УДК 51(075)

ДЕЯКІ НЕСТАНДАРТНІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ КОСИНУСІВ

І. В. Федак

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Розглянуто декілька нестандартних підходів до розв'язування олімпіадних задач із використанням теореми косинусів

Ключові слова: *математична олімпіада, теорема косинусів.*

Зі шкільного курсу математики всім відома так звана теорема косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos A,$$

де a, b, c – довжини сторін трикутника ABC.

На уроках математики часто обмежуються використанням записаної тут формули для знаходження сторони трикутника за двома іншими сторонами і кутом між ними.

У пропонованій вашій увазі статті ми проаналізуємо значно ширші можливості використання теореми косинусів при розв'язуванні задач, які доволі часто зустрічаються на математичних олімпіадах різних рівнів.

Насамперед проаналізуємо задачі на знаходження найменшого значення функцій вигляду

$$y = \sqrt{x^2 - ax + b^2} + \sqrt{x^2 - cx + d^2},$$

де a, b, c, d – додатні числа, причому $a < 2b,\ c < 2d$.

При розв'язуванні таких задач одразу напрошується скористатися похідною для дослідження функції на мінімум. Проте використання теореми косинусів приводить до успіху значно швидше.

Насамперед зауважимо, що всі такі функції набувають мінімуму за додатних значень x, тож представимо їх у вигляді

$$y = \sqrt{x^2 - 2bx\cdot\frac{a}{2b} + b^2} + \sqrt{x^2 - 2dx\cdot\frac{c}{2d} + d^2}.$$

Покладемо тепер

$$\frac{a}{2b} = \cos\varphi_1,\quad \frac{c}{2d} = \cos\varphi_2,\quad \varphi_1, \varphi_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Далі, відкладемо на сторонах кута з вершиною O і величиною $\varphi_1 + \varphi_2$ відрізки $OM = b$ та $OK = d$. Нехай X – така точка всередині цього кута, що $\angle MOX = \varphi_1$, $\angle KOX = \varphi_2$, $OX = x$. Тоді з урахуванням теореми косинусів отримуємо

$$y = MX + KX \geq MK = \sqrt{b^2 - 2bd\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + d^2},$$

причому рівність тут досягається, якщо точка X лежатиме на відрізку MK. Звідси випливає, що

$$\min y = \sqrt{b^2 - 2bd\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + d^2}.$$

Розглянемо приклади розв'язування конкретних задач таким способом:

Задача 1. Знайдіть найменше значення функції

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}.$$

Розв'язання. Зауваживши, що мінімум цієї функції може досягатися лише за додатних x. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = BC = 1$ та гіпотенузою $AB = \sqrt{2}$. Нехай точка X така, що $CX = x$, $\angle ACX = 60^0$, $\angle BCX = 30^0$. Тоді за теоремою косинусів отримаємо

$$y = AX + BX \geq AB = \sqrt{2}.$$

Оскільки рівність тут досягається, якщо точка X лежатиме на гіпотенузі AB, то число $\sqrt{2}$ є найменшим значенням даної функції.

Задача 2. Знайдіть найменше значення функції

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 3}.$$

Розв'язання. Знову бачимо, що мінімум цієї функції може досягатися лише при додатних x. Розглянемо трикутник ABC зі сторонами $AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$ і кутом між ними $\angle ACB = 120^0$. За теоремою косинусів знайдемо довжину його третьої сторони

$$AB = \sqrt{1^2 - 2\cdot 1\cdot\sqrt{3}\cdot\cos 120^0 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4 + \sqrt{3}}.$$

Виберемо точку X на бісектрисі кута ACB так, що $CX = x$. Тоді знову ж таки за теоремою косинусів отримаємо

$$y = AX + BX \geq AB = \sqrt{4 + \sqrt{3}},$$

причому рівність тут досягається, якщо точка X лежатиме на стороні AB. Тому найменшим значенням даної функції є $\sqrt{4 + \sqrt{3}}$.

Другий тип задач, пов'язаних з використанням теореми косинусів, полягає в розв'язуванні рівнянь вигляду

$$\sqrt{x^2 - ax + b^2} + \sqrt{x^2 - cx + d^2} = y_0,$$

де y_0 дорівнює мінімуму лівої частини цього рівняння. При цьому, крім теореми косинусів, доведеться мати справу ще й з іншими допоміжними геометричними міркуваннями.

Зрозуміло, що єдиним коренем цього рівняння буде довжина відрізка OX такого, що точка X лежить на стороні MK трикутника MOK зі сторонами $OM = b$, $OK = d$ і кутом $\angle MOK = \varphi_1 + \varphi_2$, причому $\angle MOX = \varphi_1$, $\angle KOX = \varphi_2$.

Оскільки при цьому справедлива наступна рівність для площ трикутників

$$S_{\Delta MOK} = S_{\Delta MOX} + S_{\Delta KOX},$$

то x знайдемо з такого лінійного рівняння

$$\frac{1}{2}bd\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right) = \frac{1}{2}bx\sin\varphi_1 + \frac{1}{2}dx\sin\varphi_2.$$

Отримуємо

$$x = \frac{bd\sin\left(\varphi_1+\varphi_2\right)}{b\sin\varphi_1 + d\sin\varphi_2}.$$

Розглянемо конкретний приклад розв'язування такого рівняння.

Задача 3. Для додатних чисел a та b розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x^2-ax+a^2}+\sqrt{x^2-bx+b^2}=\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

Розв'язання. Спочатку знайдемо додатні корені цього рівняння. Для цього розглянемо трикутник ABC зі сторонами $AC=a$, $BC=b$ і кутом між ними $\angle ACB = 120^0$. За теоремою косинусів знайдемо довжину його третьої сторони

$$AB=\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

Виберемо точку X на бісектрисі кута ACB так, що $CX = x > 0$. Тоді з врахуванням теореми косинусів задане рівняння набуває вигляду

$$AX + BX = AB.$$

Зрозуміло, що остання рівність можлива лише тоді, коли точка X лежить на стороні AB. У такому разі з наступної рівності для площ:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AXC} + S_{\Delta BXC}$$

отримуємо $$\frac{1}{2}ab\sin 120^0 = \frac{1}{2}ax\sin 60^0 + \frac{1}{2}bx\sin 60^0,$$

звідки знаходимо $$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Далі зауважимо, що $x=0$ не є коренем заданого рівняння. А для знаходження його від'ємних коренів продовжимо побудовану вище бісектрису кута ACB поза точку C, і відкладемо на такому продовженні точку X' таку, що $CX' = -x$. Оскільки X' не може лежати на відрізку AB, то $AX' + BX' > AB$. Тому від'ємних коренів дане рівняння не має.

Теорема косинусів приходить на допомогу і при дослідженні деяких систем рівнянь. Наприклад, розглянемо таку задачу:

Задача 4. Доведіть, що система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4, \\ y^2+yz+z^2=9, \\ z^2+zx+x^2=36 \end{cases}$$

не має розв'язків у додатних чисел.

Розв'язання. Припустимо, що такі розв'язки існують. Тоді існують такі трикутники AOB, BOC, COA зі спільною вершиною O і кутами

120^o при цій вершині, що жодні два з них не мають спільних внутрішніх точок і $OA = x,\ OB = y,\ OC = z.$ Для цих трикутників із рівнянь системи за теоремою косинусів отримуємо: $AB = 2,\ BC = 3,\ CA = 6.$ Але це не можливо, бо трикутника ABC з такими довжинами сторін не існує. Отримане протиріччя доводить, що задана система не має розв'язків у додатних числах $x,\ y,\ z.$

Узагальнюючи дану задачу, розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a^2x^2 - 2abxy\cos\varphi_1 + b^2y^2 = m^2, \\ b^2y^2 - 2bcyz\cos\varphi_2 + c^2z^2 = n^2, \\ c^2z^2 - 2cazx\cos\varphi_3 + a^2x^2 = k^2, \end{cases}$$

де a, b, c, m, n, k – додатні числа, $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2\pi.$ Міркуючи аналогічно, як при розв'язуванні задачі 4, приходимо висновку, що така система має і при тому єдиний розв'язок у додатних числах x, y, z тоді і тільки тоді, коли існує трикутник з довжинами сторін $m, n, k.$

Розглянемо конкретний приклад застосування такого узагальнення, в якому, крім теореми косинусів використовуємо й інші геометричні міркування:

Задача 5. Обчисліть значення виразу $P = xy + 2yz + 3zx,$ якщо додатні числа x, y, z задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 9, \\ \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 16, \\ z^2 + zx + x^2 = 25. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо прямокутний трикутник ABC з катетами $AC = 3,\ BC = 4$ та гіпотенузою $AB = 5$ і точку M всередині цього трикутника таку, що $\angle AMC = 120^0,\ \angle BMC = 90^0,\ \angle AMB = 150^0.$ Оскільки сума цих кутів становить $360^0,$ то така точка існує, причому вона єдина. Позначимо $AM = x,\ BM = \dfrac{y}{\sqrt{3}},\ CM = z.$ З врахуванням теореми косинусів отримуємо, що додатні числа x, y, z задовольняють записану вище систему рівнянь. Обчислюючи тепер площі трикутників ABM, BCM та CAM як половини добутків сторін на синус кута між ними, знаходимо, що

$$P = 4\sqrt{3}\cdot S_{\Delta ABM} + 4\sqrt{3}\cdot S_{\Delta BCM} + 4\sqrt{3}\cdot S_{\Delta CAM} = 4\sqrt{3}\cdot S_{\Delta ABC} = 24\sqrt{3}.$$

Підсумовуючи сказане, приходимо до висновку, що використання теореми косинусів є ефективним засобом для розв'язування цілого ряду алгебраїчних задач, пов'язаних з рівняннями та нерівностями, а також з системами таких рівнянь.

Стаття надійшла до редакційної колегії 16.05.2010 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.***

SOME SUBSTANDARD APPLICATIONS OF THE COSINES THEOREM

I. V. Fedak

Precarpathian National University named after Vasyl Stefanik;
76025, Ivano-Frankivsk, st. Shevchenko, 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Some substandard methods of Olympiad problems solutions with help of the cosines theorem have considered.

Key words: *mathematical Olympiad, cosines theorem.*