

УДК 517.98

ОПЕРАЦІЯ ЗГОРТКИ НА ПРОСТОРИ, СПРЯЖЕНОМУ ДО АЛГЕБРИ $C(\mathcal{P}_*(X))$

Т. В. Васишин

*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com*

В роботі визначено і обґрунтовано коректність операції згортки на просторі, спряженому до алгебри Фреше, яка є поповненням алгебри всіх неперервних $$ -поліномів на комплексному банаховому просторі X відносно метрики, породженої системою рівномірних норм на замкнених кулях простору X .*

Ключові слова: *$*$ -поліном, згортка функціоналів, алгебра Фреше.*

1. Попередні відомості

Для опису спектрів алгебр диференційовних функцій на банаховому просторі важливою є наявність операції згортки лінійних функціоналів на алгебрі, яка пов'язана із так званим оператором зсуву. В даній роботі побудовано згортку лінійних неперервних функціоналів на алгебрі, породженій $*$ -поліномами (див. означення нижче) на комплексному банаховому просторі. Зауважимо, що кожен елемент такої алгебри є диференційовною у дійсному сенсі функцією.

Нехай X – комплексний банахів простір. Відображення $A: X^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$, де p і q – цілі невід'ємні числа, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, називають (p, q) -лінійним відображенням, якщо A є лінійним відносно кожного з перших p аргументів і антилінійним відносно кожного з останніх q аргументів. (p, q) -Лінійне відображення, яке є інваріантним відносно перестановок окремо перших p аргументів і останніх q аргументів, називають (p, q) -лінійним симетричним відображенням. Відображення $A: X \rightarrow \mathbb{C}$ називають (p, q) -поліномом, якщо воно є звуженням на діагональ деякого (p, q) -лінійного симетричного відображення $A_p: X^{p+q} \rightarrow \mathbb{C}$, тобто

$$P(x) = A_p \underbrace{\{x, \dots, x\}}_{p+q}$$

для кожного $x \in X$. Відображення A_p називають (p, q) -лінійним симетричним відображенням, асоційованим із (p, q) -поліномом P . Зауважи-

мо, що для (p, q) -поліномів виконується наступний аналог біноміальної формули:

$$P(x+y) = \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!} A_p(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}), \quad (1)$$

де

$$A_p(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}) = A_p \left(\underbrace{x, \dots, x}_j, \underbrace{y, \dots, y}_{p-j}, \underbrace{x, \dots, x}_k, \underbrace{y, \dots, y}_{q-k} \right)$$

для всіх $x, y \in X$. Простір усіх неперервних (p, q) -поліномів на просторі X із нормою

$$\|P\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |P(x)|$$

будемо позначати $\mathcal{P}^{(pq)}(X)$. Також для зручності будемо вважати, що $\mathcal{P}^{(00)}(X) = \mathbb{C}$. Зауважимо, що властивості (p, q) -лінійних відображень і (p, q) -поліномів вивчалися у роботах [1], [2], [3].

Відображення $P: X \rightarrow \mathbb{C}$ називають $*$ -поліномом, якщо його можна подати у вигляді

$$P = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N P_{pq},$$

де M і N – цілі невід'ємні числа і $P_{pq} \in \mathcal{P}^{(pq)}(X)$. Позначимо $\mathcal{P}_*(X)$ алгебру всіх неперервних $*$ -поліномів на просторі X .

Для кожного $r > 0$ визначимо норму

$$\|P\|_r = \sup_{\|x\| \leq r} |P(x)|$$

на алгебрі $\mathcal{P}_*(X)$ Розглянемо зліченну систему норм $\{\|\cdot\|_r : r > 0, r \in \mathbb{Q}\}$ і позначимо $C(\mathcal{P}_*(X))$ алгебру Фреше, яка є поповненням алгебри $\mathcal{P}_*(X)$ відносно метрики, породженої цією зліченною системою норм. В другому розділі даної роботи доведено коректність визначення і неперервність оператора зсуву на алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$, а також введено операцію згортки на $C(\mathcal{P}_*(X))$ і обґрунтовано її коректність.

2. Основні результати

Доведемо деякі допоміжні твердження.

Твердження 1. Для кожного неперервного $*$ -полінома P на комплексному банаховому просторі X і для кожного фіксованого $x \in X$ функція g_x , визначена формулою $g_x(y) = P(x+y)$, є неперервним $*$ -поліномом на X .

Доведення. Нехай $P = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N P_{pq}$, де $P_{pq} \in \mathcal{P}^{(pq)}(X)$. Тоді, згідно із формулою (1),

$$P(x+y) = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \frac{p!q!}{j!(p-j)!k!(q-k)!} A_{pq} (x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}),$$

де A_{pq} – це (p, q) -лінійні симетричні відображення, асоційовані із P_{pq} . Зауважимо, що при фіксованому $x \in X$ функція $A_{pq}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k})$ є неперервним (p, q) -поліномом від y . Тому g_x є неперервним $*$ -поліномом від y . ■

Зауважимо, що для кожної функції $f \in C(\mathcal{P}_*(X))$ і кожного фіксованого $x \in X$ виконується нерівність

$$\sup_{\|y\| \leq r} |f(x+y)| \leq \sup_{\|z\| \leq r+\|x\|} |f(z)| \quad (2)$$

для кожного $r > 0$.

Твердження 2. Для кожної функції $f \in C(\mathcal{P}_*(X))$ і для кожного фіксованого $x \in X$ функція g_x , визначена формулою $g_x(y) = f(x+y)$, належить алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$.

Доведення. Оскільки f належить алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$, скрізь щільною підалгеброю якої є $\mathcal{P}_*(X)$, то існує послідовність неперервних $*$ -поліномів $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, яка збігається до f відносно кожної з норм $\|\cdot\|_r$. Згідно із твердженням 1, функції $g_{n,x}(y) = f_n(x+y)$ є неперервними $*$ -поліномами. Згідно із нерівністю (2),

$$\sup_{\|y\| \leq r} |g_x(y) - g_{n,x}(y)| = \sup_{\|y\| \leq r} |f(x+y) - f_n(x+y)| \leq \sup_{\|z\| \leq r+\|x\|} |f(z) - f_n(z)|.$$

Звідси $\|g_x - g_{n,x}\|_r \leq \|f - f_n\|_{r+\|x\|} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тому послідовність неперервних $*$ -поліномів $\{g_{n,x}\}_{n=1}^\infty$ збігається до g_x відносно метрики алгебри $C(\mathcal{P}_*(X))$. Отже, $g_x \in C(\mathcal{P}_*(X))$. ■

Для кожного фіксованого $x \in X$ визначимо оператор зсуву $T_x: C(\mathcal{P}_*(X)) \rightarrow C(\mathcal{P}_*(X))$ формулою $(T_x f)(y) = f(x+y)$, де $f \in C(\mathcal{P}_*(X))$. Згідно із твердженням 2, функція $T_x f$ належить алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$. Із нерівності (2) отримуємо нерівність $\|T_x f\|_r \leq \|f\|_{r+\|x\|}$, із якої випливає неперервність оператора T_x .

Теорема 3. Нехай $f \in C(\mathcal{P}_*(X))$ і $\varphi \in C(\mathcal{P}_*(X))'$. Тоді функція $h(x) = \varphi(T_x f)$ належить алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$.

Доведення. Оскільки $f \in C(\mathcal{P}_*(X))$, то існує послідовність неперервних $*$ -поліномів $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, яка збігається до f . Нехай $h_n(x) = \varphi(T_x f_n)$. Для того, щоб показати, що функція h належить алгебрі $C(\mathcal{P}_*(X))$, потрібно довести, що h_n є неперервними $*$ -поліномами і послідовність $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ збігається до h .

Нехай $P = \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N P_{pq}$ є неперервним $*$ -поліномом. Покажемо, що функція $Q(x) = \varphi(T_x P)$ є неперервним $*$ -поліномом. Згідно із формулою (1) для P_{pq} , враховуючи лінійність φ ,

$$Q(x) = \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sum_{j=0}^p \sum_{k=0}^q \varphi(y \mapsto A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k})).$$

Зауважимо, що функція

$$w(x) = \varphi(y \mapsto A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k}))$$

є звуженням на діагональ (j, k) -лінійного симетричного відображення

$$B(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}) = \varphi(y \mapsto A_{P_{pq}}(x^j, y^{p-j}, x^k, y^{q-k})),$$

тому w є неперервним (j, k) -поліномом. Отже, Q є неперервним $*$ -поліномом. Таким чином, h_n є неперервними $*$ -поліномами.

Тепер покажемо, що $h_n \rightarrow h$ при $n \rightarrow \infty$. Оскільки φ є неперервним лінійним функціоналом, то існує $s > 0$, таке, що $\sup_{\|g\|_s \leq 1} |\varphi(g)|$ скінченний.

Позначимо останній супремум через $\|\varphi\|$. Тоді $|\varphi(g)| \leq \|\varphi\| \|g\|_s$ для кожної $g \in C(\mathcal{P}_*(X))$. Тому для кожного $r > 0$

$$\begin{aligned} \|h - h_n\|_r &= \sup_{\|x\| \leq r} |\varphi(T_x f) - \varphi(T_x f_n)| = \|\varphi\| \sup_{\|x\| \leq r} \sup_{y \leq s} |f(x+y) - f_n(x+y)| \\ &\leq \|\varphi\| \sup_{\|z\| \leq r+s} |f(z) - f_n(z)| = \|\varphi\| \|f - f_n\|_{r+s}. \end{aligned}$$

Оскільки $\|f - f_n\|_{r+s} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то $\|h - h_n\|_r \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отже, $h_n \rightarrow h$. Таким чином, $h \in C(\mathcal{P}_*(X))$. ■

Тепер визначимо згортку лінійних неперервних функціоналів $\psi, \varphi \in C(\mathcal{P}_*(X))'$ формулою

$$(\psi * \varphi)(f) = \psi(h(x)),$$

де

$$h(x) = \varphi(T_x f).$$

Коректність визначення згортки впливає із теореми 3. Як легко переконатися, $\psi * \varphi \in C(\mathcal{P}_*(X))'$.

Література

1. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces / J. Mujica // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford. – 1986. – 447 p.
2. Vasylyshyn T.V. Polarization formula for (p, q) -polynomials on a complex normed space / T.V. Vasylyshyn, A. V. Zagorodnyuk // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2011. – V. 17, № 1. – P. 75-83.
3. Васи́лишин Т.В. Поляризаційна формула та поляризаційна нерівність для (p, q) -лінійних відображень. / Т.В. Васи́лишин, А.В. Загороднюк // Карпат. мат. публ. – 2009. – Т. 1, № 2. – С. 128-144.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.12.2017 р.

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,
к.ф.-м.н., доцентом Бандурою А.І.*

THE CONVOLUTION OPERATION ON THE DUAL SPACE TO THE ALGEBRA $C(\mathcal{P}_*(X))$ **T. V. Vasylyshyn**

*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: taras.v.vasylyshyn@gmail.com*

We define and prove the correctness of the convolution operation on the dual space to the Fréchet algebra $C(\mathcal{P}_(X))$, which is the completion of the algebra of all continuous $*$ -polynomials on a complex Banach space X with respect to the metric, generated by the system of uniform norms on closed balls of the space X .*

Key words: *$*$ -polynomial, convolution of functionals, Fréchet algebra.*