

УДК 517.51 + 517.98

**ПЕРЕХІДНІСТЬ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ n -ЛІНІЙНИХ
І ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ****В. К. Маслюченко, В. В. Нестеренко**

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;
58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського 2;
e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; v.nesterenko@gmail.com*

Доведено, що для n -лінійних і поліноміальних відображень перехідність рівносильна неперервності.

Ключові слова: *перехідність, слабка властивість Дарбу, n -лінійне відображення, поліноміальне відображення.*

1. Вступ. У праці [1], яка розвивала ідеї статті [2], було введено поняття перехідного відображення $f : X \rightarrow Y$, що діє в загальних топологічних просторах. З допомогою цього поняття в [1] було отримана загальна теорема про декомпозицію неперервності, яка охоплювала багато попередніх результатів. Взагалі кажучи, перехідність – це властивість, що значно слабша від неперервності, але в роботі [3] було зауважено, що перехідність для лінійного відображення рівносильна неперервності. Виникає природне питання про зв'язок між перехідністю і неперервністю і для n -лінійних та поліноміальних відображень.

Ми показуємо тут, що кожне перехідне n -лінійне відображення $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, де X_1, X_2, \dots, X_n, Z – топологічні векторні простори (коротко ТВП), є неперервним так само як і довільне перехідне поліноміальне відображення $f : X \rightarrow Y$, що діє в топологічних векторних просторах є неперервним.

2. Перехідні відображення і слабка властивість Дарбу. Нехай X і Y – топологічні простори. Кажуть, що відображення $f : X \rightarrow Y$ *перехідне в точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y існують окіл U точки x_0 в X і відкритий окіл W точки y_0 в Y , такі, що $W \subseteq V$ і $f(U) \subseteq W \cup (Y \setminus \overline{W})$, і просто перехідним, якщо воно є таким у кожній точці x_0 з X .

Відображення $f : X \rightarrow Y$ має /слабку/ властивість Дарбу, якщо воно кожну /відкриту/ зв'язну множину в X переводить у зв'язну підмножину простору Y . Ми будемо використовувати теорему про декомпозицію неперервності з праці [1].

Теорема А. *Нехай X – локально зв'язний топологічний простір і Y – довільний топологічний простір. Відображення $f : X \rightarrow Y$ буде не-*

перервним тоді і тільки тоді, коли воно перехідне і має слабку властивість Дабу.

3. n -лінійні відображення. Нехай $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ – добуток векторних просторів над полем \mathbf{K} дійсних чи комплексних чисел і Y – векторний простір над \mathbf{K} . Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається n -лінійним або *нарізно лінійним*, якщо для кожного фіксованого елемента $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$ і довільного індексу $k = 1, \dots, n$ відображення $f_{\hat{a}_k}: X_k \rightarrow Y$, яке задається формулою

$$f_{\hat{a}_k}(x_k) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

є лінійним.

Лема 1. Нехай $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ – добуток ТВП X_k , $a = (a_1, \dots, a_n)$ і $b = (b_1, \dots, b_n)$ – точки з X , Y – ТВП і $f: X \rightarrow Y$ – n -лінійне відображення. Тоді функція $\omega(t) = f(a + t(b - a))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, це поліном степеня $\leq n$ з коефіцієнтами з простору Y .

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n .

Нехай $n = 1$. Тоді f – лінійне відображення і

$$\omega(t) = f(a + t(b - a)) = f(a) + tf(b - a),$$

отже, ω – це поліном степеня ≤ 1 .

Припустимо, що $n > 1$ і наше твердження справедливе для $(n - 1)$ -лінійних функцій. Доведемо, що воно виконується і для n -лінійних функцій як у формулюванні леми.

Використовуючи лінійність відносно останнього аргументу отримаємо, що

$$\begin{aligned} \omega(t) &= f(a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_{n-1} + t(b_{n-1} - a_{n-1}), a_n + t(b_n - a_n)) = \\ &= f(a' + t(b' - a'), a_n) + tf(a_1 + t(b_1 - a_1), b_n - a_n), \end{aligned}$$

де $a' = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in X' = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}$ і $b' = (b_1, \dots, b_{n-1}) \in X'$. Відображення $g: X' \rightarrow Y$ і $h: X' \rightarrow Y$, що визначаються формулами $g(x') = f(x', a_n)$ і $h(x') = f(x', b_n - a_n)$, є $(n - 1)$ -лінійними. Тому за індуктивним припущенням існують такі многочлени

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k y_k \quad \text{і} \quad \psi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k z_k$$

з коефіцієнтами y_k і z_k з Y , що

$$g(a' + t(b' - a')) = \varphi(t) \quad \text{і} \quad h(a' + t(b' - a')) = \psi(t)$$

на $\alpha \leq t \leq \beta$. Тоді

$$\omega(t) = g(a' + t(b' - a')) + th(a' + t(b' - a')) = \varphi(t) + t\psi(t)$$

на $\alpha \leq t \leq \beta$, отже, ω – це многочлен степеня $\leq n$.

Теорема 1. Для довільних ТВП X_1, \dots, X_n і Y кожне n -лінійне відображення $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ має слабку властивість Дарбу.

Доведення. Нехай G – це область в добутку $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Доведемо, що її образ $H = f(G)$ є зв'язною множиною у просторі Y . Нехай c і d – довільні точки з H . Тоді існують точки a і b з G , такі, що $f(a) = c$ і $f(b) = d$. За лемою 3.2 з [3] існує ламана $l: [\alpha, \beta] \rightarrow G$, що $l(\alpha) = a$ і $l(\beta) = b$. Розглянемо розбиття $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$ відрізка $[a, b]$, таке, що для кожного $k = 1, \dots, n$ звуження $l_k = l|_{[\alpha_{k-1}, \alpha_k]}$ – це лінійна функція. За лемою 1 функція $\omega_k = f \circ l_k$ – це многочлен з коефіцієнтами з простору Y . Покладаючи $\omega(t) = \omega_k(t)$ при $\alpha_{k-1} \leq t \leq \alpha_k$ ми одержимо неперервну функцію $\omega: [\alpha, \beta] \rightarrow H$, для якої $\omega(\alpha) = c$ і $\omega(\beta) = d$. Таким чином, встановлено, що множина H навіть лінійно зв'язна, а значить, і зв'язна.

Теорема 2. Нехай $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ – добуток ТВП, Y – ТВП і $f: X \rightarrow Y$ – n -лінійне відображення. Тоді f буде перехідним у тому і тільки в тому випадку, коли f неперервне.

Доведення. Зауважимо, що з неперервності відображення випливає його перехідність [1, теорема 5]. Нехай відображення f перехідне. Зауважимо, що добуток X є локально зв'язним простором, адже він є ТВП (див. лему 3.1 з [3]). За теоремою 1 відображення f має слабку властивість Дарбу. Тому за теоремою А відображення f неперервне.

4. Поліноміальні відображення. Нагадаємо, що відображення $f: X \rightarrow Y$ між векторними просторами над полем \mathbf{K} називається n -однорідним поліномом, якщо існує таке n -лінійне відображення $g: X^n \rightarrow Y$, що $f(x) = g(x, \dots, x)$ на X . Поліном $f: X \rightarrow Y$ степеня $\leq n$ – це сума $f = \sum_{k=0}^n f_k$, де $f_k: X \rightarrow Y$ – це k -однорідні поліноми при $k = 0, 1, \dots, n$.

Лема 2. Нехай X і Y – ТВП, a і b – точки з X і $f: X \rightarrow Y$ – поліном степеня $\leq n$. Тоді функція $\omega(t) = f(a + t(b - a))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, це поліном степеня $\leq n$ з коефіцієнтами з Y .

Доведення. Нехай f – це n -однорідний поліном. Тоді існує таке n -лінійне відображення $g: X^n \rightarrow Y$, що $f(x) = g(x, \dots, x)$ на X . В такому разі

$$\omega(t) = g(a + t(b - a), \dots, a + t(b - a))$$

при $\alpha \leq t \leq \beta$ і за лемою 1 функція ω є поліномом степеня $\leq n$ з коефіцієнтами з Y .

Нехай $f = \sum_{k=0}^n f_k$, де f_k – це k -однорідні поліноми при $k = 0, 1, \dots, n$. Функції $\omega_k(t) = f_k(a + t(b - a))$ – це поліноми степеня $\leq k$ з

коефіцієнтами з Y для кожного $k = 0, 1, \dots, n$. Але

$$\omega = \sum_{k=0}^n \omega_k .$$

Тому ω – це теж поліном з коефіцієнтами з Y , степінь якого не перевищує n .

Наступний результат виводиться з леми 2 так само як теорема 1 з леми 1.

Теорема 3. Нехай X і Y – ТВП і $f: X \rightarrow Y$ – поліном степеня $\leq n$. Тоді f має слабку властивість Дарбу.

Звідси випливає

Теорема 4. Нехай X і Y – ТВП і $f: X \rightarrow Y$ – поліном степеня $\leq n$. Тоді f буде перехідним у тому і тільки в тому випадку, коли f неперервне.

Література

1. Маслюченко В.К. Декомпозиція неперервності та перехідні відображення / В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко // *Мат. вісн. НТШ.* – 2011. – 8. – С. 132-150.
2. Маслюченко В.К. Неперервність за Стеллінгзом, нарізна неперервність та функції із замкненим графіком / В.К. Маслюченко, В.І. Крещу // *Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика.* – Чернівці: Рута. – 2007. – С. 50-54.
3. Маслюченко В.К. Слабка властивість Дарбу і перехідність лінійних відображень у топологічних векторних просторах / В.К. Маслюченко, В.В. Нестеренко // *Карп. мат. публ.* – 2013. – 5, 1. – С. 79-88.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.12.2017 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В., д.ф.-м.н., професором Никифорчиним О.Р.

TRANSITION AND CONTINUITY OF n -LINEAR AND POLYNOMICAL TRANSFORMERS

V. K. Maslyuchenko, V. V. Nesterenko

Chernivtsi National University named by Yuri Fedkovych;

58012, Chernivtsi, Kotsyubinsky str., 2;

e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com; v.nesterenko@gmail.com

It is proved that the transitivity for n -linear and polynomial transformers is equivalent to continuity.

Key words: *transitivity, weak property of Darboux, n -linear transformers, n -linear and polynomial transformers.*