УДК 532.595

ПРО РУХ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ЦИЛІНДРІ, ЯКИЙ ЗДІЙСНЮЄ РЕГУЛЯРНУ ПРЕЦЕСІЮ

І. М. Гураль[1], О. Т. Гамарник[2]

[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15

[2]Івано-Франківський національний медичний університет; 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Галицька, 2

Побудовано розв'язок лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для визначення усталеного відносного руху в'язкої нестисливої рідини, яка частково заповнює циліндричну посудину, що здійснює повільну регулярну прецесію з довільним кутом нутації. Визначена осьова проекція моменту сил, що діють на бічну поверхню посудини з боку рідини.

Ключові слова: в'язка нестислива рідина, регулярна прецесія.

Задачі динаміки тіл, що містять порожнини з рідиною, віддавна є об'єктом багатьох досліджень (див., наприклад, [1], [2]). Цікаві з теоретичної точки зору, ці задачі набувають все більшого прикладного значення. В деяких прикладних задачах виникає необхідність оцінки впливу рідини на рух тіла, що знаходиться в режимі прецесії.

Нехай тверде тіло має порожнину в формі прямого кругового циліндра радіусом a і довжиною $2c$, яка частково заповнена нестисливою рідиною густиною ρ та в'язкістю μ. Припустимо, що тіло здійснює регулярну прецесію навколо нерухомого напряму L з кутовою швидкістю прецесії Ω. Вважатимемо, що власне обертання тіла здійснюється з кутовою швидкістю ω навколо осі порожнини, яка перетинається з лінією L в центрі O циліндра і утворює з нею сталий кут нутації θ.

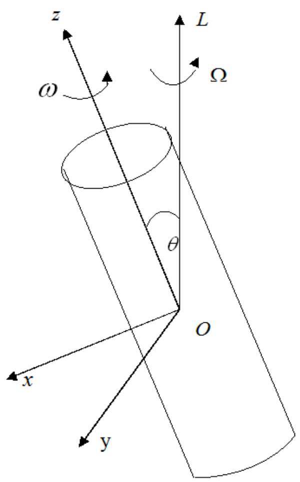

Рис. 1

Введемо систему координат $Oxyz$, вісь Oz якої спрямована вздовж осі порожнини, і яка обертається з кутовою швидкістю прецесії навколо нерухомої осі L. Вісь Ox розташуємо в площині OzL (рис.1). Розглянемо задачу про усталений відносний рух рідини в порожнині тіла. Зручно представити швидкість рідини відносно системи координат $Oxyz$ так $\mathbf{v} = \mathbf{v}_m + \mathbf{v}_в$, де $\mathbf{v}_m$ – швидкість рідини як абсолютно твердого тіла, $\mathbf{v}_в$ – відхилення швидкості від обертання як абсолютно твердого тіла.

Як характерні величини довжини, часу і густини використаємо a, ω^{-1}, ρ.

В циліндричних координатах r, φ, z рівняння руху рідини для безрозмірних компонент u, v, w швидкості $\mathbf{v}_в$ мають вигляд

$$D'u-\frac{v^2}{r}-2\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)v+2\varepsilon\sin\theta w\sin\varphi=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{Re}\left(D''u-\frac{u}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right),$$

$$D'v+\frac{uv}{r}+2\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)u+2\varepsilon\sin\theta w\cos\varphi=-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\frac{1}{Re}\left(D''v-\frac{v}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right),\quad (1)$$

$$D'w-2\varepsilon\sin\theta v\cos\varphi-2\varepsilon\sin\theta u\sin\varphi-2\varepsilon r\sin\theta\cos\varphi=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{Re}D''w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

де

$$D'=\frac{\partial}{\partial\varphi}+u\frac{\partial}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}+w\frac{\partial}{\partial z},\quad D''=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\varepsilon=\frac{\Omega}{\omega},\quad Re=\frac{\omega a^2\rho}{\mu},$$

$$p=P-\frac{1}{2}\left(r^2\left(1+\varepsilon\cos\theta\right)^2+\varepsilon^2\sin^2\theta r^2\sin^2\varphi+2\varepsilon^2\sin\theta\cos\theta rz\cos\varphi+\varepsilon^2\sin^2\theta z^2\right),$$

P – тиск.

Ці рівняння з точністю до позначень співпадають з наведеними в [3]. Проте, якщо в [3] вдалося побудувати розв'язок в припущенні, що в'язкість рідини і кут нутації θ малі, то в даній роботі вважатимемо, що в'язкість рідини і кут нутації довільні, а кутова швидкість власного обертання ω набагато більша кутової швидкості прецесії, так, що ε – мала величина.

Перейдемо до формулювання граничних умов. На бічній стінці повинна виконуватися умова прилипання:

$$r=1:\quad u=0, v=0, w=0\quad (2)$$

Рівняння вільної поверхні представимо у вигляді

$$f=r-b-\zeta\left(\varphi,z\right)=0.$$

Коли $\varepsilon=0$, то $\zeta\left(\varphi,z\right)=0$. Природно вважати, що збурення $\zeta\left(\varphi,z\right)$ – мала величина порядку ε. Граничні умови на вільній поверхні мають вид

$$r=b+\zeta\left(\varphi,z\right):\quad \sigma_{ik}n_k=-P_0n_i,\quad u-\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}-\frac{v}{r}\frac{\partial\zeta}{\partial\varphi}-w\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0,\quad (3)$$

де σ_{ik} – компоненти тензора напруження, n_k – компоненти вектора нормалі до поверхні рідини, P_0 – тиск в тій частині посудини, де рідина відсутня.

Приймемо, що видовження порожнини велике і вплив торців буде суттєвим тільки на відстані порядку $O(1)$ від торців. Тому, як і в [3], опустимо граничні умови на торцях і будемо шукати усталений розв’язок на скінченному відрізку немов би нескінченного циліндра.

Будуватимемо розв’язок системи (1) з граничними умовами (2), (3) у вигляді розкладу за параметром ε:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \varepsilon \mathbf{v}_1 \ldots, \qquad p = p_0 + \varepsilon p_0 \ldots, \quad \zeta = \varepsilon \zeta_0 \ldots \tag{4}$$

В нульовому наближенні отримаємо очевидний розв’язок $\mathbf{v}_0 = 0, \quad p_0 = P_0 - 0,5b^2$.

Підставимо (4) в рівняння (1), (2), (3) і прирівняємо коефіцієнти при ε. Одержимо:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} - 2v_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{Re}\left(D'' u_1 - \frac{u_1}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \right), \\
\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + 2u_1 = -\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{Re}\left(D'' v_1 - \frac{v_1}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right), \\
\frac{\partial w_1}{\partial \varphi} - 2\sin\theta r \cos\varphi = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{Re} D'' w_1, \\
\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0,
\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}
r = 1: \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0 \\
r = b: \quad -p_1 - b^2\cos\theta - b\zeta_1 + \frac{2}{Re}\frac{\partial u_1}{\partial r} = 0, \\
\frac{1}{b}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{b} = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0, \quad u_1 - \frac{\partial \zeta_1}{\partial \varphi} = 0.
\end{gathered} \tag{6}$$

Розв’язок системи (5) з граничними умовами (6) шукатимемо у вигляді

$$\begin{gathered}
u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad \zeta_1 = 0, \quad p_1 = -b^2\cos\theta, \\
w^{(1)}(r,\varphi) = \sin\theta\left(w_c(r)\cos\varphi + w_s(r)\sin\varphi \right).
\end{gathered} \tag{7}$$

Підставимо (7) в (5), (6) і отримаємо наступну задачу для визначення комплексної функції $w = w_s + iw_c$:

$$w'' + \frac{w'}{r} - \frac{w}{r^2} - i\,\mathrm{Re}\, w = -2irRe \tag{8}$$

$$r = 1: \quad w = 0, \quad r = b: \quad w' = 0$$

де $(\ )' = \dfrac{d(\ )}{dr}$

Загальний розв’язок лінійного неоднорідного рівняння (8) має вид

$$w(r) = 2r + C_1 I_1(qr) + C_2 K_1(qr), \tag{9}$$

де $I_1(qr), K_1(qr)$ – модифіковані функції Бесселя і Ганкеля комплексного аргументу qr $\left(q=(1+i)\left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \right)$. Константи C_1 і C_2 визначаються з граничних умов і дорівнюють

$$C_1=\frac{-2\left(K_1(q)+qK_0(qb)+\frac{K_1(qb)}{b}\right)}{K_1(q)\left(qI_0(qb)-\frac{I_1(qb)}{b}\right)+I_1(q)\left(qK_0(qb)+\frac{K_1(qb)}{b}\right)},$$

$$C_2=\frac{2\left(I_1(q)-qI_0(qb)+\frac{I_1(qb)}{b}\right)}{K_1(q)\left(qI_0(qb)-\frac{I_1(qb)}{b}\right)+I_1(q)\left(qK_0(qb)+\frac{K_1(qb)}{b}\right)}. \tag{10}$$

Сукупність формул (7), (9), (10) описує розв'язок поставленої задачі в першому наближенні. Ці формули можна спростити для частинних випадків великих і малих чисел Рейнольдса Re.

При $Re \gg 1$ аргументи функцій Бесселя великі, то ж скористаємось асимптотичним представленням бесселевих функцій для великих аргументів [4]

$$I_\nu(z)\approx i^{-\nu}\sqrt{\frac{1}{2\pi iz}}e^{z+i\nu\pi/2+i\pi/4},\quad K_\nu(z)\approx i^{\nu+1}\pi\sqrt{\frac{1}{2\pi iz}}e^{-z-i\nu\pi/2-i\pi/2}.$$

Із (9), (10) отримаємо розв'язок для великих чисел Рейнольдса

$$w(r)=2r-2r^{-1/2}e^{q(r-1)}+\frac{2}{q}\left(\frac{r}{b}\right)^{-1/2}e^{q(b-r)}+O\left(\frac{1}{q^2}\right). \tag{11}$$

Із виду (11) випливає, що поза тонкими пограничними шарами біля твердої стінки і вільної поверхні розв'язок поводиться як $w\approx 2r$, що відповідає розв'язку для ідеальної рідини. Другий доданок в формулі для w характеризує течію в тонкому пограничному шарі біля твердої стінки, а третій – біля вільної поверхні, причому він має менший порядок малості порівняно з доданком, який описує течію біля твердої стінки. Такий самий розв'язок можна отримати, розв'язуючи задачу для великих чисел Рейнольдса методом пограничного шару.

Для випадку малих аргументів модифіковані функції Бесселя і Ганкеля нульового і першого порядків можна представити у вигляді

$$I_0(z)=1+\frac{z^2}{2^2}+o(z^2),\quad I_1(z)=\frac{z}{2}+\frac{z^3}{2^4}+o(z^3),$$

$$K_0(z)=-\ln\frac{\gamma z}{2}+\frac{z^2}{2^2}\left(1-\ln\frac{\gamma z}{2}\right)+o(z^2),\quad K_1(z)=\frac{1}{z}+\frac{z}{2}\left(\ln\frac{\gamma z}{2}-\frac{1}{2}\right)+o(z^3),$$

де γ – константа Ейлера.

Із (9), (10) отримаємо розв'язок для малих чисел Рейнольдса

$$w(r) = Re\frac{i}{4}\left(\frac{1+3b^4}{1+b^2}r + \frac{b^2\left(1-3b^2\right)}{1+b^2}\frac{1}{r} - r^3\right) + O\left(Re^2\right).$$

Як при малих, так и при великих числах Рейнольдса течія складається із двох потоків, один із яких спрямований вздовж осі z, а інший – у протилежному напрямі. Для великих Re в розв'язку домінує дійсна складова, тобто максимальна швидкість досягається при $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\varphi = \frac{3\pi}{2}$, і потік має додатній напрям спереду по ходу прецесійного обертання $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$. Для малих Re в розв'язку домінує уявна частина, тому швидкість максимальна при $\varphi = 0$; $\varphi = \pi$ і потік має додатній напрям при $\varphi = 0$.

Для визначення моменту сил, що діють на тіло з боку рідини, скористаємося теоремою про зміну моменту кількості руху відносно початку координат. Тоді для гідродинамічного моменту отримаємо

$$\mathbf{M} = \iiint\limits_V \mathbf{R}\times\Big(\big(\left(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}\right)\nabla\big)\left(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}\right) + 2\boldsymbol{\Omega}\times\left(\mathbf{v}+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}\right) + \boldsymbol{\Omega}\times\left(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}\right)\Big)dV, \quad (12)$$

де V – об'єм, який займає рідина.

Підставляючи отримані вище розв'язки в (12), для осьової проекції моменту будемо мати

$$M_z = 4\rho\omega^2 a^4 c\pi \sin^2\theta \frac{\varepsilon^2}{Re}\Big(4 + 2b^2 + \mathrm{Re}\big\{C_1\left(qI_0\left(q\right) + bI_1\left(qb\right)\right) +$$

$$+C_2\left(-qK_0\left(q\right) + bK_1\left(qb\right)\right)\big\}\Big),$$

де $\mathrm{Re}\{\ \}$ означає дійсну частину виразу в дужках.

Для частинних випадків малих і великих чисел Рейнольдса матимемо відповідно

$$M_z = -\frac{1}{12}\rho\omega^2 a^4 c\pi \sin^2\theta\varepsilon^2 Re\frac{\left(1-b^2\right)^3\left(7b^2+1\right)}{1+b^2},$$

$$M_z = -4\sqrt{2}\rho\omega^2 a^4 c\pi \sin^2\theta\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{Re}}.$$

Література

1. Моисеев Н.Н. Динамика тел с полостями, содержащими жидкость / Н.Н. Моисеев, В.В. Румянцев. – М.: Наука, 1965. – 439 с.
2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость / Ф.Л.Черноусько. – М.: ВЦ АН СССР, 1968. – 230 с.
3. Казмерчук И.М. О движении вязкой жидкости в прецессирующем цилиндре / И.М. Казмерчук, В.А. Самсонов // Изв. АН РАН МЖГ. – 1993. – № 6. – С. 134-137.

4. Янке Е. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Леш. – М.: Наука, 1977. – 342 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.12.2010 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.***

VISCOUS FLUID MOTION IN CYLINDER EXECUTING REGULAR PRECESSION

I. M. Gural[1], O.T.Gamarnyk[2]
[1]*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*
76019, *Ivano-Frankivs'k, st. Carpats'k,* 15
[2]*Ivano-Frankivs'k national medical university;*
76000, Ivano-Frankivs'k, st. Galich, 2

The solution of the linearized Navier-Stokes equations for determining the steady relative motion of viscous incompressible fluid partly filling a cylindrical vessel executing slow regular precession with an arbitrary angle of nutation is constructed. The axial component of the moment of the forces exerted by the fluid on the lateral surface of the vessel is determined.

Key words: *viscous incompressible fluid, regular precessio*