Математика та механіка

УДК 517.98

ЛІНЕАРИЗАЦІЯ МУЛЬТИЛІПШИЦЕВИХ ВІДОБРАЖЕНЬ НА БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

А. В. Загороднюк[1], М. В. Дубей[2]

[1]*Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; Інститут прикладних проблем механіки і математики, 79060, Україна, м. Львів, вул. Наукова, 3б; e-mail: andriyzag@yahoo.com*

[2]*Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: mariadubey@gmail.com*

Розглянено ліпшицеві та мультиліпшицеві відображення та здійснено процес лінеаризації мультиліпшицевих відображень.

Ключові слова: *ліпшицеві відображення, мультиліпшицеві відображення, вільний банахів простір.*

Дослідження ліпшицевих відображень є класичним розділом сучасної математики і проводилось багатьма авторами (див., наприклад, [4, 8]). Розробку теорії вільних банахових просторів розпочато у роботах Р. Аренса та Ж. Ілса [3] у 50-их роках XX століття та продовжено у працях таких вчених, як Д. Райков [2], Ж. Флуд [5], Ж. Годефруа, Н. Калтон [6], В. Пестов [7], Н. Вівер [8].

Нехай X, Y – метричні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *ліпшицевим на просторі* X, якщо існує стала $c > 0$ така, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ справедлива нерівність

$$\rho\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \le c\rho\left(x_1, x_2\right),$$

де $\rho(x_1, x_2)$ та $\rho\left(f(x_1), f(x_2)\right)$ – відстань між елементами простору X та Y відповідно. *Сталою Ліпшица* називається найменша можлива стала c. Розглянемо метричний простір X з додатною функцією $\alpha\left(x\right)$, такою, що для довільних елементів $x_1, x_2 \in X$ виконується наступна нерівність

$$\left|\alpha(x_1) - \alpha(x_2)\right| \le \rho(x_1, x_2) \le \alpha(x_1) + \alpha(x_2).$$

Функція $\alpha(x)$ називається *нормою* метричного простору.

Відомо, що довільний метричний простір X є нормованим відносно норми $\alpha(x)=\rho(\theta,x)$, де θ – деяка фіксована точка простору X. Такий простір X називається *простором з відміченою точкою*. Позначимо $Lip_0(X,E)$ підмножину всіх ліпшицевих відображень $f(x)$ з нормованого метричного простору X з відміченою точкою θ з нормою $\alpha(x)$ у нормований лінійний простір E, таких, що

$$\|f(x)\| \le L_f \alpha(x),$$

де L_f – ліпшицева стала. Ліпшицеве відображення на довільному просторі X з відміченою точкою належить класу $Lip_0(X,E)$ тоді і тільки тоді, коли $f(\theta)=0$. Простір $Lip_0(X,E)$ є банаховим простором з нормою $\|f\|=L_f$ (див. [8]).

У [7] доведено, що для довільного метричного простору X з відміченою точкою існує єдиний, з точністю до ізоморфізму, банахів простір $B(X)$ такий, що метричний простір X ізометрично вкладається у банахів простір $B(X)$ і кожне відображення $f(x)\in Lip_0(X,E)$ може бути продовжене до лінійного оператора $\tilde{f}: B(X)\to E$, для довільного нормованого простору E, причому $\|\tilde{f}\|=L_f$. Таким чином, простір ліпшицевих функцій $Lip_0(X)=Lip_0(X,R)$ можна ототожнити з простором лінійних неперервних функціоналів на $B(X)$, тобто $(B(X))'=Lip_o(X)$. Простір $B(X)$ називається *вільним банаховим простором* над метричним простором X.

Для довільного елемента $x\in X$ позначимо $\underline{x}$ – образ цього елемента при ізометричному вкладенні простору X у простір $B(X)$. У [7] показано, що елементи вигляду $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k \underline{x}_k$ є щільними в $B(X)$.

Розглянемо відображення $g(x,y)$, визначене на декартовому добутку метричних просторів $X\times Y$ зі значеннями в нормованому просторі E.

Позначимо через $A_y(x)$ відображення з простору X в простір E таке, що для кожного фіксованого $y\in Y$ виконується рівність

$$A_y(x)=g(x,y).$$

Аналогічно можна означити відображення $A_x(y)=g(x,y)$, яке діє з простору Y в простір E при кожному фіксованому $x\in X$.

Відображення $g(x,y): X\times Y\to E$ називається *дволіпшицевим,* якщо $A_x(y)$ є ліпшицевим для кожного фіксованого $x\in X$ і $A_y(x)$ є ліпшицевим для кожного фіксованого $y\in Y$. Для даного дволіпшицевого відображення $g(x,y)$ позначимо $G: x\mapsto A_x$ – оператор, який кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність ліпшицеве відображення A_x. В роботі [1] доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай X, Y – повні метричні простори з відміченими точками θ_1 і θ_2 відповідно і $g(x, y)$ – дволіпшицеве відображення таке, що $A_x(y) \in Lip_0(Y, E)$ для довільного $x \in X$, $A_y(x) \in Lip_0(X, E)$ для довільного $y \in Y$ і $G : x \mapsto A_x$ належить класу $Lip_0(X, Lip_0(Y, E))$. Тоді існує неперервне білінійне відображення $D : B(X) \times B(Y) \to E$ таке, що $D(\underline{x}, \underline{y}) = g(x, y)$ для всіх $x \in X$ та $y \in Y$ і $\|D\| = L_G$.*

Протилежне твердження також вірне. Якщо D є неперервним білінійним відображенням на $B(X) \times B(Y)$, тоді $g(x, y) = D(\underline{x}, \underline{y})$ є дволінійним відображенням, яке задовольняє умови теореми 1. Тоді існує неперервний лінійний оператор Φ_g на проективному тензорному добутку $B(X) \otimes_\pi B(Y)$ такий, що $\Phi_g = D(u, v)$, для довільних $u \in B(X), v \in B(Y)$, тому дволіпшицеве відображення $g(x, y)$ задовольняє умови теореми 1 тоді і тільки тоді, коли $\Phi_g(\underline{x} \otimes \underline{y}) = g(x, y)$. Отже, множину всіх дволіпшицевих функцій, які задовольняють умовам теореми 1 можна ототожнити з простором всіх неперервних білінійних форм $\Im({}^2B(X) \times B(Y)) = (B(X) \times B(Y))'$. Позначимо цю множину $Lip_0^2(X \times Y)$.

Розглянемо триліпшицеве відображення $g(x_1, x_2, x_3)$ визначене на декартовому добутку $X_1 \times X_2 \times X_3$ повних метричних просторів X_1, X_2, X_3 зі значеннями у нормованому просторі E і позначимо через $A_{x_1}(x_2, x_3)$ відображення з $X_1 \times X_2 \times X_3$ в E таке, що для кожного фіксованого $x_1 \in X_1$ виконується рівність $A_{x_1}(x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3)$, крім того $A_{x_1}(x_2, x_3) \in Lip_0^2(X_2 \times X_3)$. Для даної триліпшицевої функції $g(x_1, x_2, x_3)$ також існує неперервне трилінійне відображення $D : B(X_1) \times B(X_2) \times B(X_3) \to E$ таке, що $D(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3) = g(x_1, x_2, x_3)$ і $\|D\| = L_G$, де L_G – ліпшицева константа відображення $G : x_1 \mapsto A_{x_1}(x_2, x_3)$. Таким чином, множ ину всіх таких триліпшицевих функцій $Lip_0^3(X_1 \times X_2 \times X_3)$ можна ототожнити з простором всіх неперервних трилінійних форм $\Im({}^3B(X_1) \times B(X_2) \times B(X_3)) = (B(X_1) \times B(X_2) \times B(X_3))'$. Аналогічно можна побудувати простори $Lip_0^4(X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4)$, $Lip_0^5(X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_5)$, … , $Lip_0^{n-1}(X_1 \times X_2 \times ... \times X_{n-1})$.

Наступним кроком буде доведення теореми для n-ліпшицевого відображення та побудова простору $Lip_0^n\left(X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\right)$.

Розглянемо відображення $g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ визначене на декартовому добутку метричних просторів $X_1\times X_2\times X_3\times\ldots\times X_n$ зі значеннями у нормованому просторі E. Позначимо $A_{x_1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ відображення з $X_1\times X_2\times X_3\times\ldots\times X_n$ в E таке, що для кожного фіксованого $x_1\in X_1$ виконується рівність $A_{x_1}(x_2,x_3,..,x_n)=g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, крім того $A_{x_1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)\in Lip_0^{n-1}(X_2\times X_3\times\ldots\times X_n)$, де $Lip_0^{n-1}(X_2\times X_3\times\ldots\times X_{n-1})$ – простір функцій, які задовольняють умову теореми 1 для $(n-1)$-ліпшицевої функції.

Аналогічно можна означити функції

$$A_{x_2}(x_1,x_3,x_4,\ldots,x_n);$$
$$A_{x_3}(x_1,x_2,x_4,\ldots,x_n);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_{x_n}(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1}).$$

Відображення $g(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ називається n-ліпшицевим, якщо

$A_{x_1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ є ліпшицевим по x_2 за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=1,3,4,\ldots,n.$

$A_{x_1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ є ліпшицевим по x_3 за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=1,2,4,\ldots,n.$

....

$A_{x_1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ є ліпшицевим по x_n за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=1,2,\ldots,n-1.$

$A_{x_2}(x_1,x_3,\ldots,x_n)$ є ліпшицевим по x_1 за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=2,3,\ldots,n.$

$A_{x_2}(x_1,x_3,\ldots,x_n)$ є ліпшицевим по x_3 за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=1,2,4,5,\ldots,n.$

....

$A_{x_2}(x_1,x_3,\ldots,x_n)$ є ліпшицевим по x_n за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=1,2,\ldots,n-1.$

....

$A_{x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ є ліпшицевим по x_1 за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=2,3,\ldots,n.$

$A_{x_n}(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$ є ліпшицевим по x_2 за фіксованих $x_i\in X_i$, де $i=1,3,4,\ldots,n.$

....

$A_{x_n}(x_1, x_2, ..., x_{n-1})$ є ліпшицевим по x_{n-1} за фіксованих $x_i \in X_i$, де $i = 1,2,...,n-2,n$, тобто, відображення $g(x_1, x_2, x_3, ..., x_n): X_1 \times X_2 \times ... \times X_n \to E$ називається n-ліпшицевим, якщо воно є ліпшицевим по одній зі змінних, коли решту $(n-1)$-змінна будуть фіксованими. Для даного n-ліпшицевого відображення визначимо оператор $G : x_1 \mapsto A_{x_1}(x_2, x_3, ..., x_n)$, який кожному елементу x_1 ставить у відповідність відображення $A_{x_1}(x_2, x_3, ..., x_n) \in Lip_0^{n-1}(X_2 \times X_3 \times ... \times X_n)$, у такий самий спосіб можна означити оператори

$G_2 : x_2 \mapsto A_{x_2}(x_1, x_3, x_4, ..., x_n) \in Lip_0^{n-1}(X_1 \times X_3 \times X_4 \times ... \times X_n)$;

$G_3 : x_3 \mapsto A_{x_3}(x_1, x_2, x_4, ..., x_n) \in Lip_0^{n-1}(X_1 \times X_2 \times X_4 \times ... \times X_n)$;

....

$G_n : x_n \mapsto A_{x_n}(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}) \in Lip_0^{n-1}(X_1 \times X_2 \times X_3 \times ... \times X_{n-1})$.

Теорема 2. *Нехай $X_1, X_2, ..., X_n$ – повні метричні простори з відміченими точками $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ відповідно, $g(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ – n-ліпшицеве відображення, $G : x_1 \mapsto A_{x_1}(x_2, x_3, ..., x_n)$ – оператор і $G \in Lip_0(X, Lip_0^{n-1}(X_2 \times X_3 \times ... \times X_n))$, тоді існує неперервне n-лінійне відображення $D : B(X_1) \times B(X_2) \times ... \times B(X_n) \to E$ таке, що*

$$D(\underline{x}_1, \underline{x}_2, ..., \underline{x}_n) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

для довільних $x_i \in X_i$, $i = 1,2,...,n$ і

$$\|D\| = L_G.$$

Доведення

Нехай $\widetilde{G}$ – продовження оператора G до лінійного оператора з $B(X_1)$ у $Lip_0^{n-1}(X_2 \times X_3 \times ... \times X_n)$ і $\|\widetilde{G}\| = L_G$.

Якщо $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{1k} \in B(X_1)$ то $\widetilde{G}(z) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k A_{x_{1k}}$, де $A_{x_{1k}} \in Lip_0^{n-1}(X_2 \times X_3 \times ... \times X_n)$. Кожне відображення $A_{x_{1k}}$ допускає продовження $\widetilde{A}_{x_{1k}}$ до лінійного неперервного оператора з $B(X_2) \times B(X_3) \times ... \times B(X_n)$ в E і

$$\|\widetilde{A}_{x_{1k}}\| = L_{A_{x_{1k}}}.$$

Розглянемо відображення $\widetilde{\widetilde{G}}(z) : z \mapsto \widetilde{A}_z$, де $\widetilde{A}_z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \widetilde{A}_{x_{1k}}$. Це відображення визначене на просторі скінченних лінійних комбінацій $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underline{x}_{1k}$, який є щільним у $B(X)$ і діє у простір лінійних неперервних операторів $\Im\left({}^{n-1}B\left(X_2\right)\times B\left(X_3\right)\times\ldots\times B\left(X_n\right)\right)$. Відображення $\tilde{\tilde{G}}(z)$ є композицією лінійного неперервного оператора $\tilde{\tilde{G}}(z): z \mapsto \sum_{k=1}^{n}\lambda_k A_{x_{1k}}$ та лінійного ізометричного оператора $\upsilon: A_{x_{1k}} \mapsto \tilde{A}_{x_1}$ і $\left\|\tilde{\tilde{G}}\right\| = \left\|\tilde{G}\right\|$. Таким чином, $\tilde{\tilde{G}}$ є лінійним неперервним оператором з $B(X_1)$ в простір лінійних неперервних операторів $\Im\left({}^{n-1}B(X_2)\times B(X_3)\times\ldots\times B(X_n)\right)$. З теорії n-лінійних відображень добре відомо, що $D(z,v_2,v_3,\ldots,v_n) := \tilde{A}_z(v_2,v_3,\ldots,v_n)$ є неперервним n-лінійним відображенням і

$$\|D\| = \sup_{\substack{\|z\|\le 1\\ \|v_2\|\le 1\\ \ldots\ldots\\ \|v_n\|\le 1}}\left(D(z,v_2,v_3,\ldots,v_n)\right) = \sup_{\substack{\|z\|\le 1\\ \|v_2\|\le 1\\ \ldots\ldots\\ \|v_n\|\le 1}}\left(A_z\left(v_2,v_3,\ldots,v_n\right)\right) = \sup_{\|z\|\le 1}\left(\tilde{\tilde{G}}(z)\right) = \left\|\tilde{\tilde{G}}\right\| = L_{G.}.$$

Таким чином, множину всіх n-ліпшицевих функцій, які задовольняють умовам теореми 2 можна ототожнити з простором всіх неперервних n-лінійних форм

$$\Im\left({}^{n}B(X_1)\times B(X_2)\times B(X_3)\times\ldots\times B(X_n)\right) = \left(B(X_1)\otimes B(X_2)\otimes B(X_3)\otimes\ldots\otimes B(X_n)\right)'.$$

Отже, побудовано простір $Lip_0^n\left(X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\right)$.

Література

1. Дубей М.В. Принцип рівномірної обмеженості для ліпшицевих відображень / М.В. Дубей, А.В. Загороднюк // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2009.
2. Райков Д.А. Свободные локально выпуклые подпространства равномерных пространств / Д.А. Райков // Мат. сб. – 1964. – 63, № 4. – С. 582-590.
3. Arens R. On embedding uniform and topological spaces / R. Arens, J. Eells // Pacic J. Math. – 1959. – №6. – P. 397-403.
4. Benyamini Y. Geometric nonlinear functional analysis / Y. Benyamini, J. Lindenstrauss. – Providence, American Mathematical Society. – 2000. – 488 p.
5. Flood J. Free topological vector spaces / J. Flood. – Canberra, Australian National university, Ph. D. thesis, 1975. – 109 p.
6. Godefroy G. Lipschitz-free Banach spaces / G. Godefroy, N. Kalton // Studia Math. – 2003. – 159, №1. – P. 121-141.
7. Pestov V. Free Banach spaces and representations of topological groups / V. Pestov // Functional analysis. – 1986. – 20. – P. 70-72.
8. Weaver N. Lipschitz algebras / N. Weaver. – Singapore, New Jersey, London, New York, World Scientific, 1999. – 223 p.

Стаття поступила в редакційну колегію 17.11.2009 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Лопушанським О.В.***

LINEARIZATION OF MULTI-LIPSCHITZ MAPS ON BANACH SPACES

A. V. Zagorodnyuk[1], M. V. Dubei[2]

[1] *V. Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk;*
76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenka street, 57;
Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU
79060, Lviv, Naukova street, 3b; e-mail: andriyzag@yahoo.com
[2] *V. Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk;*
76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenka street, 57;
e-mail: mariadubey@gmail.com

We consider Lipschitz and multi-Lipschitz maps and we carry out the process of linearization of multi-Lipschitz maps.

Key words: *Lipschitz maps, Multi-Lipschitz maps, Free Banach space.*