УДК 517.925.3

ПРО СТІЙКІСТЬ У СИСТЕМАХ З ІМПУЛЬСАМИ

С. І. Гургула[1], Р. І. Собкович[2]

[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15; тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@ nung.edu.ua

[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; Україна, 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел. +380 (342) 59-60-16;e-mail: algeo @ pu.if.ua

За допомогою другого методу Ляпунова одержано достатні умови стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості тривіального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Ключові слова: *імпульсна дія, стійкість, функція Ляпунова.*

Досліджуватимемо питання стійкості тривіального розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad t \neq t_i , \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} \equiv x(t_i + 0) - x(t_i) = I_i(x), \end{aligned} \tag{1}$$

де $t \geq t_0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in R^n$, $I_i \in R^n$, $i = 1, 2, \dots$.

Функція $f(t, x)$ вважається заданою в області

$$Z = \{t \geq t_0, \ x \in \bar{J}_h\}, \tag{2}$$

де $\bar{J}_h = \{x \in R^n, \|x\| \leq h, h > 0\}$ і $f(t, 0) = 0$, $t \geq t_0$, функції $I_i(x)$ визначені і неперервні в кулі $\bar{J}_h$, $I_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Відносно послідовності моментів часу $\{t_i\}$ припускаємо, що $t_i > t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, і $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Введемо до розгляду функцію $i(t)$, $t \geq t_0$, яка означає кількість імпульсних збурень на проміжку $[t_0, t]$, тобто $i(t) = i$, якщо $t_i < t \leq t_{i+1}$. Тоді функція $\dfrac{i(t)}{t - t_0}$ означатиме відносну частоту імпульсних збурень; припустимо, що існує скінченна границя

$$\lim_{t \to \infty} \frac{i(t)}{t - t_0} = p > 0 . \tag{3}$$

Функція Ляпунова, про яку йтиметься далі, вважається скалярною і неперервно диференційовною по всіх своїх аргументах; функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ вважаються неперервними, причому $\varphi(0) = \psi(0) = 0$,

$\varphi(s) > 0, \psi(s) > 0$ при $s > 0$, функція $\rho(t)$ – заданою і неперервною при $t \geq t_0$.

Справедливі такі твердження.

Теорема 1. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$, функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \leq 0$ такі, що повсюдно в області (2) виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V, f \rangle \leq \rho(t)\varphi(V), \tag{4}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \leq \psi(V(t_i, x)), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

а також можна вказати константу ρ_0 таку, що при $t > t_0$

$$\frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} \rho(\tau) d\tau \leq -\rho_0 . \tag{6}$$

Тоді, якщо за деякого $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконана нерівність

$$\int_{a}^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{\rho_0}{p} - \gamma, \quad \gamma > 0, \tag{7}$$

то тривіальний розв’язок системи (1) асимптотично стійкий за Ляпуновим.

Доведення. Нехай $0 < \varepsilon < h$ і $l = \inf\limits_{t \geq t_0,\, \|x\| \geq \varepsilon} V(t, x) \leq a_0$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $m = \sup\limits_{\|x\| < \delta} V(t_0, x) < l$, і нехай $x(t)$, $x(t_0) = x_0 \in J_\delta$ – довільний розв’язок системи (1). Зауважимо, оскільки (3) існує таке $T_0 > t_0$, що для всіх $t > T_0$ виконується нерівність $\left|\frac{i(t)}{t - t_0} - p\right| < \frac{\gamma_1 p^2}{\rho_0 + \gamma p}$, де $0 < \gamma_1 < \gamma$. Для таких t маємо

$$\left|\frac{i(t)}{(t - t_0)p} - 1\right| < \frac{\gamma_1 p}{\rho_0 + \gamma p}, \tag{8}$$

а також

$$p\left(1 - \frac{\gamma_1 p}{\rho_0 + \gamma p}\right) < \frac{i(t)}{t - t_0} < p\left(1 + \frac{\gamma_1 p}{\rho_0 + \gamma p}\right). \tag{9}$$

Враховуючи неперервну залежність розв’язків системи (1) від початкових даних, можна вважати, що x_0 вибрано таким, що $x(t) \in J_\varepsilon$ для $t \in [t_0, T_0]$. Покажемо, що $x(t) \in J_\varepsilon$ і при $t > T_0$. Припустимо протилежне: $x(t)$ з часом покине кулю J_ε. Розглянемо функцію $v(t) = V(t, x(t))$. Оскільки в нерівності (4) $v'(t)$ недодатна на проміжках $(t_{i-1}, t_i]$, отже $v(t)$ – незростаюча на цих проміжках, а тому вийти за межі кулі J_ε (для цього повинна здійснитись нерівність $v(t) \geq l$) розв’язок може тільки за рахунок імпульсу, тобто в один з моментів часу t_i. Нехай t_k – перший момент часу, коли $x(t)$ покине кулю J_ε, тобто $v(t)<l$, $t\in[t_0\,,\,t_k]$ і $v(t_k+0)\geq l$ ($t_k>T_0$). Із нерівності (4) впливає, що $v'(t)\leq\rho(t)\varphi(v(t))$, $t\neq t_i$, звідки одержуємо

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{v'(\tau)d\tau}{\varphi(v(\tau))}\leq\int_{t_{i-1}}^{t_i}\rho(\tau)d\tau$$

або після заміни $v(\tau)=s$ для $i=1,\,2,\,\ldots,\,k$ будемо мати:

$$\int_{v(t_{i-1}+0)}^{v(t_i)}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq\int_{t_{i-1}}^{t_i}\rho(\tau)d\tau\,. \tag{10}$$

Враховуючи, що оскільки (5) $v(t_i+0)\leq\psi(v(t_i))$, із нерівності (7) для $i=1,\,2,\,\ldots,\,k$ отримуємо

$$\int_{v(t_i)}^{v(t_i+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq\frac{\rho_0}{p}-\gamma\,. \tag{11}$$

Шляхом почленного додавання нерівностей (10) і (11) одержуємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t_k+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq k\left(\frac{\rho_0}{p}-\gamma\right)+\int_{t_0}^{t_k}\rho(\tau)d\tau$$

або

$$\frac{1}{t_k-t_0}\int_{v(t_0)}^{v(t_k+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq\frac{i(t_k+0)}{t_k-t_0}\left(\frac{\rho_0}{p}-\gamma\right)+\frac{1}{t_k-t_0}\int_{t_0}^{t_k}\rho(\tau)d\tau\;, \tag{12}$$

що з урахуванням (6), (8) і (9) дає підстави записати

$$\frac{1}{t_k-t_0}\int_{v(t_0)}^{v(t_k+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}\leq\frac{i(t_k+0)}{t_k-t_0}\left(\frac{\rho_0}{p}-\gamma\right)-\rho_0=\rho_0\left(\frac{i(t_k+0)}{(t_k-t_0)p}-1\right)-\gamma\frac{i(t_k+0)}{t_k-t_0}<$$

$$<\rho_0\frac{\gamma_1 p}{\rho_0+\gamma p}-\gamma p\left(1-\frac{\gamma_1 p}{\rho_0+\gamma p}\right)=p(\gamma_1-\gamma)$$

або

$$\frac{1}{t_k-t_0}\int_{v(t_0)}^{v(t_k+0)}\frac{ds}{\varphi(s)}<-p(\gamma-\gamma_1)<0\,. \tag{13}$$

Звідси $v(t_k+0)<v(t_0)\leq m<l$, що суперечить зробленому припущенню. Залишилось довести, що $\lim\limits_{t\to\infty}v(t)=0$. Але, оскільки $v(t)$ спадає на кожному з проміжків $(t_{i-1}\,,\,t_i]$, досить показати, що $v(t_i+0)\to 0$ при $i\to\infty$. Для цього нерівність (13) запишемо у виді $\int_{v(t_i+0)}^{v(t_0)}\frac{ds}{\varphi(s)}>p(\gamma-\gamma_1)(t_i-t_0)$. Тоді $\lim\limits_{i\to\infty}\int_{v(t_i+0)}^{v(t_0)}\frac{ds}{\varphi(s)}=\infty$, що можливо тільки за умови, що $v(t_i+0)\to 0$ при $i\to\infty$. Теорему доведено.

Зауважимо, що якщо замість умови (3) вимагати виконання нерівності $\frac{i(t)}{t-t_0} \le p$ при $t > t_0$, а в нерівності (7) покласти $\gamma = 0$, то легко довести, що розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) буде стійким за Ляпуновим. Аналогічно доводиться теорема 2.

Теорема 2. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(t, x)$, функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \ge 0$ такі, що повсюдно в області (2) виконані нерівності (4) і (5), а також можна вказати константу ρ_0 таку, що при $t > t_0$

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)d\tau \le \rho_0 \ . \tag{14}$$

Тоді, якщо за деякого $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконана нерівність

$$\int_{\psi(a)}^{a}\frac{ds}{\varphi(s)} \ge \frac{\rho_0}{p} + \gamma \ , \qquad \gamma > 0 \ , \tag{15}$$

то тривіальний розв'язок системи (1) асимптотично стійкий.

Знову ж таки, якщо замість умови (3) вимагати виконання нерівності $\frac{i(t)}{t-t_0} \ge p > 0$ за всіх досить великих t, а в нерівності (15) покласти $\gamma = 0$, то можна гарантувати стійкість тривіального розв'язку системи (1).

Переходимо до теорем про нестійкість. Функція Ляпунова $V(t, x)$, яка фігурує в цих теоремах, володіє такими властивостями:

а) область додатності $V(t, x)$ $D = \{(t, x) \in Z, \ V(t, x) > 0\}$ при всякому $t \ge t_0$ має непорожній відкритий переріз гіперплощиною $t = const$, який дотикається до початку координат;

б) в області D $V(t, x)$ обмежена; позначимо $a_0 = \sup\limits_{(t, x) \in D} V(t, x)$.

Теорема 3. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t, x)$, яка володіє властивостями а) і б), функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \le 0$ такі, що в області D виконані нерівності

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \langle grad\, V, f \rangle \ge \rho(t)\varphi(V) \ , \tag{16}$$

$$V(t_i, x + I_i(x)) \ge \psi(V(t_i, x)) \ , \quad i = 1, 2, \dots \ , \tag{17}$$

а також можна вказати константу ρ_0 таку, що при $t > t_0$

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\rho(\tau)d\tau \ge -\rho_0 \ . \tag{18}$$

Тоді, якщо при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконана нерівність

$$\int_{a}^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{\rho_0}{p} + \gamma \ , \tag{19}$$

то тривіальний розв'язок системи (1) нестійкий.

Доведення. Нехай $\delta > 0$ як завгодно мале. За умовою знайдеться $x_0 \in J_\delta$ таке, що $V(t_0 \, , \, x_0) > 0$. Покажемо, що розв'язок $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, з часом вийде за межі кулі J_h. Припустимо протилежне: $x(t) \in J_h$, $t \geq t_0$. Тоді $(t, x(t)) \in D$. Справді, нехай $v(t) = V(t, x(t))$ і $t^* \in (t_i \, , \, t_{i+1}]$ – момент часу, коли вперше виконається рівність $v(t) = 0$. Оскільки (16) $v'(t) \geq \rho(t)\varphi(v(t))$, $t \neq t_i$, тоді

$$\int_{t_i}^{t^*} \frac{v'(\tau)d\tau}{\varphi(v(\tau))} \geq \int_{t_i}^{t^*} \rho(\tau)d\tau \ .$$

Звідси після заміни $s = v(\tau)$ і з урахуванням (18) випливає

$$\int_{v(t^*)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \rho_0 (t^* - t_i),$$

що неможливо, бо $v(t^*) = 0$, а оскільки (19) невласний інтеграл $\int_{0}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)}$ розбіжний. Отже $(t, x(t)) \in D$, що означає що $v(t)$– обмежена функція. Діючи таким же чином як і при доведенні теореми 1, легко отримати нерівність (для всякого $t > t_0$)

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{i(t)}{t - t_0} \left(\frac{\rho_0}{p} + \gamma \right) + \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)d\tau \ .$$

Оскільки ми можемо вважати, що для всіх досить великих t виконані нерівності (7) і (8), то з останньої нерівності одержуємо

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} > p(\gamma - \gamma_1)(t - t_0) \, , \quad 0 < \gamma_1 < \gamma \ ,$$

що суперечить обмеженості функції $v(t)$ при $t \to \infty$. Теорему доведено.

Аналогічно може бути доведена така теорема.

Теорема 4. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(t, x)$, наділена властивостями а) і б), функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ і $\rho(t) \geq 0$ такі, що в області D виконані нерівності (16) і (17), а також можна вказати константу ρ_0 таку, що при $t > t_0$

$$\frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)d\tau \geq \rho_0 \, . \tag{20}$$

Тоді, якщо при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0, \, a_0]$

$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq \frac{\rho_0}{p} - \gamma \, , \tag{21}$$

то розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) нестійкий.

Зауважимо, що твердження теорем про нестійкість залишаться в силі, якщо під p розуміти константу, таку що для всіх досить великих t виконана нерівність $\frac{i(t)}{t-t_0} \geq p$ (в теоремі 3), або нерівність $\frac{i(t)}{t-t_0} \leq p$ (в теоремі 4).

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Самойленко А.М. Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 11. – С. 1995-2001.
3. Гургула С.І. Про стійкість розв'язків імпульсних систем / С.І. Гургула, М.О. Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип.23. – С. 33-40.
4. Гургула С.І. Про стійкість в системах диференціальних рівнянь з імпульсною дією / С.І. Гургула, Р.І. Собкович // Наукові вісті Інституту менеджменту та економіки «Галицька академія». – 2007. – № 2(12). – С. 29-33.
5. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова в системах з імпульсною дією / С.І. Гургула, І.Й. Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2008. – №1(1). – С. 9-15.

Стаття поступила в редакційну колегію 09.07.2009 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
професором ***Перестюком М.О.***

ABOUT STABILITY IN THE SYSTEMS WITH IMPULSES

S. I. Gurgula[1], R. I. Sobkovych [2]

[1]*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*
76019, *Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka street,* 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]*PreCarpathian National University by Vasil Stefanic;*
76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko street, 57;
ph. (3422) 59-60-16; e-mail: algeo@pu.if.ua

With the help of Liapunov's secondary method were issued criteries of stability, asymptotic stability and non-stability of simple solution of the elementary system of differential equations with impulsive action in the fixed moments of time.

Key words: *impulsive action, stability, function of Liapunov.*