УДК 519.1

РЕКУРСІЇ ТА ПОЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ ЧИСЛЕННЯ

Р. А. Заторський

Прикарпатський національний університет ім. В. Стефаника;
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка 57;
e-mail: romazz@rambler.ru

Узагальнюються класичні позиційні системи числення.

Ключові слова: *системи числення, трикутна матриця, парапермaнент.*

1. Вступ. Важко переоцінити роль позиційних систем числення у розвитку математики та обчислювальної техніки. Сьогодні відомі найрізноманітніші системи числення: позиційні, непозиційні, змішані, фібоначчієві, біноміальні, факторіальні тощо. Нова епоха у розвитку систем числення розпочалася із виникненням ЕОМ. При цьому бінарні системи числення та системи числення, основою яких є степені двійки, виявилися найзручнішими формами представлення чисел у різних обчислювальних системах.

Метою статті є дослідження зв'язків позиційних систем числення із нормальними числовими послідовностями, що генеруються деяким класом лінійних рекурентних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Такий підхід дозволяє уніфікувати дослідження позиційних та змішаних систем числення і запровадити ряд нових змішаних систем.

2. Позиційні системи числення k-го порядку

Кожну позиційну систему числення пов'яжемо із деяким вектором

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k), \tag{1}$$

цілі компоненти якого задовольняють нерівності

$$2 \le a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_k \ge 0. \tag{2}$$

Вектор (1) називатимемо основою системи числення k-го порядку.

Розглянемо лінійне рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k},\ u_{<0} = 0,$$

що задається вектором (1). Це рівняння, внаслідок того, що виконуються нерівності (2), генерує зростаючу нормальну числову послідовність (див. [1], стор 124)

$$u_0 = 1, u_1 = [a_1], u_2 = \begin{bmatrix} a_1 & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 \end{bmatrix}, \ldots, u_{k-1} = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \cdots\cdots\cdots & & & \\ \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} & \frac{a_{k-2}}{a_{k-3}} & \ldots & a_1 \end{bmatrix}_{k-1}.$$

Кожне ціле невід'ємне число n, за допомогою жадного алгоритму, можна однозначно подати у вигляді лінійної комбінації

$$n = \sum_{i=0}^{r} n_i u_i = \overline{n_r n_{r-1} \ldots n_1 n_0}_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)} .$$

Числа $n_i, i = 0,1,\ldots,r$ назвемо цифрами i-го розряду числа

$$\overline{n_r n_{r-1} \ldots n_1 n_0}_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)},$$

що є зображенням числа n у позиційній системі числення з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Причому, згідно з жадним алгоритмом, його цифри задовольняють нерівності:

$$0 \le n_i \le \left\lfloor \frac{u_{i+1} - 1}{u_i} \right\rfloor, i = 0,1,\ldots,r, \tag{3}$$

де символом $\lfloor \cdot \rfloor$ позначено цілу частину числа. Нерівності (3) можна спростити:

$$0 \le n_0 \le \frac{u_1 - 1}{u_0} = a_1 - 1, 0 \le n_i \le \left\lfloor \frac{u_{i+1} - 1}{u_i} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor \frac{a_1 u_i + a_2 u_{i-1} + \ldots + a_k u_{i-k+1} - 1}{u_i} \right\rfloor =$$

$$= a_1 + \left\lfloor \frac{a_2 u_{i-1} + \ldots + a_k u_{i-k+1} - 1}{a_1 u_{i-1} + a_2 u_{i-2} + \ldots + a_k u_{i-k}} \right\rfloor = a_1 .$$

Таким чином, цифри позиційної системи числення з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ задовольняють нерівності

$$0 \le n_0 \le a_1 - 1, 0 \le n_i \le a_1, i = 1,2,\ldots \tag{4}$$

Отже, перехід від нульового до першого розряду відбувається тоді, коли цифра $a_1 - 1$ нульового розряду збільшується на одиницю, тобто коли у натуральному ряді чисел зустрічається перший член нормальної числової послідовності $u_1 = a_1 u_0$. Перехід від першого до другого розряду відбувається, коли число

$$a_1^2 + a_2 - 1 = \overline{a_2 a_1 - 1}_{(a_1, a_2, \ldots, a_k)}$$

зростає на одиницю, тобто коли у натуральному ряді чисел зустрічається другий член послідовності $u_2 = a_1 u_1 + a_2 u_0$ і т.д. Отже, зображення натурального числа за допомогою позиційної системи числення з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ не може мати вигляд $\overline{\ldots a_1}$, чи вигляд $\overline{\ldots a_2 a_1}$ і т.д. чи, зрештою, вигляд $\overline{\ldots a_k \ldots a_2 a_1}$. Крім цього, очевидно, що такі зображення не можуть набувати також вигляду $\overline{\ldots a_k \ldots a_2 a_1 \ldots}$.

Зауваження 1. Позиційні системи числення k-го порядку з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ є змішаними позиційними системами, причому позиційні системи числення першого порядку з основою (q) співпадають із класичними системами числення з основою q.

Приклад 1. Розглянемо позиційну систему числення третього порядку з основою $(2,2,1)$. Рекурентне рівняння

$$u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2} + u_{n-3}$$

генерує нормальну числову послідовність

$$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 6, u_3 = 17, u_4 = 48, u_5 = 136, \ldots$$

Згідно з (4) цифра нульового розряду може набувати лише значення 0 і 1, а всі інші цифри значення із множини $\{0,1,2\}$, причому жодне число у цій системі числення не може мати закінчення $\overline{\ldots 2}$, $\overline{\ldots 22}$, $\overline{\ldots 221}$ чи $\overline{\ldots 221 \ldots}$.

Зобразимо кілька перших натуральних чисел у вигляді чисел з основою $(2,2,1)$:

$$1 = \overline{1}_{(2,2,1)}, 2 = \overline{10}_{(2,2,1)}, 3 = \overline{11}_{(2,2,1)}, 4 = \overline{20}_{(2,2,1)}, 5 = \overline{21}_{(2,2,1)}, 6 = \overline{100}_{(2,2,1)},$$
$$7 = \overline{101}_{(2,2,1)}, 8 = \overline{110}_{(2,2,1)}, 9 = \overline{111}_{(2,2,1)}, 10 = \overline{120}_{(2,2,1)}, 11 = \overline{121}_{(2,2,1)},$$
$$12 = \overline{200}_{(2,2,1)}, 13 = \overline{201}_{(2,2,1)}, 14 = \overline{210}_{(2,2,1)}, 15 = \overline{211}_{(2,2,1)}, 16 = \overline{220}_{(2,2,1)},$$
$$17 = \overline{1000}_{(2,2,1)}, 18 = \overline{1001}_{(2,2,1)}, 19 = \overline{1010}_{(2,2,1)}, 20 = \overline{1011}_{(2,2,1)}$$

3. Бінарні системи числення

Розглянемо важливий випадок, коли основа позиційної системи числення задається вектором $(1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$. Позаяк випадок, коли

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$$

тривіальний, бо може трактуватися як зображення натуральних чисел зарубками на паличці, то ми його опускаємо і розглядаємо лише ті випадки, коли виконуються нерівності

$$1 = a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_k \ge 0, a_2 + \ldots + a_k \ge 1.$$

У цьому випадку рекурентне рівняння

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \ldots + a_k u_{n-k}, u_{-1} = 1, u_{<-1} = 0$$

генерує числову послідовність

$$u_0 = 1, u_1 = a_1 + a_2 = 2, \ldots.$$

Цифрами цієї системи числення є лише нулі та одиниці, причому представлення чисел у цій системі числення не може містити послідовно стільки одиниць, скільки їх є у основі системи. Зауважимо також, що зображення числа у системі числення, основою якої є вектор, всі m компонент якого дорівнюють одиниці, не може закінчуватися двома, трьома і т.д. m одиницями. Такі системи числення хоч і є бінарними, але не є економними, бо через відповідні заборони для зображення числа потребують дещо більше бітів ніж звичайна двійкова система числення. Пригадаємо, що позиційну систему числення з основою $(1,1)$ називають фібоначчієвою системою числення.

Приклад 2. Порівняємо економність зображення кількох перших натуральних чисел відповідно у системах $(2), (1,1), (1,1,1)$:

$$1 = 1_{(2)} = 1_{(1,1)} = 1_{(1,1,1)}$$
$$2 = 10_{(2)} = 10_{(1,1)} = 10_{(1,1,1)}$$
$$3 = 11_{(2)} = 100_{(1,1)} = 100_{(1,1,1)}$$
$$4 = 100_{(2)} = 101_{(1,1)} = 101_{(1,1,1)}$$
$$5 = 101_{(2)} = 1000_{(1,1)} = 110_{(1,1,1)}$$
$$6 = 110_{(2)} = 1001_{(1,1)} = 1000_{(1,1,1)}$$
$$7 = 111_{(2)} = 1010_{(1,1)} = 1001_{(1,1,1)}$$
$$8 = 1000_{(2)} = 10000_{(1,1)} = 1010_{(1,1,1)}$$
$$9 = 1001_{(2)} = 10001_{(1,1)} = 1100_{(1,1,1)}$$
$$10 = 1010_{(2)} = 10010_{(1,1)} = 1101_{(1,1,1)}$$
$$11 = 1011_{(2)} = 10100_{(1,1)} = 10000_{(1,1,1)}$$

Зауваження 2. Позиційні системи числення k-го порядку з основою $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ узагальнюють теорему Цеккендорфа [2].

Зауважимо також, що позиційну бінарну систему числення можна побудувати також за допомогою послідовності простих чисел, якщо до неї долучити одиницю:

$$1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Цей факт випливає з того, що першими двома числами такої послідовності є одиниця і двійка та постулату Бертрана, який стверджує, що для довільного натурального числа $n \geq 2$ існує просте число p^*, таке, що виконуються нерівності $n < p^* < 2n$. Справді, нехай n – деяке натуральне число і p – найбільше просте число, що його не перевищує. Тоді, внаслідок постулату Бертрана нерівність $p < 2p \leq n$ неможлива.

Література

1. Заторський Р.А. Застосування параперманентів до лінійних рекурентних рівнянь / Р.А. Заторський, І.М. Литвиненко // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №5. – С. 122-128.
2. Zeckendorf E. Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas / E. Zeckendorf // Bulletin de la Societe Royale des Sciences de Liege. – 1972. – №41. – P. 179-182.

Стаття поступила в редакційну колегію 24.11.2009 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Дроздом Ю.В.***

RECURSIONS AND POSITIONAL NOTATIONS

R. A. Zatorsky
Precarpathian National University by V.Stefanic;
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko street, 57;
e-mail: romazz@rambler.ru

Classic positional notations are summarized.
Key words: *pozitional notations, parapermanents, triangular matrix.*