УДК 517.968.7

МЕТОД ЧАСТИННОГО УСЕРЕДНЕННЯ В СИСТЕМАХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОДВІЙНИМИ ІМПУЛЬСАМИ

С. С. Гулька

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15; тел. +380 (3422) 4-21-23, e-mail: math@nung.edu.ua

До систем інтегро-диференціальних рівнянь із подвійною імпульсною дією застосовується один з варіантів методу усереднювання Крилова-Боголюбова-Митропольського – метод замороження.

Ключові слова: *система інтегро-диференціальних рівнянь, подвійна імпульсна дія, усереднювання, похибка.*

Системи інтегро-диференціальних рівнянь з подвійною імпульсною дією описують численні процеси фізичних, технічних, біологічних явищ, які піддаються і піддавались у процесі своєї еволюції короткочасним збуренням. Важливою властивістю математичної моделі, записаної за допомогою інтегро-диференціальної системи з подвійною імпульсною дією є те, що вона дозволяє враховувати не тільки процес в даний момент часу, але його передісторію і ті збурення, які відбувались в цій передісторії.

Розробка нових методів усереднення опирається на класично розроблену теорію систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією, запропоновану А. М. Самойленком і М. О. Перестюком [1-4].

В даному дослідженні до систем інтегро-диференціальних рівнянь із подвійною імпульсною дією застосовується метод замороження, як один з варіантів методу усереднювання Крилова-Боголюбова-Митропольського [5, 6]. Суть цього методу полягає в тому, що системі інтегро-диференціальних рівнянь із подвійною імпульсною дією ставиться у відповідність інша заморожена система диференціальних рівнянь з подвійною імпульсною дією, яка в подальшому усереднюється. Наводяться умови, за яких різниця між розв’язками точної, замороженої і усереднюваної систем за достатньо малого параметра ε стає як завгодно малою на як завгодно великому, проте скінченому, інтервалі часу.

Розглянемо систему інтегро-диференціальних рівнянь із подвійною імпульсною дією

$$\begin{aligned} & x'(t) = \varepsilon F\left(t,\, x(t),\, \int\limits_0^t K(t,\, s,\, x(s))ds + \sum_{0<s_j<t} J_j\left(x\left(s_j - 0\right)\right)\right), \quad t \neq t_i\,, \\ & \Delta x\big|_{t=t_i} = \varepsilon G_i(x)\,, \quad i,j = 0,\,1,\,\ldots, \end{aligned} \qquad (1)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр; функції $F(t, x, y)$, $K(t, s, x)$, $J_j(x)$, $G_i(x)$ визначені і неперервні в області
$R = \{t, s \in [0, T], \; x = (x_1, \ldots, x_n) \in D, \; y = (y_1, \ldots, y_m) \in D_1\}$ (D, D_1 – обмежені області евклідових просторів E_n і E_m відповідно; $T = \varepsilon^{-1} L$, де L – довільна стала). Розв'язок системи (1) задовольняє початковій умові

$$x(0) = x_0 . \tag{2}$$

Системі (1) ставимо у відповідність заморожену систему

$$\begin{aligned} & y'(t) = \varepsilon F\left(t, \, y(t), \, \int_0^t K(t, \, s, \, y(t)) ds + \sum_{0 < s_j < t} J_j \left(y(s_j - 0) \right) \right), \quad t \neq t_i \, , \\ & \Delta y \big|_{t = t_i} = \varepsilon G_i(y) \, , \quad i, j = 0, 1, \ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

Наведемо теорему, суть якої полягає в тому, що за досить загальних умов різницю $|x(t) - y(t)|$ можна зробити як завгодно малою за достатньо малого $\varepsilon > 0$ на як завгодно великому інтервалі часу $0 < t < T$.

<u>Теорема 1.</u> Нехай функції $F(t, x, z)$, $K(t, s, x)$, $J_j(x)$, $G_i(x)$ задовольняють умовам: для деяких областей D, D_1 можна вказати такі додатні константи M_1, M_2, M_3, M_4 та λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, що за всіх дійсних значень $t \geq 0$, $t_i \geq 0$, $s_0 < s < t$, $s_0 < s_j < t$ для будь-яких x, z, x', z' із цих областей виконані нерівності

$$|F(t, x, z)| \leq M_1 , \quad |K(t, s, x)| \leq M_2 , \quad |J_j(x)| \leq M_3 , \quad |G_i(x)| \leq M_4 ,$$

$$|F(t, x, z) - F(t, x', z')| \leq \lambda_1 |x - x'| + \lambda_2 |z - z'| ,$$

$$|K(t, s, x) - K(t, s, x')| \leq \lambda_3 |x - x'| ,$$

$$|J_j(x) - J_j(x')| \leq \lambda_4 |x - x'|, \quad |G_i(x) - G_i(x')| \leq \lambda_5 |x - x'| .$$

Тоді будь-якому як завгодно малому η та як завгодно великому L можна поставити у відповідність таке додатне ε_0, що для розв'язків $x(t)$, $y(t)$ систем (1) і (3) відповідно в інтервалі $0 < t < \dfrac{L}{\varepsilon}$ справедлива нерівність

$$|x(t) - y(t)| < \eta . \tag{4}$$

Побудуємо для системи (2) відповідну усереднену систему

$$\begin{aligned} & z'(t) = \varepsilon F_0 \left(z(t), \, \int_0^t K_0(s, \, z(t)) ds + J_j^0 \left(z(s_j - 0) \right) \right), \quad t \neq t_i \, , \\ & \Delta z \big|_{t = t_i} = \varepsilon G_j^0(z) \, , \quad i, j = 0, 1, \ldots, \end{aligned} \tag{5}$$

$$F_0 \left(z(t), \, \int_0^t K_0(s, \, z(t)) ds + J_j^0 \left(z(s_j - 0) \right) \right) =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t F\left(t, \, z(t), \, \int_0^t K(t, \, s, \, z(s)) ds + \sum_{0 < s_j < t} J_j \left(x(s_j - 0) \right) \right);$$

$$K_0(s,\, z(t)) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t K(t,\, s,\, z(s))ds\ ;$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{0<s_j<t} J_j\left(z\left(s_j-0\right)\right)}{t} = J_j^0\left(z\left(s_j-0\right)\right);$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{0<t_i<t} G_i\left(z\left(t_i-0\right)\right)}{t} = G_i^0\left(z\left(t_i-0\right)\right).$$

Тоді має місце теорема, суть якої полягає в тому, що за досить загальних умов різницю $|x(t)-z(t)|$ можна зробити як завгодно малою за достатньо малого $\varepsilon>0$ на як завгодно великому інтервалі часу $0<t<T$. До того ж, оскільки $z(t)$ залежить від t через εt, то необхідно щоб протягом вказаного інтервалу часу функція $z(t)$ могла встигнути відійти від свого початкового значення, тобто щоб цей інтервал був достатньо довгим з точки зору змінювання $z(t)$; за T треба взяти величину порядку $\frac{L}{\varepsilon}$, де L можна зробити як завгодно великим за достатньо малого ε.

Теорема 2. Нехай функції $F(t,\, x,\, u)$, $K(t,\, s,\, x)$, $J_j(x)$, $G_i(x)$ задовольняють умовам:

а) для деяких областей D, D_1 можна вказати такі додатні сталі M_1, M_2, M_3, M_4 та $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, що за всіх дійсних значень $t\ge 0$, $t_i\ge 0$, $s_0<s<t$, $s_0<s_j<t$ для будь-яких x, u, x', u' із цих областей виконані нерівності

$$|F(t,\, x,\, u)|\le M_1,\quad |K(t,\, s,\, x)|\le M_2,\quad |J_j(x)|\le M_3,\quad |G_i(x)|\le M_4,$$

$$|F(t,\, x,\, u)-F(t,\, x',\, u')|\le \lambda_1|x-x'|+\lambda_2|u-u'|,$$

$$|K(t,\, s,\, x)-K(t,\, s,\, x')|\le \lambda_3|x-x'|,$$

$$|J_j(x)-J_j(x')|\le \lambda_4|x-x'|,\quad |G_i(x)-G_i(x')|\le \lambda_5|x-x'|\ ;$$

б) в областях D, D_1 існують рівномірні щодо x, u границі

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(t,\, x,\, u)dt = F_0(x,\, u),\qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t K(t,\, s,\, x)ds = K_0(s,\, x),$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{0<s_j<t} J_j\left(x\left(s_j-0\right)\right) = J_j^0\left(x\left(s_j-0\right)\right),\quad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{0<t_i<t} G_i\left(x\left(t_i-0\right)\right) = G_i^0\left(x\left(t_i-0\right)\right).$$

Тоді будь-яким як завгодно малим ρ, η та як завгодно великому L можна поставити у відповідність таке додатне ε_0, що розв'язок $z(t)$ системи

$$z'(t) = \varepsilon F_0\left(z(t),\, \int_0^t K_0(s,\, z(t))ds + J_j^0\left(z\left(s_j-0\right)\right)\right),\qquad t\ne t_i,$$

$$\Delta z\big|_{t=t_i} = \varepsilon G_i^0(z),\qquad i,\ j=0,1,\ldots,$$

визначений на інтервалі $0 < t < \infty$ і лежить в області D разом зі своїм ρ-околом, а для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в інтервалі $0 < t < \dfrac{L}{\varepsilon}$ справедлива нерівність

$$\left|x(t) - z(t)\right| < \eta ,$$

в якій $x(t)$ – розв'язок системи

$$x'(t) = \varepsilon F\left(t,\, x(t),\, \int_0^t K(t,\, s,\, x(s))ds + \sum_{0<s_j<t} J_j\left(x\left(s_j - 0\right)\right)\right), \quad t \neq t_i \ ,$$

$$\Delta x\big|_{t=t_i} = \varepsilon G_i(x)\,, \quad i\,, j = 0,\, 1,\, \ldots,$$

що дорівнює $z(0)$ при $t = 0$.

Література

1. Мышкис А.Д. Системы с толчками в заданные моменты времени / А.Д. Мышкис, А.М. Самойленко // Математический сборник. – 1974. – Т.74, №2.
2. Самойленко А.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Дифференциальные уравнения. – 1977. – №11.
3. Самойленко А.М. Периодические решения слабо нелинейных систем с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Дифференциальные уравнения. – 1978. – №6.
4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. – К.: КГУ, 1980. – 80 с.
5. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Физматгиз, 1963.
6. Митропольський Ю.О. Методи нелінійної механіки / Ю.О. Митропольський. – К.: Наукова думка, 2002.

Стаття поступила в редакційну колегію 09.07.2009 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
професором ***Перестюком М.О.***

THE METHOD OF PART MIDDLING IN THE INTEGRAL-DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH DOUBLE IMPULSIVE ACTION

S. S. Gulka
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, *Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka street,* 15;
ph. +380 (3422) 42123; e-mail: math@nung.edu.ua

The method of middling by Crilov-Bogolubov-Mitropopolsky is applied to the systems of integral-differential equalizations with double impulsive action.

Key words: *system of integral-differential equalizations, double impulsive action, middling, error.*