$ , задана на інтервалі  $(0;\pi)$ , у точках  $x=0$  та  $x=\pi$  дорівнює нулю, то слід віддати перевагу розкладанню її в ряд синусів, який у цьому випадку дає кращу збіжність, ніж ряд косинусів. Це пояснюється тим, що, здійснивши непарне продовження функції  $f(x)$  з інтервалу  $(0;\pi)$  в інтервал  $(-\pi;0)$ , ми забезпечимо неперервність не лише самої функції у цих точках, але й її першої похідної.

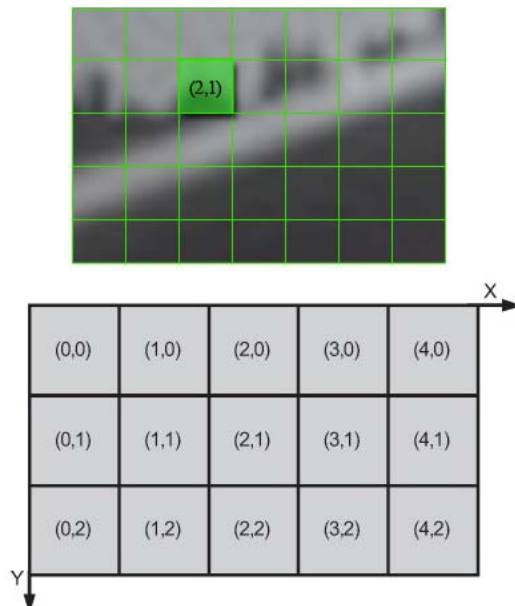


Рис. 2. Моделі представлення просторового зображення

Подамо зображення як функцію двох змінних, визначену в точках кінцевого растрового зображення. Нехай  $I(x, y)$  – значення атрибута пікселя (наприклад, номер палітри, інтенсивності) залежно від колірної моделі представлення зображення (рис.2). Безліч таких функцій на точках фіксованого кінцевого растрового зображення утворюють скінченномірний простір  $R^{X,Y}$  розмірності  $m \times n$  ( $|X|=m$ ,  $|Y|=n$ ) із скалярним утворенням

$$(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{m,n} I_1(i, j) I_2(i, j). \quad (2)$$

Будемо ототожнювати із простором  $I_2(X \times Y)$ . У такому просторі існує базис, тобто така система елементів  $\{e_k\}_{k=1}^{k=m \times n}$  (3) із  $R^{X,Y}$  і такий набір одночасно не рівних нулеві коефіцієнтів  $\{C_k\}_{k=1}^{k=m \times n}$  (4), що для будь-якої функції  $I$  із цього простору виконується така рівність

$$I = \sum_{k=0} C_k e_k \quad (5)$$

Якщо додатково припустити ортонормованість базису, тоді

$$(e_p, e_q) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases} \quad (6)$$

і виконуватиметься таке співвідношення  $C_k = (I, e_k)$  де,  $C$  – множина значень атрибутів (як правило, колір). Оскільки двовимірне зображення можна представити, як двовимірний сигнал, то у аналоговій формі цей сигнал неперервний, а у дискретній формі – визначений лише в точках растрового зображення  $D$ . Тому для розгляду зображення у визначеному прямокутнику зручно розкласти його в ряд Фур'є.

Розглянемо одновимірні сигнали з одновимірною областю визначення. Якщо представити функцію комплексної змінної ( $F$ ) у вигляді суми дійсної та уявної частин ( $F$ ) =  $\text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$ , то модуль (або амплітуда) буде рівним  $\sqrt{\text{Re}(f)^2 + \text{Im}(f)^2}$ , а фазовий зсув складе  $\arctg \left[ \frac{\text{Im}(f)}{\text{Re}(f)} \right]$ .

На графіках будуть подано тільки наочні значення амплітуд. У багатовимірному випадку значення  $f \times x$  замінюється на скалярний вираз векторів  $\vec{f}$  та  $\vec{x}$ . Тоді частотне представлення для одновимірної функції розраховується за допомогою перетворення Фур'є

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} I(x) [\cos 2\pi f x - i \sin 2\pi f x] dx, \text{ що для загального двовимірного зо-}$$

браження перетворення Фур'є запишеться в такому вигляді:

$$F(f_x, f_y) = \int_{R^2} I(x, y) [\cos(2\pi(f_x x + f_y y)) - i \sin(2\pi(f_x x + f_y y))] dx dy. \quad (7)$$

Застосуємо простіші міркування та розглянемо одновимірні сигнали з одновимірною областю визначення. На рис. 3 представлено одновимірний сигнал як зріз двовимірного зображення. Даний сигнал можна розглянути як в просторовій області (визначеній області)  $R^n \ni D$ , так і в частотній –  $C^n$ .

У дискретному випадку, якщо сигнал представлений у вигляді функції визначеного в  $N$  точках  $x \in 0, \dots, N-1$ , використовується дискретне перетворення Фур'є, яке, по суті, є рядом Фур'є.

$$F(f) = \sum_{x=0}^{N-1} I(x) \left[ \cos \frac{2\pi f x}{N} - i \sin \frac{2\pi f x}{N} \right], \quad (8)$$

де  $f \in 0, \dots, N-1$  – також дискретна. Відповідне зворотне дискретне перетворення Фур'є записується у вигляді:

$$I(x) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(f) \left[ \cos \frac{2\pi f x}{N} + i \sin \frac{2\pi f x}{N} \right]. \quad (9)$$

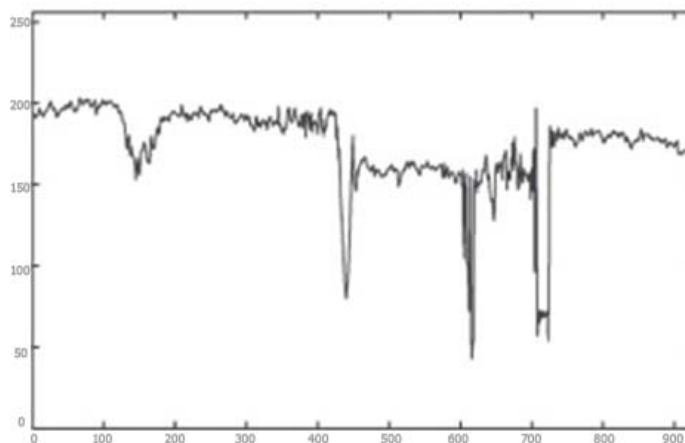


Рис. 3. Зріз як сигнал

Дискретне перетворення володіє такими двома важливими властивостями:

- по-перше, коефіцієнти незалежні один від одного, тобто точність представлення одного коефіцієнта не залежить від будь-якого іншого.
- по-друге, перетворення зберігає основну інформацію за малої кількості коефіцієнтів. Дана властивість найсильніше виявляється на фотореалістичних зображеннях.

У комплексному вигляді наша функція для всього зображення матиме вигляд:

$$F(k, l) = \sum_{p=0}^m \sum_{q=0}^n I(p, q) e^{-\frac{2\pi i p k}{m}} e^{-\frac{2\pi i q l}{n}}, \quad (10)$$

для всіх  $k = 1 \dots m$ ,  $l = 1 \dots n$ . Обернене перетворення Фур'є визначається так:

$$I(p, q) = \frac{1}{mn} \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n F(k, l) e^{\frac{2\pi i k p}{m}} e^{\frac{2\pi i l q}{n}}. \quad (11)$$

Таким чином, система функцій

$$\left\{ e^{2\pi i \left( p \frac{k}{m} + q \frac{l}{n} \right)} \right\}_{k, l=0}^{m, n}, \quad (12)$$

утворює базис в просторі функцій зображення, а частотний спектр зрізу відображає рис. 4.

Існують алгоритми швидкого перетворення Фур'є. Якщо в області  $F(f) = 0, |f| > f_{\text{макс}}$ , то сигнал (функція)  $I(x)$  має обмежений спектр з максимальною частотою  $f_{\text{макс}}$ . Тобто під час розкладання функції не присутні тригонометричні функції з частотою понад  $f_{\text{макс}}$ . Зазвичай дискретизація відбувається шляхом вимірювання сигналу через рівні

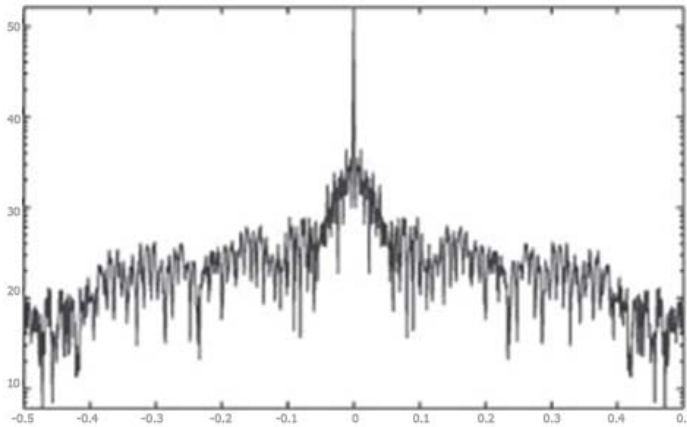


Рис. 4. Частотний спектр зрізу

проміжки в області визначення. Ця операція математично описується як множення функції  $I(x)$  на гребінчастий фільтр, що складається з послідовності рівномірно зміщених функцій Дірака  $\sigma(x)$  :

$$Comb(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sigma(x - nT), \quad (13)$$

де  $T = 1/f_s$  – період,  $f_s$  – частота дискретизацій. Цікавою властивістю функції  $Comb$  є те, що її перетворення Фур'є також є функцією  $Comb$ , проте із іншою амплітудою (не 1, а  $f_s$ ) і частотою (також  $f_s$ ), а  $\sigma$  – функція – це узагальнена функція, що визначається як неперервний лінійний функціонал у просторі функцій, що диференціюються, і не є функцією в класичному розумінні. Ця функція дає змогу записати просторову інтенсивність зображення зосередженою або прикладеною в одній точці. Наприклад, інтенсивність точкового зображення 1, що знаходиться в точці  $a$ , евклідового простору  $R^n$ , записується за допомогою  $\sigma$  – функції у вигляді  $\sigma(x - a)$ .

Алгоритм стиснення, використовуваний у форматі зберігання зображень JPEG, побудований на використанні дискретного косинусного перетворення. Хороший ступінь стиснення з малими втратами інформації можна отримати лише у разі, коли багато коефіцієнтів Фур'є близькі або рівні нулеві.

Реальні зображення мають вельми складну структуру, і їх Фур'є-образ може не задовольняти подібним вимогам. Можна розбити зображення на області фіксованого розміру і виконувати перетворення в кожній області окремо (рис. 5). У кожній такій області зображення матиме менше особливостей, ніж все зображення загалом, і образи Фур'є цих областей можуть виявитися більш відповідними для стиснення, ніж образ всього зображення.

Саме так і працює відомий алгоритм стиснення JPEG. Недоліком такого підходу є те, що за високого ступеня стиснення частини єдиного зображення, що обробляються незалежно один від одного, можуть по-

гано поєднуватися, стає очевидним, що зображення зібране з окремих елементів.

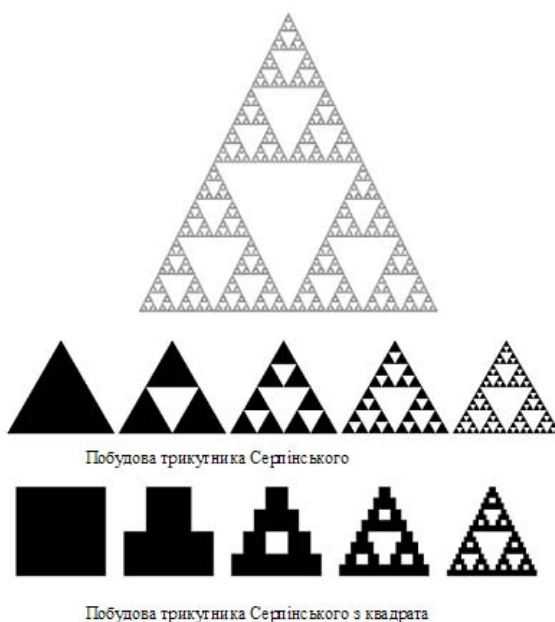
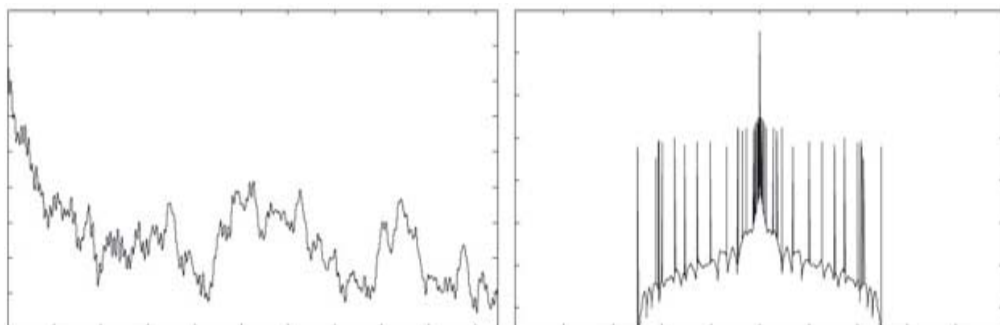


Рис. 5. Розбиття зображення на області

Одним із прикладів є комп'ютерний фільм поганої якості. На ньому можна спостерігати сукупність квадратиків, які утворюють зображення із добре видимими їх контурами. Тоді для усунення цього недоліку, зображення відфільтровують, знімаючи шуми, які породжують таке спотворення. На рис. 6 зображено початковий сигнал зображення як в просторовій, так і в частотній області до косинусної дискретизації, який ми досліджуємо.



Після проведення дискретизації, наш графік набуде вигляду зображеного на рис. 7, на якому ми можемо спостерігати високочастотні шуми, і, порівнявши частотні області до і після дискретизації, ми побачимо велику різницю. Ця різниця буде проявлятися на зображенні у вигляді сукупності контурів зібраних областей. Для того, щоб позбутися

цих шумів, потрібно їх відфільтрувати і графік сигналу набуде наступного вигляду (рис.8). Якщо порівняти частотну і просторову область даного сигналу до дискретизації і після фільтрування, слід зауважити, що сигнали майже співпадають, тобто зображення після фільтрування набуде невеликої розмитості і не буде мати такої ж чіткої форми, як початкове зображення, але основна інформація при цьому збережеться.

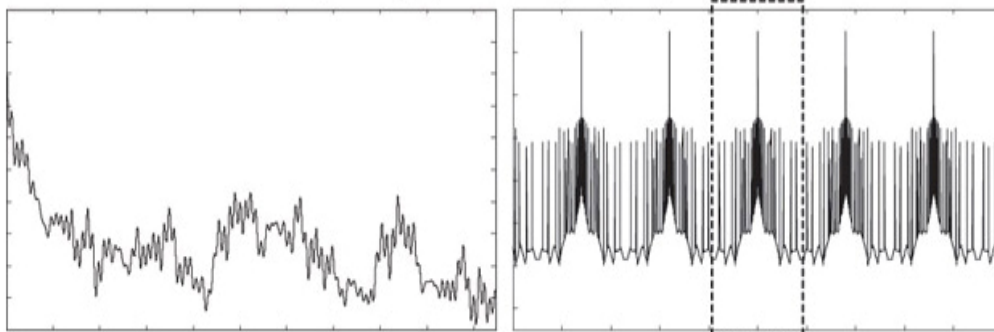


Рис. 7. Сигнал після дискретизації

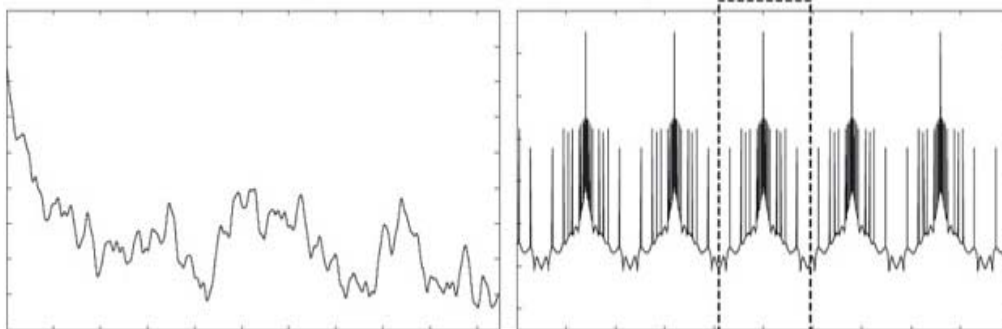


Рис. 8. Сигнал після фільтрування

Ще одне завдання – побудова різного роду сіток. Сітка є зручною для представлення об'єктів найрізноманітнішої структури. У комп'ютерній графіці часто використовуються трикутні сітки, вони відносно прості в обробці, дають можливість представляти об'єкти з високою точністю. Крім того, на багатьох графічних станціях обробка трикутників (наприклад, заливка Гуро) підтримується апаратно. Використання рівномірної сітки буває виправдано не завжди – об'єкт може мати як фрагменти з хорошим ступенем точності уявні лише декількома великими трикутниками, так і деталі з складною структурою, які слід представляти можливо дрібнішою сіткою.

### *Література*

1. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1972. – Т.2. – 576 с.
3. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике. Часть IV / И.А. Каплан. – Харьков, 1966. – 236 с.



4. Алгоритмические основы растровой машинной графики / Д.В. Иванов, А.С. Карпов, Е.П. Кузьмин, В.С. Лемпицкий, А.А. Хропов // Интернет-университет информационных технологий. – ИНТУИТ. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 286 с.
5. Казиев В.М. Введение в математику и информатику / В.М. Казиев // Интернет-университет информационных технологий – ИНТУИТ. БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 304 с.

*Стаття поступила в редакційну колегію 29.11.2009 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.***

## FOURIER'S ROWS IN COMPUTER GRAPHICS

**L. I. Kryshtopa**

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;  
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka street, 15;  
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: [math@nung.edu.ua](mailto:math@nung.edu.ua)*

*The paper is devoted to application of the Fourier's rows in computer graphics as two measured images can be represented, as a two measured signal, in spite of the fact that in an analog form this signal is endless, in discrete he is marked only in the points of bitmapped image. The algorithm of compression, used at format of saving of the JPEG image, is offered and developed, built on the basis of discrete cosines transformation, in avoidance of the Gibbs phenomenon. Actuality of researches of the periodic functions decomposed on a spectrum is grounded, that is the physical analogue of mathematical expositions.*

**Key words:** *The Fourier's rows, periodic functions, phenomenon of Gibbs, discrete transformation, cosine transformation, sine transformation, graphic image.*