УДК 517.53

СТРУКТУРА ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ ДЛЯ ПРИЄДНАНИХ ЦІЛИХ КРИВИХ

Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

Показано, що структура дефектних векторів для приєднаної цілої кривої скінченного порядку дещо інша, ніж для звичайної цілої кривої скінченного порядку.

Ключові слова: *ціла крива, спеціальний вектор, приєднана ціла крива, неванліннівський дефектний вектор, мероморфна функція.*

В даній роботі використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1] та [2].

Вектор $\vec{b} \in \boldsymbol{C}^q$, де $q = C_p^l$, називається *спеціальним*, якщо існують вектори $\vec{b}_j = (b_{j1}, b_{j2}, \ldots, b_{jp}) \in \boldsymbol{C}^p$, $j = 1, 2, \ldots, l$, такі що $\vec{b}_j = [\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_l]$; останній символ означає вектор з координатами

$$\begin{vmatrix} b_{1j_1} & b_{1j_2} & \ldots & b_{1j_l} \\ b_{2j_1} & b_{2j_2} & \ldots & b_{2j_l} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{lj_1} & b_{lj_2} & \ldots & b_{lj_l} \end{vmatrix}, \quad 1 \le j_1 < j_1 < \ldots < j_1 \le p .$$

Нехай $\vec{G}(z) = (g_1(z), g_2(z), \ldots, g_p(z))$ – ціла крива.

Відповідно до [3], [4], під *приєднаною* цілою кривою порядку $l-1$, де $l \le p$, розуміємо q – мірну цілу криву

$$\vec{G}_l(z) = [\vec{G}(z), \vec{G}'(z), \ldots, \vec{G}^{(l-1)}(z)],$$

де

$$\vec{G}^{(s)}(z) = (g_1^{(s)}(z), g_2^{(s)}(z), \ldots, g_p^{(s)}(z)).$$

Відомо [4], що нерівність

$$T(r, \vec{G}_l) \le \{l + o(1)\} T(r, \vec{G}), \ r \to \infty$$

виконується поза множиною скінченної довжини, причому для цілих кривих скінченного порядку ця нерівність виконується повсюдно.

Згідно [5] та [6] можемо стверджувати, що $D(\vec{G}_l) \cup \{\vec{0}\}$ є не більше ніж зліченим поєднанням підпросторів із $\boldsymbol{C}^q$ розмірності не вище $q-1$ у випадку $\rho(\vec{G}) < \infty$. Однак, із того, що не кожна ціла крива з $\boldsymbol{C}^q$ є приєднаною для деякої p-мірної цілої кривої, випливає, як ми нижче побачимо, що не для кожного, не більше ніж зліченного об’єднання підпросторів із $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{q}}$ розмірності не вище $q-1$ знайдеться p-мірна ціла крива $\vec{G}$, така що $D\left(\vec{G}_l\right)\cup\left\{\vec{0}\right\}$ збігається з цим об'єднанням.

Лема. *Нехай $\vec{G}$ – p – мірна ціла крива, $\boldsymbol{A}\subset\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{q}}$, де $q=C_p^l$, $1\le l\le p-1$ –* підпростір з $\dim\boldsymbol{A}\le q-1$; $\boldsymbol{B}$ *– ортогональне доповнення до $\boldsymbol{A}$. Припустимо, що для довільного $\vec{a}\in\boldsymbol{A}\setminus\left\{\vec{0}\right\}$ виконується* умова $\delta\left(\vec{a}\,,\,\vec{G}_l\right)>0$ *. Тоді існує хоча б один спеціальний вектор $\vec{b}\in\boldsymbol{B}\setminus\{0\}$.*

Слід зауважити, що не для кожного підпростору $\boldsymbol{B}$ існує спеціальний вектор $\vec{b}\in\boldsymbol{B}\setminus\{0\}$. Як випливає з означення спеціального вектора, він є представленням p-мірних векторів $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_l$, тобто визначається pl комплексними числами. Тому неважко вказати підпростір розмірністю C_p^l-lp-1, який не містить спеціальних векторів, відмінних від нульового.

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що якщо вектор $\vec{b}=\left(b_1,b_2,\ldots,b_q\right)$ – спеціальний, то спеціальним буде і вектор $\vec{b}^*=\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\ldots,\overline{b}_q\right)$. Для зручності ми доведемо існування такого вектора $\vec{b}\in\boldsymbol{B}\setminus\left\{\vec{0}\right\}$, що вектор $\vec{b}^*$ – спеціальний.

Нехай $\dim\boldsymbol{A}=s$. Виберемо лінійно незалежні вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_s$ із $\boldsymbol{A}$ і розглянемо вектор-функцію $\vec{G}^*(z)=\left(\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}_1,\,\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}_2,\,\ldots\,,\,\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}_s\right)$. Розглянемо $\Phi(z)$ – мероморфну функцію без нулів, полюсами якої є спільні нулі функцій $\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}_1,\,\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}_2,\,\ldots\,,\,\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}_s$. Тоді $\vec{G}_1^*(z)=\vec{G}^*(z)\cdot\Phi(z)$ – s-мірна ціла крива.

Покажемо, що існує $\delta>0$, таке що

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left\|\vec{G}^*\left(re^{i\varphi}\right)\right\|d\varphi=T\left(r,\vec{G}_1^*\right)+N(r,\Phi)\le\{1-\delta+o(1)\}T\left(r,\vec{G}\right),\quad r\to\infty. \qquad (1)$$

Дійсно, ми можемо вибрати вектор $\vec{\lambda}=\left(\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\,\ldots\,,\overline{\lambda}_s\right)\in\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{s}}$, такий що

$$m\left(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)=o\left\{T\left(r,\vec{G}_1\right)\right\},\ r\to\infty. \qquad (2)$$

З іншого боку, $\vec{a}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_s\vec{a}_s\in\boldsymbol{A}$, тому $\delta\left(\vec{a}\,,\,\vec{G}_l\right)=\delta>0$. Тоді

$$m\left(r,\vec{a},\vec{G}_l\right)\ge\{\delta+o(1)\}T\left(r,\vec{G}_l\right),\quad r\to\infty. \qquad (3)$$

Очевидно, $\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}=\vec{G}_1^*(z)\cdot\vec{\lambda}\,/\,\Phi(z)$, звідки $N\left(r,\vec{a},\vec{G}_l\right)=N\left(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1^*\right)+N(r,\Phi)$, і згідно першої основної теореми для цілих кривих, маємо

$$T\left(r,\,\vec{G}_l\right)-m\left(r,\vec{a},\vec{G}_l\right)=T\left(r,\,\vec{G}_1^*\right)-m\left(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1^*\right)+N(r,\Phi)+O(1),\ r\to\infty.$$

Підставляючи в цю рівність (2) та (3), отримаємо (1).

З (1) випливає, що

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\ln\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\right\|}{\left\|\vec{G}_l\left(re^{i\varphi}\right)\right\|}d\varphi\le\{-\delta+o(1)\}T\left(r,\vec{G}_l\right),\quad r\to\infty.$$

Оскільки $T\left(r,\vec{G}_l\right)\to\infty,\quad r\to\infty$, то існує функція $\varphi=\varphi(r)$, така що

$$\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi(r)}\right)\right\|}{\left\|\vec{G}_l\left(re^{i\varphi(r)}\right)\right\|}\to 0,\quad r\to\infty. \tag{4}$$

Оскільки для довільного вектора $\vec{a}\in\boldsymbol{A}$ існує вектор $\vec{\lambda}=\left(\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2,\ldots,\overline{\lambda}_s\right)\in\boldsymbol{C}^s$, такий що $\left|\vec{G}_l(z)\cdot\vec{a}\right|=\left|\vec{G}_1^*(z)\cdot\vec{\lambda}\right|\le\left\|\vec{G}_1^*(z)\right\|\cdot\left\|\vec{\lambda}\right\|$, то з (4) випливає, що

$$\frac{\left\|\vec{G}\left(re^{i\varphi(r)}\right)\cdot\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{G}_l\left(re^{i\varphi(r)}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{a}\right\|}\to 0,\quad r\to\infty, \tag{5}$$

рівномірно по $\vec{a}\in\boldsymbol{A}$.

Тепер подамо

$$\vec{G}_l\left(re^{i\varphi(r)}\right)=\left(\vec{a}(r)+\vec{b}(r)\right)\left\|\vec{G}_l\left(re^{i\varphi(r)}\right)\right\|, \tag{6}$$

де $\vec{a}(r)\in\boldsymbol{A}$, $\vec{b}(r)\in\boldsymbol{B}$.

Оскільки $\left\|\vec{b}(r)\right\|\le 1$, то існує послідовність $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n\to\infty$ при $n\to\infty$, така що $\lim\limits_{n\to\infty}\vec{b}(r_n)=\vec{b}$. Позначимо коротко $\vec{b}(r_n)=\vec{b}_n$. Очевидно, $\vec{b}\in\boldsymbol{B}$.

Оскільки, $\vec{a}(r)\perp\vec{b}(r)$, то, згідно з (5) та (6) робимо висновок, що $\vec{a}(r)\to 0,\ \left\|\vec{b}(r)\right\|\to 1$ при $r\to\infty$.

Тепер маємо:

$$\left|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot\vec{b}\right|\ge\left|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot\vec{b}_n\right|-\left|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot\left(\vec{b}-\vec{b}_n\right)\right|\ge$$
$$\left|\left(\vec{a}(r_n)+\vec{b}_n\right)\cdot\vec{b}_n\right|\cdot\left\|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\right\|-\left\|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{b}-\vec{b}_n\right\|=$$
$$=\left(\left\|\vec{b}_n\right\|^2-\left\|\vec{b}-\vec{b}_n\right\|\right)\cdot\left\|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\right\|,$$

звідки випливає, що

$$\frac{\left|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot\vec{b}\right|}{\left\|\vec{G}_l\left(r_ne^{i\varphi(r_n)}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}\ge\left\|\vec{b}_n\right\|^2-\left\|\vec{b}-\vec{b}_n\right\|\to 1,\qquad n\to\infty.$$

Тоді, згідно тотожності

$\sum\left|\alpha_i\beta_j-\alpha_j\beta_i\right|^2+\left|\sum\alpha_i\beta_i\right|^2=\sum\left|\alpha_i\right|^2\cdot\sum\left|\beta_j\right|^2$ отримуємо:

$$\left[\!\left[\vec{G}_l\left(r_n e^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot \vec{b}^*\right]\!\right]^2 = \sum_{m<k}\left|g_{lm}\left(r_n e^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot \overline{b}_k - g_{lk}\left(r_n e^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot \overline{b}_m\right|\times$$

$$\times\left\{\sum_{m=1}^{q}\left|g_{lm}\left(r_n e^{i\varphi(r_n)}\right)\right|^2\cdot\sum_{m=1}^{q}\left|\overline{b}_k\right|^2\right\}^{-1}\le 1-\frac{\left|\vec{G}_l\left(r_n e^{i\varphi(r_n)}\right)\cdot\vec{b}\right|}{\left\|\vec{G}_l\left(r_n e^{i\varphi(r_n)}\right)\right\|\cdot\left\|\vec{b}\right\|}\to 0\,,\quad n\to\infty.$$

Звідси робимо висновок, що $\vec{b}^*$ – спеціальний вектор. В протилежному випадку (див. [6, п.1]) було б $\left[\!\left[\vec{x}\cdot\vec{b}^*\right]\!\right]\ge\delta_l\left(\vec{b}^*\right)>0$ для усіх спеціальних векторів $\vec{x}$, зокрема, для $\vec{x}=\vec{G}_l(z)$. Тим самим нашу лему доведено.

З доведеної леми і теореми А в [2] безпосередньо випливає такий результат.

Теорема. *Нехай* $\vec{G}$ *– ціла p-мірна крива скінченного порядку. Тоді* $(1\le l\le p-1)$:

1) $D\left(\vec{G}_l\right)\cup\left\{\vec{0}\right\}=\bigcup_{j=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}_j$, *де* $\boldsymbol{A}_j$ *– підпростори з* $\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{q}}$, *де* $q=C_p^l$, *причому* $0\le\dim\boldsymbol{A}_j=q_j\le q-1$;

2) *для кожного j існує спеціальний вектор* $\vec{b}_j\in\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{q}}$, *ортогональний до* $\boldsymbol{A}_j$.

Нам не вдалося вияснити, чи підпростори $\boldsymbol{A}_j$ повинні задовольняти ще яким-небудь умовам.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые / В.П. Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
2. Савчук Я.І. Про множину значень величин дефектів для цілої кривої скінченного порядку / Я.І. Савчук // Прик. вісник НТШ, Число. – 2009. – Вип.1(5). – С. 16-20.
3. Шабат Б.В. Распределение значений голоморфных отображений / Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
4. Weyl H. Meromorphic curves / H. Weyl, J. Weyl // Annals of math. – 1938. – Vol. 39. – P. 516-538.
5. Савчук Я.И. О множестве дефектных векторов целых кривих / Я.И. Савчук // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, № 3. – С. 385-389.
6. Савчук Я.И. Структура множества дефектных векторов целых и аналитических кривых конечного порядка / Я.И. Савчук // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 609-615.

Стаття надійшла до редакційної колегії 22.04.2010 р.

Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.***

STRUCTURE OF IMPERFECT VECTORS FOR THE ADDED WHOLE CURVES

Y. I. Savchuk
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, st. Carpathians, 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

It is shown, that the structure of imperfect vectors for the added whole curve of scinchennogo order is some other, than for the ordinary whole curve of endding order.

Keywords: *whole curve, special vector, added whole curve, nevanlin-nivsciy imperfect vector, meromorfna function.*