

# МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

## Математичний аналіз

УДК 517.555

### КЛАСИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

О. Б. Скасків<sup>1</sup>, О. Ю. Тарновецька<sup>2</sup>, Т. М. Сало<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка;  
79001, Львів, вул. Університетська 1; e-mail: olskask@gmail.com

<sup>2</sup>Чернівецький факультет НТУ "Харківський політехнічний інститут";  
58018, Чернівці, вул. Головна, 203-а; e-mail: savinskaolga@gmail.com

<sup>3</sup>Національний університет "Львівська політехніка";  
79013, Львів, вул. С.Бандери 12; e-mail: tetyan.salo@gmail.com

У статті отримані достатні та необхідні умови для того, щоби ціла функція від декількох комплексних змінних належала до узагальнених класів збіжності.

**Ключові слова:** класи збіжності, цілі функції, декілька комплексних змінних

**1. Вступ.** G. Valiron [1, с. 18] довів таке твердження: якщо ціла функція

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

має порядок

$$\rho_f := \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}, \quad \rho_f \in \mathbb{R}_+ := (0, +\infty),$$

де  $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z|=r\}$ , і належить до класу збіжності, тобто,

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty, \quad \rho = \rho_f, \quad (1)$$

то

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty, \quad \rho = \rho_f. \quad (2)$$

Зауважимо, що оскільки

$$(\forall r > 0) : \mu_f(r) := \max\{|a_n| r^n : n \geq 0\} \leq M_f(r) \leq 2\mu_f(2r),$$

то умова (1) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty, \quad \rho = \rho_f. \quad (3)$$

Нехай  $L$  – клас додатних неперервних зростаючих до  $+\infty$  функцій  $l : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}_+$ ;  $L_1$  – підклас класу  $L$ , в який входять функції  $l$  такі, що  $l((1+o(1))x) = (1+o(1))l(x)$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), а  $L_2$  – підклас, в який входять функції  $l \in L$  такі, що  $l(x+O(1)) = O(l(x))$  ( $x \rightarrow +\infty$ ).

Зрозуміло, що  $L_1 \subset L_2$ . Справді, якщо  $l \in L_1$ , то

$$l(x+O(1)) = l((1+o(1))x) = (1+o(1))l(x) = O(l(x)) \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Для  $\alpha, \beta \in L$  скажемо, що ціла функція  $f \in E_{\alpha\beta}$  і відповідно  $f \in \underline{E}_{\alpha\beta}$ , якщо

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln M_f(r))}{\alpha(\ln r)} d \ln r < +\infty, \quad \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{\alpha(\ln M_f(r))} d \ln r < +\infty,$$

відповідно. З результату, доведеного О.М. Мулявою [2, Теорема 1] (У випадку  $\alpha(x) \equiv x$  див. також [3, Теорема 1]) для цілих рядів Діріхле, випливає таке твердження.

**Теорема 1 [2].** Нехай  $\alpha \in L$  вгнута функція на  $[x_0, +\infty)$ ,  $\alpha(e^x) \in L_1$ , а функція  $\beta \in L_1$  задовольняє умову  $x\beta'(x)/\beta(x) \geq h > 0$  на  $[x_0, +\infty)$  і

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} dx < +\infty. \quad (4)$$

Для того, щоб ціла функція  $f$  належала до узагальненого класу збіжності  $E_{\alpha\beta}$  необхідно, а у випадку  $|a_k|/|a_{k+1}|$  зростає до  $+\infty$  при  $k_0 \leq k \rightarrow \infty$  і достатньо, щоб

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha(k) - \alpha(k-1)) \beta_1 \left( \frac{1}{k} \ln \frac{1}{|a_k|} \right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{dt}{\beta(t)}. \quad (5)$$

**2. Основний результат.** Для цілих функцій  $F : \mathbf{C}^p \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $p \geq 1$ , від багатьох комплексних змінних результати про їхню належність до класів збіжності отримано у статті [4]. Власне, перш, ніж перейти до відповідних формулювань, наведемо необхідні для цього поняття і позначення.

Нехай  $(\mathbf{G}_R)_{R \geq 0}$  – система повних кратно-кругових областей, що є вичерпанням простору  $\mathbf{C}^p$ , тобто, така система областей, що задовольняє умови:

- i)  $\bigcup_{R \geq 0} \mathbf{G}_R = \mathbf{C}^p$ ;
- ii)  $(\forall R_1 < R_2): G_{R_1} \subset G_{R_2}$ ;
- iii) (повна область)  $(z_1, \dots, z_p) \in G_1 \Leftrightarrow (\forall R > 0): (Rz_1, \dots, Rz_p) \in \mathbf{G}_R$ ;
- iv) (кратно-кругова область)  $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{G}_R \Rightarrow (\forall (\theta_1, \dots, \theta_p) \in \mathbf{R}^p): (z_1 e^{i\theta_1}, \dots, z_p e^{i\theta_p}) \in \mathbf{G}_R$ .

Наступні системи областей, які часто зустрічаються в математичній літературі, є прикладами таких вичерпань:

$$\mathbf{G}_R = \mathbf{B}_p(R) := \{z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{C}^p : |z| := \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_p|^2} < R\},$$

$$\mathbf{G}_R = C_p(R) := \{z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{C}^p : |z_1| < R, \dots, |z_p| < R\}$$

$$\mathbf{G}_R = \Pi_p(R) := \{z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbf{C}^p : |z_1| + \dots + |z_p| < R\}.$$

Нехай  $\mathbf{G}$  – кратно-кругова область в  $\mathbf{C}^p$ , через  $|G|$  позначимо множину з  $\mathbf{R}_+^p$ , в яку переходить  $\mathbf{G}$  при відображенні  $r = (r_1, \dots, r_p) = (|z_1|, \dots, |z_p|): \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{R}_+^p$ . Множину  $|G|$  називатимемо ([5, с. 38]) зображенням кратно-кругової області  $\mathbf{G}$  в абсолютному гіпероктанті  $\mathbf{R}_+^p$ .

Множина  $E \subset \mathbf{R}_+^p$  називається ([5, с. 38]) повною областю в  $\mathbf{R}_+^p$ , якщо разом з кожною точкою  $r^0 = (r_1^0, \dots, r_p^0) \in E$  до множини  $E$  належить кожна точка  $r = (r_1, \dots, r_p)$ ,  $0 \leq r_j \leq r_j^0$  ( $1 \leq j \leq p$ ) і множина  $E$  не містить точок замикання свого доповнення в  $\mathbf{R}_+^p$ .

**Зауваження 1.** 1) В [5, с. 38] відзначається, що зображення кратно-кругової області  $\mathbf{G} \subset \mathbf{C}^p$  в абсолютному гіпероктанті  $\mathbf{R}_+^p$  є повною областю в  $\mathbf{R}_+^p$ .

2) Для кожної пари  $G^{(1)}, G^{(2)}$  повних областей в  $\mathbf{R}_+^p$  існують  $\alpha > 0, \beta > 0$  такі, що ([5, с. 173])

$$G_\alpha^{(1)} \subset G_1^{(2)} \subset G_\beta^{(1)}.$$

Якщо взяти  $G^{(1)} = |C_p(1)|$ ,  $G_1^{(2)} = |G_1|$  то звідси отримаємо, що  $(\exists l > 0, \exists L > 0)$ :

$$|C_p(l)| = \{r : r_1 < l, \dots, r_p < l\} \subset |G_1| \subset |C_p(L)| = \{r : r_1 < L, \dots, r_p < L\}.$$

Позначимо

$$d_G(k_1, \dots, k_p) = \max\{|z_1|^{k_1} \dots |z_p|^{k_p} : z \in \overline{\mathbf{G}}\}, \mathbf{G} := \mathbf{G}_1.$$

Зрозуміло, що

$$d_G(k_1, \dots, k_p) = \max\{r_1^{k_1} \dots r_p^{k_p} : r \in \overline{G}\}.$$

Нехай  $E^p$  – клас – цілих функцій  $f : \mathbf{C}^p \rightarrow \mathbf{C}$  зображених кратним степеневим рядом вигляду

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_p) = \sum_{k_1 + \dots + k_p = 0}^{+\infty} a_{k_1, \dots, k_p} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}. \quad (6)$$

Для  $R > 0$  і функції  $f \in E^p$  позначимо

$$M_G(R) = M_G(R, f) = \max\{|f(z)| : z \in \overline{G}_R\},$$

$$\mu_G(R, f) = \max\{|a_{k_1, \dots, k_p} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}| : z \in \overline{G}_R(k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{Z}_+^p\}$$

і розглянемо класи збіжності інтегралів вигляду

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln M_G(R, f))}{\beta(\ln R)} d \ln R < +\infty, \quad (7)$$

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{\beta(\ln R)}{\alpha(\ln M_G(R, f))} d \ln R < +\infty, \quad (8)$$

де  $\alpha \in L$  та  $\beta \in L$ . Через  $E_{\alpha\beta}^p$  позначимо клас цілих функцій з  $E^p$ , що задовольняють умову (7), а через  $E_{\alpha\beta}^n$  клас цілих функцій з  $E^p$ , що задовольняють умову (8).

У статті [4] встановлюються умови належності цілих функцій від багатьох змінних до класу  $E_{\alpha\beta}^p$ . Стосовно класу вичерпань системою повних кратно-кругових областей, які там розглядаються, в [4, с. 68<sub>1-2</sub>] написано таке: "... and suppose that if  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \overline{G}$  then  $|z_j| \geq l > 0$  for all  $j = 1, \dots, p$ ", тобто, "... і припустимо, що якщо  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \overline{G}$ , то  $|z_j| \geq l > 0$  для всіх  $j = 1, \dots, p$ ". Це є додаткова умова на клас вичерпань простору, що розглядаються. При цьому у наведеному в статті доведенні, вона істотно використовується. З одного боку, тут наявна описка і малося, мабуть, на увазі, що замість  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \overline{G}$  слід написати  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_p) \in \partial G$  (власне, так і є у доведенні). Проте для наведених нами тут вичерпань областями  $\Pi_p(R), V_p(R), C_p(R)$ , як щойно сформульована умова зі статті [4], так і її "заміна" на слабшу умову, очевидно, не виконуються. Зрештою, міркуючи за схемою з [5, с. 173] переконуємося, що твердження наступної теореми з [4] є правильним без додаткових припущень стосовно вичерпань системою повних кратно-кругових областей. Доведення цього факту і є метою даного повідомлення.

**Теорема 2.** Нехай  $f \in E^p$  і припустимо, що функції  $\alpha, \beta$  такі, як в теоремі 1. Для того, щоб  $f \in E_{\alpha\beta}^p$  необхідно, а у випадку, коли  $A_k/A_{k+1}Z + \infty$  при  $k_0 \leq k \rightarrow \infty$  і достатньо, щоб

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha(k) - \alpha(k-1)) \beta_1 \left( \frac{1}{k} \ln \frac{1}{A_k} \right) < +\infty, \quad \beta_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{dt}{\beta(t)},$$

$$A_k = \max \{ |a_K| : \|K\| = k \}, \quad K = (k_1, \dots, k_p), \quad \|K\| = k_1 + \dots + k_p.$$

**3. Доведення основного результату.**

**Зауваження 2.** Якщо  $\alpha \in L_1$ , то [6]

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(qx)}{\alpha(x)} = c(q) < +\infty$$

для будь-якого  $q \in [1, +\infty)$ .

Для фіксованих функцій  $\alpha \in L$  і  $\beta \in L$  скажемо, що ціла функція  $f \in E^1 := E$  належить до узагальненого класу збіжності  $E_{\alpha\beta\mu}$ , якщо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu(r, f))}{r \beta(\ln r)} dr < +\infty. \tag{9}$$

Зі сказаного вище маємо такі твердження.

**Твердження 1.** Для кожної цілої функції  $f$  і довільних функцій  $\beta \in L, \alpha \in L_1$ :

$$1^0. f \in E_{\alpha\beta} \Leftrightarrow f \in E_{\alpha\beta\mu},$$

$$2^0. \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{r \alpha(\ln M_f(r))} dr < +\infty \Leftrightarrow \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{r \alpha(\ln \mu_f(r))} dr < +\infty.$$

**Твердження 2.** Для кожної цілої функції  $f \in E^p$  і будь-яких функцій  $\alpha \in L_2$  та  $\beta \in L_2$

$$f \in E_{\alpha\beta}^p \Leftrightarrow \int_{R_0}^{\infty} \frac{\alpha(\ln \mu_G(R, f))}{\beta(\ln R)} d \ln R < +\infty,$$

$$f \in E_{\alpha\beta}^n \Leftrightarrow \int_{R_0}^{\infty} \frac{\beta(\ln R)}{\alpha(\ln \mu_G(R, f))} d \ln R < +\infty.$$

**Лема 1** [7]. Нехай  $B_0 = |a_{0,\dots,0}|$ , а для  $k \geq 0, R > 0, \tau = (\tau_1, \dots, \tau_p) \in \mathbf{C}^p$ ,

$$B_k = \max \{ |a_{k_1, \dots, k_p}| | d_G(k_1, \dots, k_p) : k_1 + \dots + k_p = k \},$$

$$P_k(\tau_1, \dots, \tau_p) = \sum_{k_1 + \dots + k_p = k} a_{k_1, \dots, k_p} \tau_1^{k_1} \dots \tau_p^{k_p},$$

$$F_1(R) = \sum_{k=0}^{+\infty} M_G(1, P_k) R^k.$$

Тоді,

$$B_k \leq M_G(1, P_k) \leq B_k (k+1)^p,$$

$$\mu_{F_1}(R) = \max\{M_G(1, P_k)R^k : k \geq 0\} \leq M_G(R, f) \leq F_1(R).$$

Доведення твердження 2. За лемою 1

$$\begin{aligned} \mu_G(R, F) &= \\ &= \max\{|a_{k_1, \dots, k_p} z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R, K = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbf{Z}_+^p\} = \\ &= \max\{|a_{k_1, \dots, k_p}| \max\{|z_1^{k_1} \dots z_p^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R\}\} : K \in \mathbf{Z}_+^p\} = \\ &= \max\{|a_{k_1, \dots, k_p}| d_G(k_1, \dots, k_p)R^k : K \in \mathbf{Z}_+^p, \|K\| = k \geq 0\} = \\ &= \max\{\max\{|a_{k_1, \dots, k_p}| d_G(k_1, \dots, k_p) : K \in \mathbf{Z}_+^p, \|K\| = k\}R^k : \\ &\quad k \geq 0\} = \max\{B_k R^k : k \geq 0\} \leq \\ &\leq \max\{M_G(1, P_k)R^k : k \geq 0\} = \mu_{F_1}(R) \leq M_G(R, f), \end{aligned}$$

тобто, отримали нерівність Коші. З іншого боку,

$$\begin{aligned} M_G(R, f) &\leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \sum_{\|K\|=k} |a_{k_1, \dots, k_p}| \max\{|(2z_1)^{k_1} \dots (2z_p)^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_R\} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} \sum_{\|K\|=k} |a_{k_1, \dots, k_p}| \max\{|(z_1)^{k_1} \dots (z_p)^{k_p}| : z \in \overline{\mathbf{G}}_{2R}\} \leq \\ &\leq \mu_G(2R, F) \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} (k+1)^p = c \mu_G(2R, F), c = c(p) < +\infty. \end{aligned}$$

Власне, ми довели, що для будь-якого  $R > 0$

$$\mu_G(R, F) \leq M_G(R, f) \leq c \mu_G(2R, F).$$

Звідси негайно отримуємо твердження 2.

**Зауваження 3.** У доведенні твердження 2 ми встановили тотожну рівність

$$\mu_G(R, F) = \max\{B_k R^k : k \geq 0\}.$$

Безпосередньо з леми 1 отримуємо також таке твердження.

**Лема 2.** Нехай  $F_2(R) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k R^k$ ,  $R > 0$ . Тоді,

$$\begin{aligned} \ln \mu_{F_2}(R) &\leq \ln \mu_{F_1}(R) \leq \max\{\ln B_k + pk + k \ln R : k \geq 0\} = \\ &= \max\{\ln B_k + k(\ln R + p) : k \geq 0\} = \ln \mu_{F_2}(Re^p) \end{aligned}$$

З лем 1 і 2 за допомогою твердження 2 отримуємо таке твердження.

**Твердження 3.** Для кожної цілої функції  $f \in E^p$  і будь-яких функцій  $\alpha \in L_2$  та  $\beta \in L_2$

$$\begin{aligned} F_1 \in E_{\alpha\beta}^1 &\Leftrightarrow F_2 \in E_{\alpha\beta}^1 \Leftrightarrow F_1 \in E_{\alpha\beta\mu}^1 \Leftrightarrow F_2 \in E_{\alpha\beta\mu}^1, \\ F_1 \in \underline{E}_{\alpha\beta}^1 &\Leftrightarrow F_2 \in \underline{E}_{\alpha\beta}^1 \Leftrightarrow F_1 \in \underline{E}_{\alpha\beta\mu}^1 \Leftrightarrow F_2 \in \underline{E}_{\alpha\beta\mu}^1. \end{aligned}$$

Зауважимо, що для  $\mathbf{G}_R = C_p(R)$  маємо

$$d_{C_p}(k_1, \dots, k_p) = 1.$$

**Твердження 4.** Припустимо, що область  $\mathbf{G}_1$  є обмеженою. Тоді, існують числа  $l > 0$  і  $L > 0$  такі, що

$$l^k \leq d_G(k_1, \dots, k_p) \leq L^k,$$

$$A_k l^k \leq B_k \leq A_k L^k \quad (k = k_1 + \dots + k_p \geq 0)$$

де  $A_k = \max\{|a_{k_1, \dots, k_p}| : k_1 + \dots + k_p = k\}$ .

*Доведення.* За зауваженням 1.2 ( $\exists l > 0, L > 0$ ):

$$|C_p(l)| = \{r : r_1 < l, \dots, r_p < l\} \subset |G_1| \subset |C_p(L)| = \{r : r_1 < L, \dots, r_p < L\}.$$

Тому, враховуючи, що  $\max\{r_1^{k_1} \dots r_p^{k_p} : r \in |C_p(l)|\} = l^k d_{C_p}(k_1, \dots, k_p) = l^k$ , отримуємо

$$l^k \leq d_G(k_1, \dots, k_p) \leq L^k.$$

Звідси,

$$A_k l^k \leq \max\{a_{k_1, \dots, k_p} d_G(k_1, \dots, k_p) : k_1 + \dots + k_p = k\} = B_k \leq A_k L^k.$$

З твердження 4 негайно отримуємо таке твердження.

**Твердження 5.** Нехай  $f \in E^p$ , а

$$F_2(R) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k R^k, \quad F_3(R) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k R^k.$$

Припустимо, що область  $G_1$  є обмеженою. Тоді,

$$\mu_{F_3}(lR) \leq \mu_{F_2}(R) \leq \mu_{F_3}(LR),$$

$$F_3(lR) \leq F_2(R) \leq F_3(LR),$$

де

$$A_k = \max\{|a_K| : \|K\| = k\}, \quad B_k = \max\{|a_K| d_G(K) : \|K\| = k\}.$$

Безпосередньо з твердження 5, з огляду на зауваження 2, отримуємо таке твердження.

**Твердження 6.** Для кожної цілої функції  $f \in E^p$  і будь-яких функцій  $\alpha \in L$  та  $\beta \in L_1$

$$F_2 \in E_{\alpha\beta}^1 \Leftrightarrow F_2 \in \underline{E}_{\alpha\beta}^1 \Leftrightarrow F_2 \in E_{\alpha\beta\mu}^1 \Leftrightarrow F_3 \in E_{\alpha\beta\mu}^1,$$

$$F_2 \in \underline{E}_{\alpha\beta}^1 \Leftrightarrow F_3 \in \underline{E}_{\alpha\beta}^1 \Leftrightarrow F_2 \in \underline{E}_{\alpha\beta\mu}^1 \Leftrightarrow F_3 \in \underline{E}_{\alpha\beta\mu}^1.$$

З теореми 1 та твердження 6 негайно отримуємо теорему 2.

**4. Про класи збіжності для рядів Діріхле і одна умова типу Гольдберга [8].**

Припустимо, що функції  $\alpha, \beta \in L$  і розглянемо умови, за яких цілий ряд Діріхле  $F \in D(\lambda_+)$  вигляду

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{z\lambda_k}, \quad \lambda_+ = (\lambda_k), \quad 0 \leq \lambda_k \uparrow +\infty,$$

задовольняє умову

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(x)}{\alpha(\ln \mu(x, F))} dx < +\infty, \quad \mu(x, F) = \max\{|a_k| e^{x\lambda_k} : k \geq 0\}.$$

Для спрощення міркувань розглянемо випадок  $\alpha(x) \equiv \ln x, x > 0$ .  
Нехай  $(a_n^0)$  коефіцієнти мажоранти Ньютона  $F_H$  заданого цілого ряду Діріхле, тобто, такого ряду Діріхле  $F_H(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^0 e^{z\lambda_k}$ , що

$$1) \sigma_n := \frac{\ln a_{n-1}^0 - \ln a_n^0}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \text{ зростає до } +\infty (1 \leq n \uparrow +\infty)$$

$$2) \mu(x, F) = \mu(x, F_H) = a_n^0 e^{x\lambda_n} (\sigma_n, \sigma_{n-1});$$

$$3) (\forall n \geq 0) : |a_n| \leq a_n^0.$$

Зауважимо, що

$$M(x, F) \leq F_H(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

а також, що

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(x)}{\ln \ln \mu(x, F)} dx = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{d\beta_*(x)}{\ln \ln \mu(x, F)} dx < +\infty, \quad (10)$$

де вжито позначення

$$\beta_*(x) = \int_0^x \beta(t) dt.$$

За критерієм Коші нескладно доводимо, що  $\beta_*(x) / \ln \ln \mu(x, F) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +\infty$ ), тому інтегруючи частинами отримуємо

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(x)}{\ln \ln \mu(x, F)} dx < +\infty = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{d\beta_*(x)}{\ln \mu(x, F) \ln^2 \ln \mu(x, F)}.$$

Зауважимо, що  $\ln a_n^0 = \ln a_{n-1}^0 - \sigma_n (\lambda_n - \lambda_{n-1}) \leq -\sigma_n (\lambda_n - \lambda_{n-1})$ , а також

$$\ln a_n^0 = -\sum_{k=1}^n \sigma_k (\lambda_k - \lambda_{k-1}),$$

тому

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma_n, F) &= -\sum_{k=1}^n \sigma_k (\lambda_k - \lambda_{k-1}) + \sigma_n \lambda = \\ &= \sum_{k=1}^n (\sigma_n - \sigma_k) (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \geq (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \lambda_{n-1}, \end{aligned}$$

$$\ln \mu(\sigma_{n+1}, F) = \ln a_{n+1}^0 + \sigma_{n+1} \lambda_{n+1} \leq -\sigma_{n+1} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) + \sigma_{n+1} \lambda_{n+1} = \sigma_{n+1} \lambda_n.$$

Звідси

$$T := \int_{x_0}^{+\infty} \frac{d\beta_*(x)}{\ln \mu(x, F) \ln^2 \ln \mu(x, F)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[\sigma_n, \sigma_{n+1})} \frac{\beta_*(x)}{\ln \mu(x, F) \ln^2 \ln \mu(x, F)} dx.$$



Звідки отримаємо, що якщо  $\Gamma < +\infty$ , то

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{\sigma_{n+1} \lambda_n \ln(\sigma_{n+1} \lambda_n)} < +\infty. \quad (11)$$

Якщо ж

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{(\sigma_n - \sigma_{n-1}) \lambda_{n-1} \ln((\sigma_n - \sigma_{n-1}) \lambda_{n-1})} < +\infty, \quad (12)$$

то  $\Gamma < +\infty$ . Отже ми довели таке твердження.

**Теорема 3.** Для того, щоб для кожного цілого ряду Діріхле  $F \in D(\lambda_+)$  виконувалась умова (10) достатньо, щоб виконувалась умова (12) і необхідно, щоб виконувалась умова (11).

Для цілих функцій  $f \in E^p$  розглянемо тепер клас збіжності інтеграла

$$\int_{x_0}^{+\infty} \frac{\beta(\ln r)}{\ln \ln M_G(r, F)} d \ln r. \quad (13)$$

Тоді, з огляду на отримані вище у п. 3 твердження, можемо сформулювати таку теорему.

**Теорема 4.** Для того, щоб для кожної цілої функції  $f \in E^p$  виконувалась умова (13) достатньо, щоб виконувалась умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{(\sigma_n - \sigma_{n-1})(n-1) \ln((\sigma_n - \sigma_{n-1})(n-1))} < +\infty,$$

і необхідно, щоб виконувалась умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\beta_*(\sigma_{n+1}) - \beta_*(\sigma_n))}{\sigma_{n+1} n \ln(\sigma_{n+1} n)} < +\infty,$$

де  $\sigma_n = \ln A_{n-1}^0 - \ln A_n^0$ , а  $(A_k^0)$  – коефіцієнти мажоранти Ньютона цілої функції  $\sum_{k=0}^{\infty} A_k R^k$ ,  $A_k = \max\{|a_k| : \|K\| = k\}$ ,  $K = (k_1, \dots, k_p)$ ,  $\|K\| = k_1 + \dots + k_p$ .

Відзначимо, що подібні твердження отримано в [9] також для рядів типу Тейлора-Діріхле.

### Література

1. Valiron G. General theory of integral functions / G. Valiron. – Toulouse, 1923. – 382 p.
2. Мулява О.М. Класи збіжності в теорії рядів Діріхле / О.М. Мулява // Доп НАНУ. – 1999. – 3. – С. 35-39.
3. Мулява О.М. Про класи збіжності рядів Діріхле / О.М. Мулява // Укр. матем. ж. – 1999. – Т.51, 11. – С.1485-1494.
4. Mulyava O.M. On the convergence classes for entire functions of several complex variables / O.M. Mulyava, M.M. Sheremeta // Mat. Stud. – 2016. – V.46, 1. – С. 67-71.
5. Ронкин Л.И. Введение в теорию целых функций многих переменных / Л.И. Ронкин. – М.: Наука, 1971 – 432 с.

6. Sheremeta M.M. On two classes of positive functions and belonging to them of main characteristic of entire functions / M.M. Sheremeta // Mat. Stud. – 2003. – V. 19, 1. – P. 73-82.
7. Гольдберг А.А. Элементарные замечания о формулах для определения порядка и типа целых функций многих переменных / А.А. Гольдберг // ДАН Арм. ССР. – 1959. – V.29, 4. – С. 145-152.
8. Gol'dberg A.A. Sets on which the modulus of an entire function is bounded below / A.A. Gol'dberg // Siberian Math. J. – 1980. – V.20. – P.360-364.
9. Скасків О.Б. Про класи збіжності рядів, подібних на ряди Тейлора-Діріхле / О.Б. Скасків, О.Ю. Тарновецька // Буковинський матем. журн. – 2015. – Т.3, №3-4. – С.170-172.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 6.12.2017 р.  
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором Загороднюком А.В.,  
д.ф.-м.н., професором Чижикивим І.Е. (м. Львів)*

## THE CONVERGENCE CLASSE FOR ENTIRE FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

**O. B. Skaskiv<sup>1</sup>, O. Yu. Tarnovecka<sup>2</sup>, T. M. Salo<sup>3</sup>**

*<sup>1</sup>Ivan Franko National University of Lviv;*

*79001, Lviv, Universytetska Str., 1; e-mail: olskask@gmail.com*

*<sup>2</sup>Chernivtsi Dept. Nat. Tech. Univ. "Kharkiv Polytechnic Institute";*

*58018, Chernivtsi, Holovna Str., 203-a; e-mail: savinskaolga@gmail.com*

*<sup>3</sup>National University "Lviv's'ka Polytehnika";*

*79013, Lviv, Stepan Bandera Str., 12; e-mail: tetyan.salo@gmail.com*

*In article it is obtained sufficient and necessary conditions for belonging to generalized convergence classes entire functions of several complex variables.*

**Key words:** *convergence classes, entire functions, several complex variables*