УДК 517.53

ПРО МНОЖИНУ ЗНАЧЕНЬ ВЕЛИЧИН ДЕФЕКТІВ ДЛЯ ЦІЛОЇ КРИВОЇ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Я. І. Савчук

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math @ nung. edu. ua

Показано, що множина значень величин дефектів для довільної цілої кривої скінченного порядку не більше ніж зліченна, хоча множина не колінеарних між собою дефектних векторів для такої кривої може мати потужність континуум.

Ключові слова: *ціла крива, характеристика росту, функція наближення, неванліннівський дефектний вектор, величина дефекту.*

В даній роботі використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1].

Водночас, зупинимось на деяких основних поняттях.

Цілою кривою називається голоморфне відображення $\vec{G}: \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}^p$, де p – натуральне число, більше за одиницю. Отже, p-вимірна ціла крива має вигляд $\vec{G}(z) = (g_1(z),\, g_2(z),\, \dots,\, g_p(z))$, де компоненти $g_1(z)$, $g_2(z)$, …, $g_p(z)$ – цілі (тобто аналітичні в усій комплексній площині) функції. Вважатимемо їх лінійно незалежними і без спільних нулів.

Для p-вимірної цілої кривої $\vec{G}$ *характеристика росту* $T(r, \vec{G})$ та *функція наближення* $m(r, \vec{a}, \vec{G})$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$ визначаються рівностями

$$T(r, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left\| \vec{G}(re^{i\varphi}) \right\| d\varphi,$$

$$m(r, \vec{a}, \vec{G}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\left\| \vec{G}(re^{i\varphi}) \right\| \cdot \|\vec{a}\|}{\left| \vec{G}(re^{i\varphi}) \cdot \vec{a} \right|} d\varphi .$$

Розглянемо
$$\delta(\vec{a}, \vec{G}) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, \vec{a}, \vec{G})}{T(r, \vec{G})} . \qquad (1)$$

Якщо $\delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0$, то $\vec{a}$ називається *неванліннівським дефектним вектором.* При цьому $\delta(\vec{a}, \vec{G})$ називається *величиною дефекта*.

Позначимо через $D(\vec{G}) = \{\vec{a} \in \boldsymbol{C}^p \setminus \{\vec{0}\} : \delta(\vec{a}, \vec{G}) > 0\}$ множину неванліннівських дефектних векторів цілої кривої $\vec{G}$.

Порядком цілої кривої $\vec{G}$ називається величина $\rho = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\ln T(r, \vec{G})}{\ln r}$.

Система векторів із $\boldsymbol{C}^p$ називається *допустимою*, якщо довільні p векторів із цієї системи лінійно незалежні.

Легко бачити, що $m\left(r,\lambda\vec{a},\vec{G}\right)=m\left(r,\vec{a},\vec{G}\right)$ при всіх $\lambda \neq 0$, тобто величини дефектів для двох довільних колінеарних векторів рівні.

Для цілих кривих мають місце перша і друга основні теореми (див. [2]). З другої основної теореми випливає, що допустима система неванліннівських дефектних векторів не більше ніж зліченна.

Відносно множини $D\left(\vec{G}\right)$ для цілих кривих скінченного порядку отримано такий результат (див. [3], [4]).

Теорема А. *Для того, щоб множина $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{C}^p$ збігалася з множиною $D\left(\vec{G}\right)\cup\left\{\vec{0}\right\}$ для деякої p-вимірної цілої кривої $\vec{G}$ скінченного додатного порядку, необхідно і достатньо, щоб $\boldsymbol{A}$ була не більше ніж зліченним об'єднанням підпросторів $\boldsymbol{A}_j \subset \boldsymbol{C}^p$ розмірності $\leq p-1$.*

З цієї теореми випливає, що при $p \geq 3$ існує ціла крива скінченного порядку, для якої множина неколінеарних між собою неванліннівських дефектних векторів має потужність континуум. Тому постає природнє запитання, чи матиме таку ж потужність множина *величин дефектів.*

Результатом даної статті є наступна теорема.

Теорема. *Для довільної кривої $\vec{G}$ скінченного порядку множина $\delta\left(\boldsymbol{C}^p \setminus \left\{\vec{0}\right\},\vec{G}\right)$ значень величин дефектів не більше ніж зліченна.*

Доведення. Якщо ціла крива $\vec{G}$ не трансцендентна, тобто така, що $T\left(r,\,\vec{G}\right)=O(\ln r),\ r\to\infty$, то усі компоненти цілої кривої можна вважати поліномами, і, як не важко бачити, для довільного $\vec{a}\in\boldsymbol{C}^p\setminus\left\{\vec{0}\right\}$ виконується $\delta\left(\vec{a},\,\vec{G}\right)=\dfrac{m}{n}$, де m – довільне ціле число між 0 і n, а $n=\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{T\left(r,\,\vec{G}\right)}{\ln r}$, тобто множина $\delta\left(\boldsymbol{C}^p \setminus \left\{\vec{0}\right\},\vec{G}\right)$ в цьому випадку скінченна.

Отже, доводимо нашу теорему для випадку трансцендентної цілої кривої $\vec{G}$, тобто такої, що $T\left(r,\,\vec{G}\right)=o(\ln r),\ r\to\infty$.

Припустимо, що існує ціла крива $\vec{G}$ скінченного порядку, в якої множина $\delta\left(\boldsymbol{C}^p \setminus \left\{\vec{0}\right\},\vec{G}\right)$ незліченна. Для кожного $\alpha\in\delta\left(\boldsymbol{C}^p \setminus \left\{\vec{0}\right\},\vec{G}\right)$ виберемо рівно по одному вектору $\vec{a}=\vec{a}(\alpha)\in\boldsymbol{C}^p\setminus\left\{\vec{0}\right\}$, такому що $\delta(\vec{a})=\alpha$. Позначимо цю множину через Γ. Вона незліченна, але будь-яка допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система векторів, яка належить Γ, не більше ніж зліченна. Будь-які два вектори із Γ лінійно незалежні, оскільки при $\vec{a}'=\lambda\,\vec{a}''$ маємо $\delta(\vec{a}')=\delta(\vec{a}'')$. Оскільки довільна допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система векторів із Γ не більше ніж зліченна, то (див. [4]) існує така не більше ніж зліченна множина підпросторів $\boldsymbol{B}_j\subset\boldsymbol{L}=\boldsymbol{C}^p$, $\dim\boldsymbol{B}_j\leq p-1$, що $\Gamma\in\bigcup\limits_j\boldsymbol{B}_j$, а при $card\,\boldsymbol{B}_j\geq 2$ множина $\Gamma\cap\boldsymbol{B}_j$ містить незліченну допустиму в $\boldsymbol{B}_j$ систему векторів. Оскільки Γ незліченна і довільні два вектори із Γ

лінійно незалежні, то серед вказаних підпросторів $\boldsymbol{B}_j$ обов'язково знайдеться такий $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_n$, що $\dim\boldsymbol{B}=q\geq 2$. Відповідну незліченну підмножину із $\Gamma\cap\boldsymbol{B}$, яка допустима в $\boldsymbol{B}$, позначимо через M. Виберемо лінійно незалежні вектори $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_q$ із $\boldsymbol{B}$ та розглянемо для довільного вектора $\vec{b}=\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q\in\boldsymbol{B}$ вектор $\vec{\lambda}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_q)$.

Зауважимо, що множина $\mathrm{K}_M=\left\{\delta(\vec{b}):\vec{b}\in M\right\}$ незліченна, оскільки $M\subset\Gamma$, і тому $\delta(\vec{b}')\neq\delta(\vec{b}'')$ при $\vec{b}'\in M$, $\vec{b}''\in M$, $\vec{b}'\neq\vec{b}''$. Очевидно, існує таке $\delta_0\in\mathrm{K}_M$ і таке $\varepsilon>0$, що множина $\mathrm{K}_0=\mathrm{K}_M\cap[\alpha_0+\varepsilon,+\infty)$є незліченною.

Розглянемо в $\boldsymbol{C}^q$ вектор-функцію $\vec{G}_1(z)=\left(\vec{G}(z)\vec{b}_1,\ldots,\vec{G}(z)\vec{b}_q\right)\cdot\Phi(z)$, де $\Phi(z)$ – деяка мероморфна в $\boldsymbol{C}$ функція (див. [5]) без нулів, полюсами якої є спільні нулі функцій $\vec{G}(z)\vec{b}_1,\ldots,\vec{G}(z)\vec{b}_q$. Оскільки вектори $\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_q$ лінійно незалежні, то й компоненти $\vec{G}_1(z)$ лінійно незалежні, отже, $\vec{G}_1(z)$ є q-вимірною цілою кривою.

Оскільки для довільного вектора $\vec{\lambda}\in\boldsymbol{C}^q$ і відповідного йому вектора $\vec{b}=\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q$ виконується рівність $\vec{G}(z)\vec{b}=\vec{G}_1(z)\vec{\lambda}/\Phi(z)$, то $N(r,\vec{b},\vec{G})=N(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1)+N(r,\Phi)$, тоді, згідно з першою основною теоремою для цілих кривих, маємо

$$T(r,\vec{G})-m(r,\vec{b},\vec{G})=T(r,\vec{G}_1)-m(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1)+N(r,\Phi)+O(1),\ r\to\infty. \quad (2)$$

Відзначимо також, що

$$T(r,\vec{G}_1)+N(r,\Phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{\left|\sum_{k=1}^{q}\vec{G}(re^{i\varphi})\cdot\vec{b}_k\right|^2\right\}^{1/2}d\varphi+O(1)\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\{\left|\sum_{k=1}^{q}\left\|\vec{G}(re^{i\varphi})\right\|^2\cdot\left\|\vec{b}_k\right\|^2\right|^2\right\}^{1/2}d\varphi+O(1)=T(r,\vec{G})+O(1),\ r\to\infty\cdot \quad (3)$$

Оскільки для вектора $\vec{b}=\vec{b}(\alpha_0)\in M$ виконується $\delta(\vec{b})=\alpha_0$, то, згідно (1), знайдеться послідовність додатних чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n\to\infty$, така що

$$m(r_n,\vec{b},\vec{G})=\{\alpha_0+o(1)\}T(r_n,\vec{G}),\ n\to\infty.$$

Тоді з (2) ми отримуємо таку нерівність

$$T(r_n,\vec{G}_1)+N(r_n,\Phi)\geq\{1-\alpha_0+o(1)\}T(r_n,\vec{G}),\ n\to\infty. \quad (4)$$

Для довільного вектора $\vec{b}\in K=\left\{\vec{b}:\vec{b}\in M,\ \delta(\vec{b})\in\mathrm{K}_0\right\}$ і відповідного йому вектора $\vec{\lambda}\in\Lambda=\left\{\vec{\lambda}=(\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_q):\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q\in K\right\}$ отримаємо, згідно означення K_0, враховуючи (3) та (4), таку нерівність:

$$m\left(r_n,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)\geq m\left(r_n,\vec{b},\vec{G}\right)+\{1-\alpha_0+o(1)\}T\left(r_n,\vec{G}\right)-$$
$$-T\left(r_n,\vec{G}\right)+O(1)\geq\left\{\delta\left(\vec{b}\right)+o(1)\right\}T\left(r_n,\vec{G}\right)-\{\alpha_0+o(1)\}T\left(r_n,\vec{G}\right)\geq$$
$$\geq\{\varepsilon+o(1)\}T\left(r_n,\vec{G}\right)\geq\{\varepsilon+o(1)\}\,T\left(r_n,\vec{G}_1\right),\ n\to\infty. \qquad (5)$$

Оскільки $K\subset M$ і M – допустима в $\boldsymbol{B}$ система векторів, то, очевидно, Λ – допустима система векторів в $\boldsymbol{C}^q$. Тоді, якщо через Q позначити довільну скінченну підмножину із Λ, то для цілої кривої $\vec{G}_1$, згідно з другою основною теоремою, повинна виконуватись нерівність

$$\sum_{\vec{\lambda}\in Q}m\left(r_n,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)\leq\{q+o(1)\}T\left(r_n,\vec{G}\right),\ n\to\infty. \qquad (6)$$

Але для довільного вектора $\vec{\lambda}\in Q\subset\Lambda$ виконується нерівність (5). Тому, взявши $card\,Q=\left[\frac{q}{\varepsilon}\right]+2$, легко бачимо, що (5) не виконується. Отримане протиріччя доводить нашу теорему.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые / В.П. Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
2. Гольдберг А.А. Некоторые вопросы теории распределения значений / А.А. Гольдберг // В кн.: Г. Виттих. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Физматгиз, 1960. – С. 263-300.
3. Савчук Я.И. О множестве дефектных векторов целых кривих / Я.И. Савчук // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, № 3. – С. 385-389.
4. Савчук Я.И. Структура множества дефектных векторов целых и аналитических кривых конечного порядка / Я.И. Савчук // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 609-615.

Стаття поступила в редакційну колегію 23.11.2009 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.***

ABOUT GREAT NUMBER OF VALUES OF SIZES OF DEFECTS FOR WHOLE ONE CURVE OF SCINCHENNOGO ORDER

Y. I. Savchuk
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas,
76019, *Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka street,* 15;
tel. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math @ nung. edu. ua

It is shown, that great number of values of sizes of defects for the arbitrary whole curve of finished order no more than calculated although the great number not of collinear between itself imperfect vectors for such crooked can have power continuum.

Key words: *whole curve, description of growth, function of approaching, nevanlinn imperfect vector, size of defect.*