

ПРО РІВНЯННЯ РІВНОВАГИ ПРУЖНОЇ ЛІНІЇ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ

В. М. Мойсишин

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
Україна, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua.*

Для складання векторних рівнянь рівноваги ділянок бурильної колони введені кути Ейлера-Крилова замість традиційно вживаних кутів Ейлера, одержано нові залежності для обчислення кривини та кручення пружної лінії. У результаті досліджень отримано замкнену систему загальних рівнянь рівноваги довільної ділянки бурильної колони та запропоновано шляхи її розв'язування.

Ключові слова: *рівняння рівноваги, пружна лінія бурильної колони, кути Ейлера-Крилова, кривина, кручення, згинаючий момент, крутний момент, переміщення, внутрішня сила, внутрішній момент.*

Удосконалення методів розрахунку бурильних колон вимагає розробки теоретичних основ складання рівнянь рівноваги, які враховують найбільш важливі чинники, що діють на ділянку бурильних труб. При цьому необхідно встановити функціональні залежності між зміною просторової орієнтації пружної осі колони і внутрішніми силами та моментами з урахуванням взаємодії труб зі стінками свердловини.

При вивченні просторових форм рівноваги ділянок колони бурильних труб нами використано результати досліджень Ніколаї Є.Л. [4], Лур'є А.І. [2], Ніколенко І.В. [5], Попова Є.Н. [6], Светліцкогo В.А. [7], Ілюхіна А.А. [1], Макушина В.М. і Петрова В.В. [3].

1. Векторні рівняння рівноваги ділянки бурильної колони

Виведемо диференціальні рівняння рівноваги ділянки бурильної колони довжиною l , до якої прикладено кінцеві зосереджені сили \bar{P} і моменти \bar{M} , а також розподілені по довжині сили $\bar{f}(s)$ і моменти $\bar{m}(s)$. У перерізах труб при цьому виникнуть внутрішні сили \bar{Q} і моменти \bar{L} . За певних поєднань навантажень пружна лінія осі бурильної колони втрачає прямолінійну стійку форму і деформується.

Для складання векторних рівнянь рівноваги ділянки колони виділимо (див. рис. 1) елемент довжини ds між двома поперечними перерізами і виберемо такі системи координат: нерухому опорну $\xi \eta \zeta$; зв'язану з віссю свердловини $\xi' \eta' \zeta'$; відносну, зв'язану з пружною лінією, $x' y' z'$ і розрахункову $x y z$. Орти введених систем позначимо відповідно $\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0, \bar{\zeta}_0, \bar{\xi}'_0, \bar{\eta}'_0, \bar{\zeta}'_0, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Відлік дугової координати вестимемо від деякої фіксованої точки у вибраному напрямку вздовж

пружної лінії. Нехай загальний початок системи $x y z$ рівномірно рухається вздовж пружної лінії зі швидкістю ($s = t$) рівною одиниці.

Осі розрахункової системи зв'язані з центром площі поперечного перерізу і спрямовані так чином: вісь z – по дотичній до осьової лінії труби в бік зростання дугової координати s , а осі x та y – вздовж головних осей інерції поперечного перерізу.

Вектори внутрішніх сил і моментів у проекціях на осі розрахункової системи координат можна подати залежностями

$$\bar{Q} = Q_x \bar{x}_0 + Q_y \bar{y}_0 + Q_z \bar{z}_0, \quad (1.1)$$

$$\bar{L} = L_x \bar{x}_0 + L_y \bar{y}_0 + L_z \bar{z}_0, \quad (1.2)$$

де Q_x, Q_y – перерізуючі сили, Q_z – осьова сила, L_x, L_y – згинальні моменти, L_z – крутний момент.

За приросту дугової координати s на ds внутрішні сила \bar{Q} і момент \bar{L} зміняться відповідно на $d\bar{Q}$ та $d\bar{L}$. Розглядаючи рівновагу елемента ds і прирівнюючи до нуля суми усіх діючих сил і моментів, одержимо векторні рівняння

$$d\bar{Q} + \bar{f}(s)ds = 0, \quad (1.3)$$

$$d\bar{L} + (\bar{z}_o \times \bar{Q})ds + \bar{m}(s)ds = 0, \quad (1.4)$$

або
$$\frac{d\bar{Q}}{ds} + \bar{f}(s) = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{d\bar{L}}{ds} + \bar{z}_o \times \bar{Q} + \bar{m}(s) = 0. \quad (1.6)$$

У рівняннях (1.5) і (1.6) не враховано зсуви у поперечних перерізах. Розміри перерізів малі порівняно з довжиною і радіусом кривини точок пружної лінії колони. Переміщення точок пружної лінії можуть бути більшими, але матеріал стрижня повинен працювати в межах закону Р.Гука. Ґрунтуючись на принципі А.Ж.К. Сен-Венана, припускаємо, що поздовжні волокна не піддаються впливові поперечного стиску або розтягу, а також дії дотичних напружень.

Інтегруючи (1.5)-(1.6), одержимо

$$\bar{Q}(s) = -\int \bar{f}(s)ds + \bar{C}_1, \quad (1.7)$$

$$\bar{L}(s) = -\int [\bar{z}_o \times \bar{Q}(s) + \bar{m}_1(s) + \bar{l} \times \bar{f}(s)]ds + \bar{C}_2, \quad (1.8)$$

де \bar{C}_1, \bar{C}_2 – сталі інтегрування, що визначаються кінцевими силами і моментами.

У рівнянні (1.8) вектор $\bar{m}(s)$ розподіленого по довжині моменту подано сумою

$$\bar{m}(s) = \bar{m}_1(s) + \bar{l} \times \bar{f}(s), \quad (1.9)$$

де $\bar{m}_1(s)$ – власне розподілений момент, $\bar{l} \times \bar{f}(s)$ – момент розподіленої сили \bar{f} , \bar{l} – вектор, що з'єднує цент ваги перерізу s з точкою прикладання розподіленого силового навантаження.

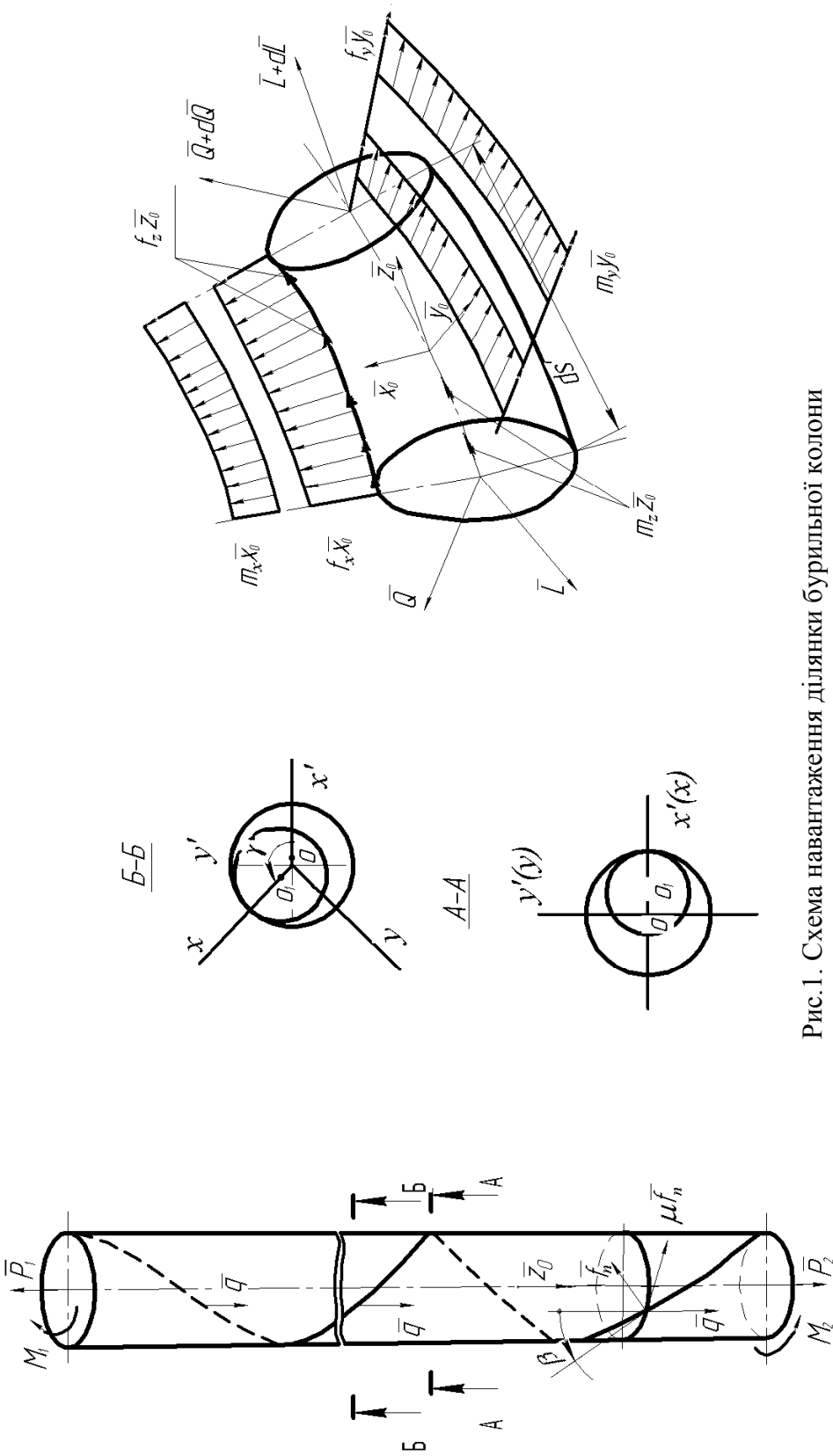


Рис.1. Схема навантаження ділянки бурильної колони

Розв'язування задач, пов'язаних із вивченням деформації пружних тонких стрижнів, як показав проведений нами аналіз, найбільш зручно проводити в кутах Ейлера-Крилова α , β , γ , які використовуються в теорії гіроскопічних систем. Позначимо через α кут нахилу осі свердловини до вертикалі, через β – кут, утворений дотичними до осей свердловини та бурильної колони, а через γ – кут між відрізками, що перебувають у площинах, перпендикулярних до осі свердловини, і з'єднують вісь гірничої виробки з точкою пружної лінії при $s = 0$ та за поточного значення координати s (див. рис.1).

Нехай в початковий момент часу однойменні осі цих чотирьох введених нами координатних систем збігаються. Перехід від початкового до кінцевого положення осей здійснюється шляхом трьох поворотів згідно наведеної нижче схеми

$$\begin{array}{ccccccc} \xi & \rightarrow & \alpha & \rightarrow & \xi' & & x' & & x \\ \eta & & & & \eta' & \rightarrow & \beta & \rightarrow & y' & & y \\ \zeta & & & & \zeta' & & z' & \rightarrow & \gamma & \rightarrow & z. \end{array}$$

Послідовність розглянутих кутових поворотів може бути довільною. Області допустимих значень кутів Ейлера-Крилова визначаються нерівностями $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ та $\gamma > 0$. При визначенні меж зміни кута β знаки рівності не використовуються, оскільки стрижень має деяку товщину.

Переваги використання кутів Ейлера-Крилова у порівнянні з кутами Л.Ейлера полягають ось у чому:

1. При малому відхиленні пружної лінії від рівноважного положення усі три кути Ейлера-Крилова малі. У випадку використання кутів Л.Ейлера ψ, θ, γ малому відхиленню осі бурильної колони від початкового положення відповідають, загалом кажучи, не малі, а кінцеві кути ψ та φ , при цьому різниця цих кутів і значення θ є малими величинами. Це незручно при складанні наближених рівнянь рівноваги пружної лінії бурильної колони.

2. Перехід від початкового положення осей розрахункової системи до кінцевого їхнього положення здійснюється шляхом трьох незалежних поворотів у довільній послідовності. При використанні кутів Л.Ейлера згаданий перехід проводиться також шляхом трьох поворотів, але два з них повинні виконуватися навколо однієї осі. Це незручно при складанні таблиць косинусів кутів між осями різних систем координат, тому що ці таблиці будуть застосовні тільки для зазначеної послідовності поворотів.

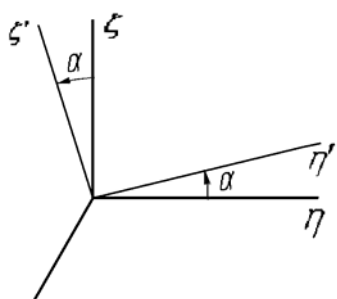
3. Кути Ейлера-Крилова безпосередньо визначають відхилення α осі свердловини від вертикалі, нахил β пружної лінії бурильної колони до осі свердловини і кут закручення γ виділеної ділянки труб. Визначення цих же величин у кутах Л.Ейлера є можливим тільки після встановлення додаткових взаємозв'язків.

Вказані вище переваги забезпечують наочність і можливість широкого застосування кутів Ейлера-Крилова для складання векторних рівнянь рівноваги довільно орієнтованих у просторі ділянок бурильної колони і аналізу їхнього пружного стану.

Таким чином, складені векторні рівняння (1.5) і (1.6) дають змогу встановити залежності для визначення внутрішніх сил і моментів у будь-якому перерізі колони, але для цього необхідне детальне вивчення особливостей деформування осі пружної лінії, а також врахування усіх складових зовнішніх сил і моментів, що діють по довжині розглянутої ділянки колони.

2. Складання таблиць косинусів

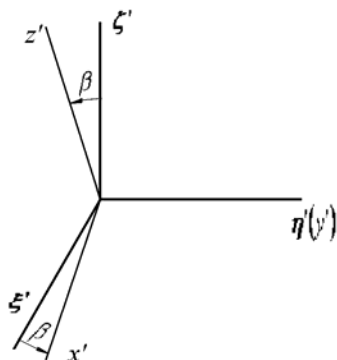
Під час розв'язування задач, пов'язаних з вивченням просторових форм рівноваги пружної лінії бурильної колони, виникає необхідність використання векторних рівнянь (1.5), (1.6) у проєкціях на осі тієї чи іншої системи координат. У деяких випадках розв'язок рівняння у певній координатній системі виявляється більш простим. Подання векторних рівнянь рівноваги стрижня у будь-якій введеній нами системі координат можна легко здійснити за допомогою складених нижче таблиць косинусів:



між $\xi \eta \zeta$ та $\xi' \eta' \zeta'$

	ξ	η	ζ
ξ'	1	0	0
η'	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
ζ'	0	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$

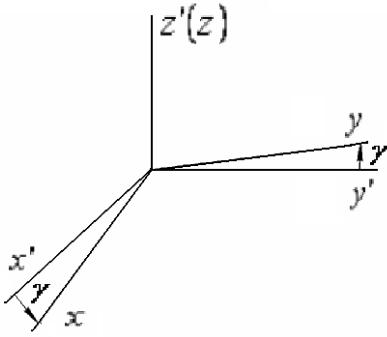
Табл. 2.1



між $\xi \eta \zeta$ та $x' y' z'$

	ξ'	η'	ζ'
x'	$\cos \beta$	0	$-\sin \beta$
y'	0	1	0
z'	$\sin \beta$	0	$\cos \beta$

Табл. 2.2



між $x'y'z'$ та $x y z$

	x'	y'	z'
x	$\cos \gamma$	$\sin \gamma$	0
y	$-\sin \gamma$	$\cos \gamma$	0
z	0	0	1

Табл. 2.3

між $\xi\eta\zeta$ та $x'y'z'$

	ξ	η	ζ
x'	$\cos \beta$	$\sin \alpha \sin \beta$	$-\cos \alpha \sin \beta$
y'	0	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
z'	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

(2.1)x(2.2)

Табл. 2.4

між $\xi'\eta'\zeta'$ та x, y, z

	ξ'	η'	ζ'
x	$\cos \beta \cos \gamma$	$\sin \gamma$	$-\sin \beta \cos \gamma$
y	$-\cos \beta \sin \gamma$	$\cos \gamma$	$\sin \beta \sin \gamma$
z	$\sin \beta$	0	$\cos \beta$

(2.2)x(2.3)

Табл. 2.5

між $\xi\eta\zeta$ та $x y z$

	ξ	η	ζ
x	$\cos \beta \cos \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \lambda$	$\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \lambda$
y	$-\cos \beta \sin \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$
z	$\sin \beta$	$-\sin \alpha \cos \beta$	$\cos \alpha \cos \beta$

(2.3)x(2.4)

або
(2.1)x(2.5)

Табл. 2.6

Таблиці 2.4-2.6 отримані на підставі відомої в аналітичній геометрії формули множення. Маючи напрямні косинуси векторів \bar{a} та \bar{b} у системі координат $\xi\eta\zeta$, запишемо

$$\begin{aligned} \cos(\bar{a}, \bar{b}) &= \cos(\bar{a}, \bar{\xi})\cos(\bar{b}, \bar{\zeta}_0) + \cos(\bar{a}, \bar{\eta}_0) \times \\ &\times \cos(\bar{b}, \bar{\eta}_0) + \cos(\bar{a}, \bar{\zeta}_0)\cos(\bar{b}, \bar{\zeta}_0) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Тепер, наприклад:

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{z}'_0) &= \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{\xi}'_0)\cos(\bar{z}'_0, \bar{\xi}'_0) + \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{\eta}'_0) \times \\ &\times \cos(\bar{z}'_0, \bar{\eta}'_0) + \cos(\bar{\zeta}_0, \bar{\zeta}'_0)\cos(\bar{z}'_0, \bar{\zeta}'_0) = \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отримані таблиці косинусів дозволяють проектувати рівняння рівноваги для визначення внутрішніх сил і моментів у тих чи інших осях координат у будь-якому перерізі колони.

3. Вектор повної кривини пружної лінії бурильної колони

Введемо для довільно орієнтованої у просторі пружної лінії вектор кривини \vec{e} і вектор кручення \vec{i} , геометрична сума яких складає вектор повної кривини

$$\vec{\omega} = \vec{e} + \vec{i}. \quad (3.1)$$

Перенесемо в теорію деформування тонких стрижнів відому в механіці формулу Л.Ейлера

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (3.2)$$

де $\vec{\omega}$ – вектор кутової швидкості обертання осей розрахункової системи навколо свого початку під час руху вздовж пружної лінії зі швидкістю, рівною одиниці ($s=t$); \vec{r} – радіус-вектор початку розрахункової системи відносно опорної.

Таким чином, ці вектори можна подати такими залежностями

$$\vec{r} = \bar{\xi}_0 \bar{\xi} + \bar{\eta}_0 \bar{\eta} + \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}, \quad (3.3)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (3.4)$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{\rho} \vec{b} + \left(\frac{1}{T} + \frac{dx}{ds} \right) \vec{\tau}. \quad (3.5)$$

З виразу (3.5) бачимо, що

$$\vec{e} = \frac{1}{\rho} \vec{b}, \quad (3.6)$$

$$\vec{i} = \left(\frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds} \right) \vec{\tau}, \quad (3.7)$$

де $1/\rho$ – кривина пружної лінії стрижня в розглянутій точці; $1/T$ – кручення пружної лінії; \vec{b} і $\vec{\tau}$ – відповідно одиничні вектори, спрямовані вздовж по бінормалі і дотичній натурального триєдра; $\chi(s)$ – кут, утворений головною нормаллю \vec{n} натурального триєдра і віссю x розрахункової системи.

Підкладаючи вирази (3.4) у (3.2), одержимо

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3.8)$$

Отже, для ортів розрахункової системи координат мають місце співвідношення

$$\frac{d\bar{x}_0}{ds} = \vec{\omega} \times \bar{x}_0, \quad \frac{d\bar{y}_0}{ds} = \vec{\omega} \times \bar{y}_0, \quad \frac{d\bar{z}_0}{ds} = \vec{\omega} \times \bar{z}_0. \quad (3.9)$$

Якщо віссю стрижня є пряма, але похідна $\frac{d\chi}{ds}$ тотожно не дорівнює нулю, то стрижень є природно закрученим. Якщо $1/\rho$, $1/T$, χ від-

різняються від нуля, то стрижень криволінійний, а при $\frac{1}{\rho} = 0$, $\frac{1}{T} = 0$,

$\frac{d\chi}{ds} = 0$ – стрижень прямолінійний.

Якщо $\chi(s) = 0$, то перші похідні від ортів $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} натуральної системи координат зв'язані відомими в аналітичній геометрії формулами Френе-Серре

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{\rho}\bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = \frac{1}{T}\bar{b} - \frac{1}{\rho}\bar{\tau}, \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\bar{n}. \quad (3.10)$$

Існує зв'язок між радіусом кривини $\rho(s)$ і кутом $\chi(s)$ з однієї сторони і функціями $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ – з іншої.

Позначаючи через p , q , r проекції вектора повної кривини на осі розрахункової системи, можемо записати

$$p = \frac{1}{\rho} \sin \chi, \quad q = \frac{1}{\rho} \cos \chi, \quad r = \frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds}. \quad (3.11)$$

Геометричний зміст p і q – кривини проекцій елемента ds стрижня в площинах yz і zx , а r – кручення пружної лінії.

Введемо поняття миттєвого обертового руху ($s = t$). Враховуючи, що стан стрижня за відомого головного вектора пружної сили можна характеризувати трьома незалежними змінними, виберемо за останні кути Ейлера-Крилова α , β , γ . На підставі правила додавання кутових швидкостей (якщо миттєві осі обертання перетинаються) за аналогією з кінематичною формулою Л.Ейлера для обертального руху навколо нерухомої точки тіла одержуємо

$$\bar{\omega} = \frac{d\alpha}{ds} \bar{\xi}'_0 + \frac{d\beta}{ds} \bar{y}'_0 + \frac{d\gamma}{ds} \bar{z}_0, \quad (3.12)$$

звідки

$$\begin{aligned} p &= \frac{d\alpha}{ds} \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{ds} \sin \gamma, \\ q &= -\frac{d\alpha}{ds} \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{ds} \cos \gamma, \\ r &= \frac{d\alpha}{ds} \sin \beta + \frac{d\gamma}{ds}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Зіставляючи (3.11) та (3.13), знаходимо шуканий зв'язок між $\rho(s)$, $T(s)$, $\chi(s)$ і кутами Ейлера-Крилова:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \sin \chi &= \frac{d\alpha}{ds} \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{ds} \sin \gamma, \\ \frac{1}{\rho} \cos \chi &= -\frac{d\alpha}{ds} \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{ds} \cos \gamma, \\ \frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds} &= \frac{d\alpha}{ds} \sin \beta + \frac{d\gamma}{ds}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

На основі (3.13) знаходимо модуль і напрямні косинуси миттєвої кутової швидкості осей розрахункової системи відносно свого центра

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma}{ds}\right)^2} + 2\frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{d\gamma}{ds} \sin \beta, \quad (3.15)$$

$$\cos(\bar{\omega}, \hat{x}_0) = \frac{p}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{y}_0) = \frac{q}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{z}_0) = \frac{r}{\omega}. \quad (3.16)$$

У проєкціях на осі опорної системи координат співвідношення (3.12) матиме вигляд

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\gamma}{ds} \sin \beta, \\ \omega_\eta &= \frac{d\beta}{ds} \cos \alpha - \frac{d\gamma}{ds} \sin \alpha \cos \beta, \\ \omega_\zeta &= \frac{d\beta}{ds} \sin \alpha + \frac{d\gamma}{ds} \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Модуль і напрямні косинуси миттєвої кутової швидкості ($s=t$) осей опорної системи відносно свого центра визначаються відповідно за формулами

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2}, \quad (3.18)$$

$$\cos(\bar{\omega}, \hat{\xi}_0) = \frac{\omega_\xi}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{\eta}_0) = \frac{\omega_\eta}{\omega}, \quad \cos(\bar{\omega}, \hat{\zeta}_0) = \frac{\omega_\zeta}{\omega}. \quad (3.19)$$

Таким чином, користуючись залежністю (3.12) і таблицями косинусів, можна знаходити вектор повної кривини пружної лінії стрижня в будь-якому перерізі колони, а також визначати його складові у проєкціях на осі довільної системи координат.

4. Рівняння для внутрішнього моменту і переміщення

У системі (1.5)-(1.6) число векторних рівнянь менше числа невідомих, що входять в неї. Замкнати цю систему можна за допомогою додаткових векторних рівнянь для внутрішнього моменту і переміщення.

Для лінійного не закрученого стрижня проєкції повного внутрішнього пружного моменту \bar{L} на осі розрахункової системи координат визначаються за формулами

$$L_x = A \cdot p, \quad L_y = B \cdot q, \quad L_z = C \cdot r, \quad (4.1)$$

де A, B, C – жорсткості при згині і крученні.

Модуль і напрямні косинуси повного внутрішнього пружного моменту будуть рівні

$$L = \sqrt{(Ap)^2 + (Bq)^2 + (Cr)^2}, \quad (4.2)$$

$$\cos(\bar{L}, \hat{x}_0) = \frac{Ap}{L}, \quad \cos(\bar{L}, \hat{y}_0) = \frac{Bq}{L}, \quad \cos(\bar{L}, \hat{z}_0) = \frac{Cr}{L}. \quad (4.3)$$

За відомими згинаючими і крутними моментами можна знайти внутрішню потенціальну енергію згину і кручення

$$U = \frac{1}{2} \int (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) ds. \quad (4.4)$$

Використовуючи (3.13) і (4.1), виразимо залежність (4.4) у кутах Ейлера-Крилова у такий спосіб

$$U = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{d\alpha}{ds} \cos \beta \cos \gamma + \frac{d\beta}{ds} \sin \gamma \right)^2 + B \left(-\frac{d\alpha}{ds} \cos \beta \sin \gamma + \frac{d\beta}{ds} \cos \gamma \right)^2 + C \left(\frac{d\alpha}{ds} \sin \gamma + \frac{d\gamma}{ds} \right)^2 \right] ds = \frac{1}{2} \int \left(\frac{L_x^2}{A} + \frac{L_y^2}{B} + \frac{L_z^2}{C} \right) ds. \quad (4.5)$$

Обчислимо вектор внутрішнього моменту, беручи до уваги (4.1),

$$\bar{L} = \|A\| (\bar{\omega} - \hat{\omega}_0), \quad (4.6)$$

$$\|A\| = \begin{vmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

де

У залежності (2.4.6) вектор $\hat{\omega}_0$ визначається за формулою

$$\hat{\omega}_0 = p^0 \bar{x}_0 + q^0 \bar{y}_0 + r^0 \bar{z}_0, \quad (4.8)$$

де p^0, q^0, r^0 – кривина і кручення стрижня у недеформованому стані. Вектор $\hat{\omega}_0$ не рівний вектору $\bar{\omega}$, який характеризує недеформований стан і виражається наступним чином

$$\bar{\omega}_0 = p^0 \bar{x}_0^0 + q^0 \bar{y}_0^0 + r^0 \bar{z}_0^0, \quad (4.9)$$

де $\bar{x}_0^0, \bar{y}_0^0, \bar{z}_0^0$ – орти розрахункової системи координат для недеформованого стану стрижня.

Перейдемо до виведення рівняння для вектора переміщення елемента ds стрижня. Позначивши переміщення через \bar{u} , представимо його різницею двох радіус-векторів, проведених від початку опорної системи координат до центра ваги елемента

$$\bar{u} = \bar{r} - \bar{r}_0, \quad (4.10)$$

де \bar{r}, \bar{r}_0 – радіуси-вектори, що характеризують відповідно деформований і недеформований стани стрижня. Диференціюючи рівняння (4.10) по s , отримаємо

$$\frac{d\bar{u}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} - \frac{d\bar{r}_0}{ds} = \bar{x}_0 - \bar{x}_0^0. \quad (4.11)$$

Користуючись таблицею (2.6) і виключаючи \bar{x}_0^0 з (4.10), одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{d\bar{u}}{ds} = (\cos \beta \cos \gamma - 1) \cdot \bar{x}_0 - \cos \beta \sin \gamma \cdot \bar{y}_0 + \sin \beta \cdot \bar{z}_0. \quad (4.12)$$

Якщо перейти до базису $\bar{x}_0^0, \bar{y}_0^0, \bar{z}_0^0$, то рівняння (4.12) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{ds} = & (\cos \beta \cos \gamma - 1) \cdot \bar{x}_0^0 + (\cos \alpha \sin \gamma + \\ & + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma) \cdot \bar{y}_0^0 + (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma) \cdot \bar{z}_0^0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Таким чином, для визначення трьох невідомих векторів \bar{Q} , \bar{L} , \bar{u} і трьох невідомих кутів α , β , γ у будь-якому перерізі маємо повну систему чотирьох векторних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{ds} + \bar{f}(s) &= 0, \\ \frac{d\bar{L}}{ds} + \bar{z}_0 \times \bar{Q} + \bar{m}_1(s) + \bar{l} \times \bar{f}(s) &= 0, \\ \bar{L} &= \|A\|(\bar{\omega} - \hat{\omega}_0), \\ \frac{d\bar{u}}{ds} &= (\cos \beta \cos \gamma - 1) \cdot \bar{x}_0 - \cos \beta \sin \gamma \cdot \bar{y}_0 + \sin \beta \cdot \bar{z}_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

5. Проектування системи векторних рівнянь рівноваги пружної лінії

Загалом рівняння рівноваги тонких стрижнів можна представляти у векторному вигляді або в проєкціях на осі тієї чи іншої системи координат. При розв'язуванні конкретних задач, пов'язаних з дослідженням параметрів пружної лінії ділянки бурильної колони, доцільно користуватися рівняннями у розрахункових або натуральних осях. При розв'язуванні деяких задач значення сил і моментів у перерізах колони бурильних труб необхідно подавати також в опорних координатах.

Запишемо співвідношення між абсолютними й відносними (локальними) похідними векторів \bar{Q} і \bar{L} по дуговій координаті s пружної лінії виділеної ділянки труб. У розрахунковій системі координат компоненти векторів \bar{Q} , \bar{L} і орти \bar{x}_0 , \bar{y}_0 , \bar{z}_0 залежать від s , тому з урахуванням (1.1), (1.2), (3.9) одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{ds} = & \frac{dQ_x}{ds} \bar{x}_0 + \frac{dQ_y}{ds} \bar{y}_0 + \frac{dQ_z}{ds} \bar{z}_0 + Q_x(\bar{\omega} \times \bar{x}_0) + \\ & + Q_y(\bar{\omega} \times \bar{y}_0) + Q_z(\bar{\omega} \times \bar{z}_0) = \frac{d'Q}{ds} + \bar{\omega} \times \bar{Q}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}}{ds} = & \frac{dL_x}{ds} \bar{x}_0 + \frac{dL_y}{ds} \bar{y}_0 + \frac{dL_z}{ds} \bar{z}_0 + L_x(\bar{\omega} \times \bar{x}_0) + \\ & + L_y(\bar{\omega} \times \bar{y}_0) + L_z(\bar{\omega} \times \bar{z}_0) = \frac{d'L}{ds} + \bar{\omega} \times \bar{L}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

де $\frac{d'\bar{Q}}{ds}$ и $\frac{d'\bar{L}}{ds}$ – похідні векторів внутрішніх сил і моментів.

Використання аналогій між рівняннями рівноваги пружної лінії тонкого стрижня й динамічних рівнянь Л.Ейлера, що описують рух тве-

рдого тіла з нерухомою точкою, уможливило кінематичне тлумачення теорем про зміну кількості руху й моменту кількості руху механічної системи.

Швидкість ($s=t$) кінця вектора внутрішніх зусиль однорозмірного елемента стрижня дорівнює головному вектору зовнішніх сил

$$\frac{d'\bar{Q}}{ds} + \bar{\omega} \times \bar{Q} = \bar{F}, \quad (5.3)$$

а швидкість ($s=t$) кінця вектора повного внутрішнього моменту \bar{L} – головному моменту зовнішніх сил, узятому відносно кінця пружної лінії виділеного елемента з меншою координатою,

$$\frac{d'\bar{L}}{ds} + \bar{\omega} \times \bar{L} = \bar{M}. \quad (5.4)$$

Відносні похідні $\frac{d'\bar{Q}}{ds}$, $\frac{d'\bar{L}}{ds}$ характеризують зміну векторів \bar{Q} і \bar{L} під руху початку розрахункової системи координат вздовж пружної лінії, а векторні добутки $\bar{\omega} \times \bar{Q}$, $\bar{\omega} \times \bar{L}$ – зміну векторів \bar{Q} і \bar{L} при обертанні головних осей.

Проектуючи вирази (5.3), (5.4) на осі розрахункової системи координат з урахуванням (4.1), одержимо

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_x}{ds} + Q_z q - Q_y r &= F_x, \\ \frac{dQ_y}{ds} + Q_x r - Q_z p &= F_y, \\ \frac{dQ_z}{ds} + Q_y p - Q_x q &= F_z; \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{ds} + qr(C - B) &= M_x, \\ B \frac{dp}{ds} + pr(A - C) &= M_y, \\ C \frac{dr}{ds} + pq(B - A) &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Розкладаючи вектор \bar{l} , що з'єднує в довільному поперечному перерізі точку пружної лінії з точкою прикладання вектора розподіленої сили, у базисі $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$

$$\bar{l} = l_x \cdot \bar{x}_0 + l_y \bar{y}_0 + l_z \bar{z}_0, \quad (5.7)$$

проекції головного вектора \bar{F} і головного моменту \bar{M} зовнішніх сил на осі розрахункової системи координат представимо у такий спосіб

$$F_x = -f_x, \quad F_y = -f_y, \quad F_z = -f_z, \quad (5.8)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= Q_y - m_{1x} + l_y f_y - l_y f_z, \\ M_y &= -Q_x - m_{1y} + l_x f_z - l_z f_x, \\ M_z &= -m_{1z} + l_y f_x - l_x f_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

У ході розв'язання повної системи рівнянь рівноваги ділянки бурильної колони (4.14) є зміст підставляти в (5.9) замість Q_y і Q_x їхні вирази через проекції зовнішніх сил і моментів.

Зауваживши, що між абсолютною і відносною похідними вектора \bar{u} існує зв'язок, аналогічний (5.1), тобто

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (u_x \cdot \bar{x}_0 + u_y \cdot \bar{y}_0 + u_z \cdot \bar{z}_0) = \frac{\partial' \bar{u}}{\partial s} + \bar{\omega} \times \bar{u}, \quad (2.5.10)$$

подамо третє і четверте рівняння системи (4.14) у проекціях на осі розрахункової системи координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial s} + u_z q - u_y r &= \cos \beta \cos \gamma - 1, \\ \frac{\partial u_y}{\partial s} + u_x r - u_z p &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ \frac{\partial u_z}{\partial s} + u_y p - u_x q &= \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Тепер, беручи до уваги співвідношення (4.1), (4.6), одержимо вираз для обчислення складових повного внутрішнього моменту

$$\left. \begin{aligned} L_x &= A(p - p^0), \\ L_y &= B(q - q^0), \\ L_z &= C(r - r^0). \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

Викладене дозволяє одержати повну систему (4.14) векторних рівнянь рівноваги ділянки колони труб з рівними жорсткостями згину ($A = B$) у проекціях на осі розрахункової системи (складову вектора повної кривизни $\bar{\omega}$ подамо в кутах Ейлера-Крилова)

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial s} + Q_z \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \sin \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma \right) - Q_y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) &= F_x, \\ \frac{\partial Q_y}{\partial s} + Q_x \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - Q_z \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \cos \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \gamma \right) &= F_y, \\ \frac{\partial Q_z}{\partial s} + Q_y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \cos \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \gamma \right) - Q_x \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \sin \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma \right) &= F_z; \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned}
& A \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \cos \beta \cos \gamma - 2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \beta \cos \gamma + \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \sin \gamma + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)^2 \sin \beta \cos \beta \sin \gamma \right] + \\
& + C \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \sin \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma \right) \times \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) = M_x, \\
& A \left[-\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \cos \beta \sin \gamma + 2 \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \beta \sin \gamma + \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} \cos \gamma + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)^2 \sin \beta \cos \beta \cos \gamma \right] - \\
& - C \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \times \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \cos \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \gamma \right) = M_y, \\
& C \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \sin \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \beta + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right) = M_z;
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial u_x}{\partial s} + u_z \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \sin \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma \right) - \\
& - u_y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) = \cos \beta \cos \gamma - 1, \\
& \frac{\partial u_y}{\partial s} + u_x \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - \\
& - u_z \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \cos \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \gamma \right) = -\cos \beta \sin \gamma, \\
& \frac{\partial u_z}{\partial s} + u_y \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \cos \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \gamma \right) - \\
& - u_x \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \sin \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma \right) = \sin \beta;
\end{aligned} \right\} \tag{5.15}$$

$$\left. \begin{aligned}
& L_x = A \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \cos \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \sin \gamma - p^0 \right), \\
& L_y = A \cdot \left(-\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \sin \gamma + \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \gamma - q^0 \right), \\
& L_z = C \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right).
\end{aligned} \right\} \tag{5.16}$$

Спроекуємо систему векторних рівнянь рівноваги (4.14) на осі натуральної системи координат.

Позначимо кутову швидкість ($s=t$) натурального тригранника \bar{n} , \bar{b} , $\bar{\tau}$ (або, що теж саме \bar{x}'_0 , \bar{y}'_0 , \bar{z}'_0) відносно опорної системи через $\bar{\omega}^*$.

Тоді абсолютна швидкість запишеться у вигляді

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_r + \bar{\omega}_e = \bar{\omega}^* + \bar{\omega}_e = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \bar{\xi}'_0 + \frac{\partial \beta}{\partial s} \bar{y}'_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \bar{z}'_0 = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \bar{\xi}_0 + \frac{\partial \beta}{\partial s} \bar{b} + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \bar{z}_0, \tag{5.17}$$

де
$$\bar{\omega}_e = \frac{\partial \gamma}{\partial s} \bar{z}_0. \quad (5.18)$$

Користуючись таблицями косинусів, виразимо складові векторів $\bar{\omega}^*$ і \bar{L} через кути Ейлера-Крилова

$$\omega_n^* = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta, \quad \omega_b^* = \frac{\partial \beta}{\partial s}, \quad \omega_\tau^* = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta, \quad (5.19)$$

$$L_n = A \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta, \quad L_b = B \frac{\partial \beta}{\partial s}, \quad L_\tau = C \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta, \quad (5.20)$$

$$\left. \begin{aligned} M_n &= M_x \cos \gamma - M_y \sin \gamma, \\ M_b &= M_x \sin \gamma - M_y \cos \gamma, \\ M_\tau &= M_z. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

При переході від розрахункової до натуральної системи координат можуть виявитися корисними такі взаємозв'язки

$$\left. \begin{aligned} p \sin \gamma + q \cos \gamma &= \omega_b^* = \frac{\partial \beta}{\partial s}, \\ p \cos \gamma - q \sin \gamma &= \omega_n^* = \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Система рівнянь рівноваги (4.14) ділянки бурильної колони з урахуванням виразів (5.19), (5.20) у проєкціях на орти $\bar{\tau}$, \bar{n} , \bar{b} прийме вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_n}{\partial s} + Q_\tau \frac{\partial \beta}{\partial s} - Q_b \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta &= F_n, \\ \frac{\partial Q_b}{\partial s} + Q_n \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta - Q_\tau \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta &= F_b, \\ \frac{\partial Q_\tau}{\partial s} + Q_b \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta - Q_n \frac{\partial \beta}{\partial s} &= F_\tau; \\ A \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \cos \beta - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)^2 \sin \beta \cos \beta \right] + C \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \frac{\partial \beta}{\partial s} &= M_n, \\ A \left[\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \right)^2 \sin \beta \cos \beta \right] - C \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta &= M_b, \\ C \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2} \sin \beta + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \frac{\partial \beta}{\partial s} \cos \beta + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial s^2} \right) &= M_\tau; \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial s} + u_\tau \frac{\partial \beta}{\partial s} - u_b \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) &= \cos \beta - 1, \\ \frac{\partial u_b}{\partial s} + u_n \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta + \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - u_\tau \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta &= \sin \alpha \sin \beta, \\ \frac{\partial u_\tau}{\partial s} + u_b - u_x \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta - u_n \frac{\partial \beta}{\partial s} &= -\cos \alpha \sin \beta; \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

$$\left. \begin{aligned} L_n &= A \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta - p^0 \right), \\ L_b &= A \cdot \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} - q^0 \right), \\ L_\tau &= C \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial s} - r^0 \right). \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Співвідношення (5.24) іноді доцільно записати так

$$\left. \begin{aligned} A \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \right) + \frac{\partial \beta}{\partial s} \left(Cr - A \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta \right) &= M_n, \\ A \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \cos \beta \left(A \frac{\partial \alpha}{\partial s} \sin \beta - Cr \right) &= M_b, \\ C \frac{\partial r}{\partial s} &= M_\tau. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Повна система векторних керувань (4.14) в опорній системі координат має вигляд

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q_\xi}{\partial s} + Q_\xi \omega_\eta - Q_\eta \omega_\xi &= F_\xi, \\ \frac{\partial Q_\eta}{\partial s} + Q_\xi \omega_\zeta - Q_\zeta \omega_\xi &= F_\eta, \\ \frac{\partial Q_\zeta}{\partial s} + Q_\eta \omega_\xi - Q_\xi \omega_\eta &= F_\zeta, \\ A \frac{\partial \omega_\xi}{\partial s} + \omega_\eta \omega_\zeta (C - A) &= M_\xi, \\ A \frac{\partial \omega_\eta}{\partial s} + \omega_\xi \omega_\zeta (A - C) &= M_\eta, \\ C \frac{\partial \omega_\zeta}{\partial s} &= M_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

$$\left. \begin{aligned} A \frac{\partial \omega_\xi}{\partial s} + \omega_\eta \omega_\zeta (C - A) &= M_\xi, \\ A \frac{\partial \omega_\eta}{\partial s} + \omega_\xi \omega_\zeta (A - C) &= M_\eta, \\ C \frac{\partial \omega_\zeta}{\partial s} &= M_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_\xi}{\partial s} + u_\zeta \omega_\eta - u_\eta \omega_\zeta &= \cos \beta \cos \gamma - 1, \\ \frac{\partial u_\eta}{\partial s} + u_\xi \omega_\zeta - u_\zeta \omega_\xi &= \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \\ \frac{\partial u_\zeta}{\partial s} + u_\eta \omega_\xi - u_\xi \omega_\eta &= \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma; \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

$$\left. \begin{aligned} L_\xi &= A(\omega_\xi - \omega_\xi^0), \\ L_\eta &= B(\omega_\eta - \omega_\eta^0), \\ L_\zeta &= C(\omega_\zeta - \omega_\zeta^0), \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

де ω_ξ , ω_η , ω_ζ визначаються залежностями (3.17).

Таким чином, векторні рівняння рівноваги (4.14) для загального випадку навантаження довільної ділянки бурильної колони представлені нами у проекціях на осі розрахункової, натуральної і опорної систем координат. Аналогічно можна записати (4.14) у проекціях на осі довільної системи координат, використовуючи при цьому відповідні таблиці косинусів.

6. Про розв'язування системи рівнянь рівноваги пружного стрижня

Для розв'язування системи векторних рівнянь рівноваги пружного стрижня необхідно, щоб кількість невідомих не перевищувала кількості рівнянь. Як приклад розглянемо шляхи розв'язування рівнянь рівноваги тонкого невагомго стрижня з прикладеними до нього кінцевими силами і моментами. Грунтуючись на умові рівноваги ділянки стрижня, запишемо

$$\bar{P} - \bar{Q} = 0. \quad (6.1)$$

Представимо вектор \bar{Q} добутком

$$\bar{Q} = p\bar{\gamma}^0, \quad (6.2)$$

де $\bar{\gamma}^0$ – орт, спрямований вздовж кінцевої сили \bar{P} при $s = 0$.

Рівняння деформації осі стрижня у змінних L_x , L_y , L_z , γ_x^0 , γ_y^0 , γ_z^0 мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} A \frac{\partial p}{\partial s} + qr(C - B) &= p\gamma_y^0, \\ B \frac{\partial q}{\partial s} + pr(A - C) &= -p\gamma_z^0, \\ C \frac{\partial r}{\partial s} + pq(B - A) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_x^0}{\partial s} &= r\gamma_y^0 - q\gamma_z^0, \\ \frac{\partial \gamma_y^0}{\partial s} &= p\gamma_z^0 - r\gamma_x^0, \\ \frac{\partial \gamma_z^0}{\partial s} &= q\gamma_x^0 - p\gamma_y^0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Співвідношення (6.4) – це перенесені в статику тонких стрижнів рівняння С.Д.Пуассона.

Система рівнянь (6.3)-(6.4) є повною щодо невідомих функцій дугової координати $p(s)$, $q(s)$, $r(s)$, $\gamma_x^0(s)$, $\gamma_y^0(s)$, $\gamma_z^0(s)$, після знаходження яких необхідно розв'язати основну задачу – знайти кути Ейлера-Крилова як функції s .

Для інтегрування (6.3), (6.4) необхідно знайти шість перших інтегралів вигляду

$$f_i(p, q, r, \gamma_x^0, \gamma_y^0, \gamma_z^0) = C_i, \quad i = \overline{1,6}; \quad (6.5)$$

де C_i – сталі.

За будь-яких допустимих для тонкого стрижня параметрів A , B , C і початкових умовах два перших загальних інтеграли мають вигляд

$$(\gamma_x^0)^2 + (\gamma_y^0)^2 + (\gamma_z^0)^2 = 1, \quad (6.6)$$

$$Ap\gamma_x^0 + Bq\gamma_y^0 + Cr\gamma_z^0 = M, \quad (6.7)$$

де M – величина кінцевого моменту.

Для інтегрування розглянутої системи у квадратурах необхідно мати чотири перших інтеграли. Відшукуванню двох перших інтегралів, яких не вистачає, присвячені роботи Є.Л.Ніколаї, Є.П.Попова, С.А.Чаплигіна, Д.Н.Горячева, Л.М.Ковальової, А.І.Дашкієвича, В.М.Старжинського, А.А.Ілюхіна.

Висновки

1. Встановлено, що при вивченні просторових форм рівноваги ділянок бурильної колони доцільно користуватися кутами Ейлера-Крилова замість традиційно вживаних кутів Л.Ейлера.

2. Виведено залежності для визначення в кутах Ейлера-Крилова вектора повної кривини пружної лінії ділянки бурильної колони та її складових у проєкціях на осі розрахункової і опорної систем координат.

3. Встановлено взаємозв'язки між радіусом кривини, кутом природного закручування бурильних труб і кутами Ейлера-Крилова.

4. Одержано формули для обчислення внутрішньої потенціальної енергії згину і кручення ділянки бурильної колони в кутах Ейлера-Крилова.

5. Одержано замкнену систему векторних рівнянь рівноваги довільної ділянки бурильної колони у проєкціях на осі розрахункової, натуральної і опорної систем координат.

6. Запропоновано шляхи розв'язування системи векторних рівнянь рівноваги на прикладі стрижня з прикладеними до нього кінцевими силами і моментами.

Література

1. Илюхин А.А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А.А. Илюхин. – Киев: Наукова думка, 1979. – 216 с.
2. Лурье А.И. О малых деформациях криволинейных стержней / А.И. Лурье // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – № 3. – С.47-54.
3. Макушин В.М. Устойчивость сжато-скрученных стержней, имеющих равные главные жесткости при изгибе / В.М. Макушин, В.В. Петров // Расчеты на прочность. Теоретические и экспериментальные исследования прочности машиностроительных конструкций: Сборник статей. – М.: Машиностроение, 1969.–Вып.14. – С.290-308.
4. Николаи Е.Л. Труды по механике / Е.Л.Николаи. – М.: Гостехиздат, 1955. – 583 с.
5. Ніколенко І.В. Диференційні рівняння рівноваги вільних і невільних тонких стержнів / І.В. Ніколенко // Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. астрономії математики та механіки. – 1958. – Вип.1. – С.47-56.
6. Попов Е.П. Нелинейные задачи статики стержней / Е.П. Попов. – М.: ОГИЗ, 1948. – 178с.
7. Светлицкий В.А. Механика гибких стержней и нитей (Б-ка расчетчика) / В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1978. – 222 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 28.12.2010 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Векериком В.І.***

ABOUT EQUALIZATION OF EQUILIBRIUM OF RESILIENT LINE OF DRILLING COLUMN

V. M. Moisyshyn

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;

76019, Ivano-Frankivs'k, st. Carpats'k, 15;

ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua.

For drafting of vector equations of equilibrium of areas of drilling column the entered Euler-Krylov's corners, in place of traditionally corners of Euler, new dependences are got for the calculation of curvature and twisting of resilient line. As a result of researches the closed system of common equalizations of equilibrium of arbitrary area of boring column is got and the ways of its uniting are offered.

Key words: *equalization of equilibrium, resilient line of drilling column, Euler-Krylov's corners, curvature, twisting, bending a moment, croutniy moment, moving, internal force, internal moment.*