УДК 517.988.8

ДОСЛІДЖЕННЯ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДІВ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ

Б. А. Шувар[1], М. І. Копач[2], А. Ф. Обшта[1], Г. В. Наконечна[1]

[1]Національний університет "Львівська політехніка";
79013, м. Львів, вул. С.Бандери, 12
[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: kopachm2009@gmail.com

Встановлено достатні умови збіжності одного класу методів ітеративного агрегування для лінійних рівнянь з обмеженими операторами. Ці умови не містять вимог про знакосталість оператора і не потребують, щоб був меншим від одиниці його спектральний радіус.

Ключові слова: *декомпозиція, ітеративне агрегування, лінійне рівняння, оператор.*

Досягнення комп'ютерних технологій стимулюють створення і дослідження нових і докладніше вивчення відомих у прикладних науках проблем, сформульованих, зокрема, у вигляді математичних моделей реальних задач і явищ. Для багатьох математичних задач, що нерідко вважалися непіддатними для докладного кількісного, чи бодай часткового якісного аналізу, зручними і ефективними виявилися різні способи декомпозиції. Як зазначено в [1, ст. 5], "при формалізації складних процесів і явищ у багатьох прикладних галузях трапляються задачі, у яких кількість змінних і зв'язків вимірюється … багатьма тисячами". Виникає потреба у методах декомпозиції, щоб "на їх основі будувати числові алгоритми з організацією паралельних обчислень" [1, ст. 7]. Це дає змогу застосовувати багатопроцесорний режим для обчислювальних процесів, зокрема, за допомогою методів ітеративного агрегування (див., напр.[1,2]). Вони виникли у математичній економіці для наближеного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь високої розмірності, порядок яких може досягати $10^5 \div 10^6$ рівнянь і невідомих, які трапляються, наприклад, у задачах міжгалузевого балансу (див. [3,4], а також [2, ст. 158]). В [5, ст. 30] йдеться про можливості застосування цих методів у математичних моделях біологічних систем у зв'язку з проблемою синергій, що стосується узгодженості руху частин живих організмів.

Як засвідчують численні приклади, методи ітеративного агрегування у застосування до систем лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$x = Ax + b \tag{1}$$

можуть збігатися як при $\rho(A) < 1$, так і при $\rho(A) > 1$.

У найпростішому однопараметричному випадку метод однопараметричного ітеративного агрегування можна описати як ітераційний процес

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} Ax^{(n)} + b, \tag{2}$$

де $A : E \to E,\ b \in E,\ \left(\varphi, x\right) -$ значення лінійного функціоналу φ на елементах $x \in E$, $E -$ банахів простір, $A -$ лінійний неперервний оператор. Формули (2) є еквівалентним записом відповідного однопараметричного методу ітеративного агрегування із [3], що випливає з можливості отримання із (2) рівності

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) = \frac{\left(\varphi, x^{(n+1)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \left(\varphi, Ax^{(n)}\right) + (\varphi, b),$$

з якої знаходимо, що (2) можна записати у вигляді

$$x^{(n+1)} = \frac{\left(\varphi, b\right)}{\left(\varphi, x^{(n)} - Ax^{(n)}\right)} Ax^{(n)} + b,$$

тотожному з виглядом ітераційної формули (19.4) із [2, ст. 156]. Встановлені в [3] достатні умови збіжності однопараметричного методу ітеративного агрегування у застосуванні до випадку, коли $E = \mathbb{R}^N$ є евклідовим простором розмірності N, означають, що елементи a_{ij} матриці $A = \{a_{ij}\}$ та компоненти b_i вільного члена $b = \{b_1, ..., b_N\}$ є невід'ємними дійсними числами та містять вимогу $\rho\left(A\right) < 1$. При цьому постулюється також невід'ємність компонент φ_i вектора $\varphi = \{\varphi_1, ..., \varphi_N\}$, вибраного довільним чином. Формулювання і обґрунтування цього результату для однопараметричного методу ітеративного агрегування в термінах банахового простору E базується в [3] на понятті фокусую чого оператора. Аналоги поняття фокусуючого оператора, придатні для поширення зазначеного результату із [2] на багатопараметричні методи ітеративного агрегування, в [2] не наведені. Запропонована в [6] методика дослідження методів ітеративного агрегування не використовує поняття фокусуючого оператора. Ця методика придатна як для однопараметричних, так і для багатопараметричних методів ітеративного агрегування і не вимагає знакосталості A та b. Отримані в [6] умови збіжності можуть справджуватися як при $\rho\left(A\right) < 1$, так і при $\rho\left(A\right) > 1$. В даному повідомленні використано методику із [6]. Вона застосована, зокрема, в [7, розділ XIII] для дослідження збіжності агрегаційно-ітеративного аналогу методу Я.Д. Мамедова (див. [2, ст. 150]).

Для опису цієї методики скористаємось однопараметричним методом ітеративного агрегування, подавши (2) у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + \frac{Ax^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}\left(\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, x^{(n)}\right)\right) + b. \qquad (3)$$

Введемо позначення

$$a^{(n)} = \frac{Ax^{(n)}}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} \qquad (4)$$

і запишемо (3) як рівність

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + a^{(n)}\left(\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, x^{(n)}\right)\right) + b, \qquad (5)$$

маючи на увазі співвідношення

$$y^{(n+1)} = \lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right) + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, b\right). \qquad (6)$$

Тут $\lambda \neq 1$ – довільне дійсне число, $\varphi \in E^{*}$ – елемент простору E^{*}, який є спряженим до банахового простору E, $b \in E$. Припустимо, що лінійні неперервні оператори $A : E \to E$, $A_2 : E \to E$, а також лінійний неперервний оператор $A_1 : E \to E$ задовольняють співвідношенню:

$$A_1^{*}\varphi = \lambda\varphi, \quad A_2 = A - A_1, \qquad (7)$$

де A_1^{*} – спряжений до A_1 оператор. Числа $\alpha^{(n)}$ означимо за допомогою формули

$$\alpha^{(n)} = -\frac{\left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}, \qquad (8)$$

а число $y^{(0)}$ визначимо з рівності

$$\left(\varphi, x^{(0)}\right) + y^{(0)} = 0. \qquad (9)$$

Тоді, можна вважати також, що замість рівняння (1) йдеться про розгляд системи рівнянь, утвореної приєднанням до (1) скалярного рівняння

$$y = \lambda y - \left(\varphi, A_2 x\right) - \left(\varphi, b\right). \qquad (10)$$

Цим створюється ситуація, коли простір E, в якому розглядаємо рівняння (1), "занурюємо" в простір $\varepsilon = E \times \mathbb{R}^1$, у якому розглядатимемо систему рівнянь (1), (10), де $\mathbb{R}^1$ – множина дійсних чисел. Кілька очевидних фактів виправдовують заміну ітераційної формули (2) записом ітераційного процесу у вигляді (5), (6) та дають підставу для використання можливості поширити намічену для однопараметричного випадку схему дослідження на багатопараметричну ситуацію, а також дослідити з єдиних позицій не лише методи ітеративного агрегування, а й інші відомі і нові ітераційні методи, конструюючи їх на основі агрегаційного принципу (див., зокрема, [7, розділ XIII]). Для таких методів природно використовувати термін "агрегаційно-ітеративні методи ", маючи на увазі аналогії з терміном “проекційно-ітеративні методи” А.Ю. Лучки та М.С. Курпеля та із терміном “проекційно-сіткові методи” Г.І. Марчука. Деякі, корисні у подальшому викладі факти, виокремимо у вигляді наступних лем.

Лема 1. Якщо $a^{(n)}$ та $\alpha^{(n)}$ означені формулами (4) та (8) відповідно і справджуються співвідношення (7), то мають місце рівності

$$\left(\varphi, a^{(n)}\right) + \alpha^{(n)} = \lambda, \quad (n = 0,1,...). \tag{11}$$

Доведення. Із (4), (7), (8) випливає

$$\left(\varphi, a^{(n)}\right) + \alpha^{(n)} = \frac{\left(\varphi, Ax^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} - \frac{\left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} = \frac{\left(\varphi, A_1 x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} + \frac{\left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} -$$

$$-\frac{\left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} = \frac{\left(\varphi, A_1^* x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} = \lambda \frac{\left(\varphi, x^{(n)}\right)}{\left(\varphi, x^{(n)}\right)} = \lambda,$$

що й потрібно було довести.

Лема 2. Нехай справджуються умови леми 1, тобто маємо співвідношення (4), (7), (8). Якщо $x^{(0)}, y^{(0)}$ задовольняють рівності (9), то для послідовностей $\left\{x^{(n)}\right\}, \left\{y^{(n)}\right\}$, утворених за допомогою ітераційного процесу (5), (6), має місце рівність

$$\left(\varphi, x\right) + y = 0 \tag{12}$$

при $x = x^{(n)}$, $y = y^{(n)}$ для $n = 0,1,...$

Доведення. Використовуючи індукцію та лему 1, із співвідношень (5), (6) одержуємо

$$\left(\varphi, x^{(n+1)}\right) + y^{(n+1)} = \left(\varphi, A_1 x^{(n)}\right) + \left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right) + \left(\varphi, a^{(n)}\right)\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \left(\varphi, b\right) +$$

$$\lambda y^{(n+1)} - \left(\varphi, A_2 x^{(n)}\right) + \alpha^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - \left(\varphi, b\right) = \left(A_1^* \varphi, x^{(n)}\right) +$$

$$+ y^{(n+1)}\left(\lambda - \left(\varphi, a^{(n)} + \alpha^{(n)}\right)\right) + y^{(n)}\left(\lambda - \left(\varphi, a^{(n)} + \alpha^{(n)}\right)\right) = \lambda\left(\left(\varphi, x^{(n)}\right) + y^{(n)}\right) = 0,$$

оскільки, згідно з принципом індукції, рівність (12) для $x = x^{(n)}$, $y = y^{(n)}$ справджується за припущенням.

Означимо множину ε_0 як сукупність таких $x \in E$, $y \in \mathbb{R}^1$, для яких має місце рівність (12). Множина ε_0 є лінійним підпростором простору $\varepsilon = E \times \mathbb{R}^1$, який можна вважати банаховим простором, якщо в E ввести норму пари $\{x, y\} = z \in \varepsilon$ як норму вектора $\{\|x\|, y\}$, наприклад, приймаючи за цю норму евклідову норму вектора $\{\|x\|_E, |y|\}$, де $\|\cdot\|_E$ – норма в просторі E, $|\cdot|$ – абсолютна величина дійсного числа.

Лема 3. Якщо $\lambda \neq 1$ і справджуються рівності (7), то для розв'язку $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon$ системи рівнянь

$$x = A_1 x + A_2 x + b, \tag{13}$$

$$y = \lambda y - (\varphi, A_2 x) - (\varphi, b) \tag{14}$$

має місце співвідношення $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon_0$ (тут (13) збігається з (1), оскільки маємо на увазі співвідношення (7)).

Доведення. Рівності (13), (14) і (7) приводять до співвідношень

$$(\varphi, x^*) + y^* = (\varphi, A_1 x^*) + (\varphi, A_2 x^*) + (\varphi, b) + \lambda y^* - (\varphi, A_2 x^*) - (\varphi, b) =$$
$$(A_1^* \varphi, x^*) + \lambda y^* = \lambda\left((\varphi, x^*) + y^*\right).$$

Оскільки $\lambda \neq 1$, то звідси випливає рівність $(\varphi, x^*) + y^* = 0$, що й потрібно було довести.

Наступне твердження є наслідком попередніх лем.

Лема 4. Нехай справджуються рівності (4), (7), (8), $\lambda \neq 1$ і $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \varepsilon_0$. Тоді для розв'язку $\{x^*, y^*\}$ систем (13), (14) і послідовностей $\{x^{(n)}\}, \{y^{(n)}\}$, утворених за допомогою алгоритму (5), (6), мають місце співвідношення

$$(\varphi, x^{(n)} - x^*) + (y^{(n)} - y^*) = 0 \ \ (n = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Завдяки (15) для оцінки збіжності послідовності $\{x^{(n)}\}$, утвореної зо допомогою (5), (6), можна скористатися рівністю

$$x^{(n+1)} - x^* = A(x^{(n)} - x^*) - \frac{a^{(n)}}{1 - \lambda + \alpha^{(n)}}\left(A_2^* \varphi + (1-\lambda)\varphi, x^{(n)} - x^*\right), \tag{16}$$

якщо $1 - \lambda + \alpha^{(n)} \neq 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$. При "вдалому" виборі $\lambda, \varphi, a^{(n)}, \alpha^{(n)}$, що входять в (16), збіжність послідовності $\{x^{(n)}\}$ до x^* можна забезпечити за умови, коли норма лінійного щодо $w = x^{(n)} - x^*$ оператора, породженого правою частиною (16), менша за одиницю як при $\rho(A) < 1$, так і при $\rho(A) > 1$. Як випливає з (16), вибір нульового оператора замість A_2 при $\alpha^{(n)} = 0,$ $(n = 0, 1, \ldots)$ із врахуванням того факту, що при $\alpha^{(n)} = 0$ завдяки (11) будемо мати

$$(\varphi, a^{(n)}) = \lambda \ \ (n = 0, 1, \ldots),$$

гарантує збіжність послідовності $\{x^{(n)}\}$ до x^* при $a^{(n)} = \lambda\psi$ $(n = 0, 1, \ldots, \psi \in E)$ тоді, коли меншим за одиницю є спектральний радіус оператора $Aw - \psi(\varphi, w)$ як лінійного щодо w. Виокремимо випадок, коли простір E тотожний з евклідовим простором $\mathbb{R}^N$,

φ є власним вектором оператора A_1^*, який збігається з A^* при нульовому операторові A_2, а ψ є власним вектором оператора $A_1 = A$, що відповідають власному значенню λ. Нехай при $E = \mathbb{R}^N$ власне число $\lambda = \lambda_1$ є найбільшим за абсолютною величиною серед власних чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ матриці A. Припускаючи, що його кратність дорівнює одиниці і що $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_N|$ та маючи на увазі, що в цьому випадку можна вважати $\varphi -$ вектором рядком, а $\psi -$ вектором стовпцем, рівність (16) можна подати як рівність

$$x^{(n+1)} - x^* = \left(A - \lambda_1 \psi \cdot \varphi\right)\left(x^{(n)} - x^*\right).$$

Тут добуток $\psi \cdot \varphi$ розуміємо як добуток матриці-стовпця ψ на матрицю-рядок φ. Цим встановлено такий результат.

Теорема 1. Нехай $E = \mathbb{R}^N$, $\left(\varphi, x^{(0)}\right) = \dfrac{(\varphi, b)}{1 - \lambda_1} = 0$, де λ_1 та φ і ψ є власним числом та відповідно лівим і правим власними векторами матриці A. Тоді послідовність $\left\{x^{(n)}\right\}$, утворена за допомогою алгоритму (5), (6), збігається при $|\lambda_2| < 1$ не повільніше за геометричну прогресію зі знаменником $q = |\lambda_2|$.

Доведення стає очевидним, якщо зауважити, що за цієї ситуації рівняння (10) зводиться до рівності $y = -\dfrac{(\varphi, b)}{1 - \lambda_1}$ і із (6) випливає, що $y^{(n)} = \dfrac{(\varphi, b)}{1 - \lambda}$ $(n = 0, 1, ...)$. При цьому очевидно також, що для спектрального радіуса $\rho(H)$ оператора $H = A - \lambda_1 \psi \cdot \varphi$ маємо $\rho(H) < 1$.

Зауважимо, що як випливає із (5) і щойно зазначеного, ітераційний процес (5), (6) перетворюється в метод послідовних наближень $x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b$ зі спеціальними вибором початкового наближення $x^{(0)} \in \varepsilon_0$, де ε_0 є підпростором розмірності 1 в $\mathbb{R}^N$.

Наведений результат щодо ситуації в $E = \mathbb{R}^N$ при зазначеному виборі $\lambda, \varphi, a^{(n)}, \alpha^{(n)}$ дає підстави сподіватися, що “вдалий” вибір, зокрема, λ і φ є тим кращим, чим кращими (в тому, чи іншому розумінні) наближеннями до найбільшого за абсолютною величиною власного числа λ_1 і відповідного йому власного елемента оператора A вибрані λ та φ.

Зауваження 1. У випадку $E = \mathbb{R}^N$, якщо $A\psi = \lambda \psi \cdot \varphi,\ A^* \varphi = \lambda \varphi \cdot \psi$, то вибір $a^{(n)} = \lambda \psi \ (n = 0, 1, ...)$ мінімізує норму оператора, породженого правою частиною рівності (16). Довести це можна за допомогою методу найменших квадратів.

Не вдаючись до подробиць щодо оцінок збіжності алгоритму (5), (6), що ґрунтуються на рівності (16), звернемо увагу на те, що вибір $a^{(n)}$ та $\alpha^{(n)}$ за формулами (4) і (8) описує саме метод ітеративного агрегування в однопараметричному випадку. Однак при доведенні лем 2 і 3, які забезпечують рівності (15), котрим належить важлива роль при оцінці збіжності ітераційного процесу, рівності (4) і (8) не використовуються. Тому $a^{(n)}$ та $\alpha^{(n)}$ можна вибрати довільним чином, підпорядковуючи їх вимозі, щоб справджувалася рівність (11).

Розглянемо загальну ситуацію, вважаючи, що як і раніше, лінійний неперервний оператор $A: E \to E$ поданий як сума $A_1 + A_2$, тобто записуватимемо рівняння (1) у вигляді

$$x = A_1 x + A_2 x + b \ \left(b \in E\right) \tag{17}$$

Вважатимемо, що задані лінійні неперервні оператори $\Lambda: E' \to E'$, $S: E \to E'$, $a^{(n)}: E \to E'$, $\alpha^{(n)}: E' \to E'$, де банахові простори E та E' можуть бути, взагалі кажучи, різними. Постулюємо рівності

$$SA_1 = \Lambda S, \tag{18}$$

$$Sa^{(n)} + \alpha^{(n)} = \Lambda \ \left(n = 0,1,...\right). \tag{19}$$

В банаховому просторі $\varepsilon = E \times E'$, в якому норму пари $z = \left\{x, y\right\}$ означатимемо, наприклад, як евклідову норму $\|z\|$ вектора $\left\{\|x\|_E, \|y\|_{E'}\right\}$, виокремимо підпростір ε_0 як сукупність пар $x \in E, y \in E'$, для яких маємо рівність

$$Sx + y = \theta', \tag{20}$$

де θ' – нульовий елемент в E'. У просторі ε розглядатимемо систему рівнянь, що складається з рівняння (17) і додаткового рівняння

$$y = \Lambda y - SA_2 x - Sb. \tag{21}$$

Наступні три твердження є аналогами лем 2-4.

Лема 5. Нехай $\left\{x^*, y^*\right\}$ – розв'язок в просторі ε системи (17), (21). Тоді $\left\{x^*, y^*\right\} \in \varepsilon_0$, якщо оператор $I' - \Lambda$ має обернений оператор $\left(I' - \Lambda\right)^{-1}$, де I' – одиничний оператор в E'.

Доведення. Справді, з (17), (21) випливає

$Sx^* + y^* = SA_1 x^* + SA_2 x^* + Sb + \Lambda y^* - SA_2 x^* - Sb = SA_1 x^* + \Lambda y^*$.

Звідси, завдяки (18) знаходимо $Sx^* + y^* = \Lambda\left(Sx^* + y^*\right)$. Існування оператора $\left(I' - \Lambda\right)^{-1}$ дає підстави зробити висновок, що $Sx^* + y^* = \theta'$.

Побудуємо ітераційний процес за формулами

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_2 x^{(n)} + b + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right), \tag{22}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - SA_2 x^{(n)} + a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - Sb. \tag{23}$$

За припущення, що при кожному $n = 0,1,...$ існує обернений оператор $\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}$ послідовність $\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\}$ означена.

Лема 6. Якщо $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$, то при кожному $n = 0,1,...$ мають місце співвідношення $\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\} \in \varepsilon_0$.

Доведення. З огляду на принцип індукції, знайдемо

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = SA_1x^{(n)} + SA_2x^{(n)} + Sb + Sa^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) + \Lambda y^{(n+1)} - SA_2x^{(n)} +$$

$$+a^{(n)}\left(y^{(n)} - y^{(n+1)}\right) - Sb = SA_1x^{(n)} + \left(\Lambda - Sa^{(n)} - \alpha^{(n)}\right)y^{(n+1)} - \left(Sa^{(n)} + \alpha^{(n)}\right)y^{(n)}.$$

Звідси, враховуючи (18) і (19), одержуємо

$$Sx^{(n+1)} + y^{(n+1)} = \Lambda\left(Sx^{(n)} + y^{(n)}\right).$$

Тому з припущення, що $\left\{x^{(n)}, y^{(n)}\right\} \in \varepsilon_0$, випливає $\left\{x^{(n+1)}, y^{(n+1)}\right\} \in \varepsilon_0$. Цим лему доведено.

Лема 7. Якщо $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$, то для всіх $n = 0,1,...$ справджується рівність

$$S\left(x^{(n)} - x^*\right) + \left(y^{(n)} - y^*\right) = \theta'. \tag{24}$$

Доведення зводиться до застосування лем 5 та 6.

При дослідженні збіжності ітераційного процесу (22), (23) вважатимемо, що справджуються умови (18), (19) та припускатимемо існування операторів $\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}$ $(n = 0,1,...)$, $\left(I' - \Lambda\right)^{-1}$, а також приймемо, що $\left\{x^{(0)}, y^{(0)}\right\} \in \varepsilon_0$, тобто, що справджуються умови лем 5-7.

Оскільки з (17), (21)-(23) випливають рівності

$$\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(y^{(n+1)} - y^*\right) = -SA_2\left(x^{(n+1)} - x^*\right) + \alpha^{(n)}\left(y^{(n+1)} - y^*\right),$$

$$\begin{aligned} \left(x^{(n+1)} - x^*\right) &= A_1\left(x^{(n)} - x^*\right) + A_2\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ &+a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1} SA_2\left(x^{(n)} - x^*\right) + \\ &+a^{(n)}\left(I' - \Lambda + \alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I' - \Lambda\right)\left(y^{(n)} - y^*\right), \end{aligned} \tag{25}$$

то, ввівши позначення

$$H^{(n)}w = \begin{pmatrix} H_{11}^{(n)} & H_{12}^{(n)} \\ H_{21}^{(n)} & H_{22}^{(n)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

$$H_{11}w_1=\left[A_1+A_2+a^{(n)}\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}SA_2\right]w_1,$$

$$H_{12}w_2=a^{(n)}\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda\right)w_2,$$

$$H_{21}w_1=-\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}SA_2w_1,$$

$$H_{22}w_2=\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\alpha^{(n)}w_2,$$

де $w=\{w_1,w_2\}^T$, $T-$символ транспонування, можна стверджувати наступне.

Теорема 2. Якщо $\left\|H^{(n)}\right\|\le q\le\varepsilon$**,** $n=0,1,...$, де $\left\|H^{(n)}\right\|-$ норма оператора $H^{(n)}:\varepsilon\to\varepsilon$, індукована нормою $\|\cdot\|$ в ε, то послідовність $\left\{x^{(n)},y^{(n)}\right\}$**,** побудована за допомогою формул (22), (23), збігається до розв'язку $\left\{x^*,y^*\right\}$ системи (17), (21) не повільніше за геометричну прогресію зі знаменником q.

Рівності (24) в умовах і при обґрунтуванні теореми не фігурують. Завдяки (24) рівності (25) можна подати у вигляді

$$x^{(n+1)}-x^*=\left(\left[A_1-a^{(n)}\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda\right)S\right]+\right.$$
$$\left.+\left[A_2-a^{(n)}\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda\right)SA_2\right]\right)\left(x^{(n)}-x^*\right). \quad (26)$$

Позначимо через $H_0^{(n)}$ оператор, породжений правою частиною рівності (26).

Теорема 3. Якщо

$$\left\|H^{(n)}\right\|_E\le q_0<1\ \left(n=0,1,...\right), \quad (27)$$

то утворена за допомогою алгоритму (22), (23) послідовність $\left\{x^{(n)}\right\}$ збігається до розв'язку x^* рівняння (17) не повільніше за геометричну прогресію зі знаменником q_0.

Доведення. Теорема 3 є наслідком теореми 2, тому для її доведення достатньо скористатися рівністю (26).

Закцентуємо увагу на наступному. Оператор $H_0^{(n)}$ можна подати у вигляді $H_0^{(n)}=H_1^{(n)}+H_2^{(n)}$, де

$$\begin{aligned}H_1^{(n)}&=A_1-a^{(n)}\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda\right)S,\\H_2^{(n)}&=A_2+a^{(n)}\left(I'-\Lambda+\alpha^{(n)}\right)^{-1}\left(I'-\Lambda\right)SA_2.\end{aligned} \quad (28)$$

Розглянемо ситуацію, за якої при $n=0,1,...$ оператори $\alpha^{(n)}$ є нульовими.

Теорема 4. Нехай $\alpha^{(n)}$ є нульовими операторами, а оператори $A_1, a^{(n)}, S$ зв'язані співвідношеннями

$$a^{(n)}S = A_1 \ (n = 0,1,...). \tag{29}$$

Якщо $\left\| H_2^{(n)} \right\|_E \le q_2 < 1,$то послідовність $\left\{ x^{(n)} \right\}$, побудована за формулами (22), (23), збіжна.

Доведення. Умова (29) і вибір за $\alpha^{(n)}$ нульових операторів означає, згідно з (28), $H_0^{(n)} = H_2^{(\grave{o})}$ $(n = 0,1,...)$. Тому в (27) замість q_0 можна взяти q_2.

Приклад 1. Нехай оператор A можна подати у вигляді

$$A = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_i \quad \left(N \le \infty \right). \tag{30}$$

Будемо вважати, що

$$\left|\lambda_1\right| \ge \left|\lambda_2\right| \ge ... \ge \left|\lambda_{N_0}\right| \ge \left|\lambda_{N_0+1}\right| \ge ... \ge \left|\lambda_N\right| \tag{31}$$

і λ_i $\left(i = \overline{1,N} \right)$ є власними числами, а елементи φ_i $\left(i = \overline{1,N} \right)$ – відповідними їм власними елементами оператора A^*, спряженого з A. Приймемо у (17)

$$A_1 = \sum_{i=1}^{N_0} \lambda_i p_i; \ A_2 = \sum_{i=N_0+1}^{N} \lambda_i p_i .$$

Задля спрощень вважатимемо, що E – гільбертів простір, p_i є проекторами, які проектують простір E на попарно ортогональні підпростори E^i, кожен з яких має розмірність 1, числа λ_i вважатимемо дійсними. Як відомо, в такому разі $p_i^2 = p_i$ і $p_i p_j = 0$ при $i \ne j$. В цьому випадку приймемо, що

$$\Lambda = diag\left(\lambda_1, ..., \lambda_{N_0} \right), \ S = \left\{ S_1, ..., S_{N_0} \right\},$$

де рівності $S_i A x = \left(\varphi_i, Ax \right) = \left(A^* \varphi_i, x \right) = \lambda_i \left(\varphi_i, x \right)$ відповідають співвідношенню (18). В рівностях (19) вважаємо, що $\alpha^{(n)}$ є нульовими операторами і рівності (19) записуватимемо у вигляді $S_i a^{(n)} = \left(\varphi_i, a_i^{(n)} \right) = \lambda_i$ $\left(i = \overline{1, N_0} \right)$. Можна переконатися, що у цьому випадку рівність (20), якою означена множина ε_0 початкових наближень, зводиться до рівностей $\left(\varphi_i, x \right) = \dfrac{\left(\varphi_i, b \right)}{1 - \lambda_i}$ $\left(i = \overline{1, N_0} \right)$. Тому виправданим є припущення, що $\lambda_i \ne 1$ $\left(i = \overline{1, N_0} \right)$. Для гільбертового простору E в ситуації, коли A – самоспряжений оператор, припустимо, що SA_2 є нульовим оператором. Таким чином, для цього прикладу ітераційний процес (22), (23) фактично описується за допомогою формул методу послідовних наближень

$$x^{(n+1)} = A_1 x^{(n)} + A_2 x^{(n)} + b \ \ (n = 0,1,\dots) \qquad (32)$$

для рівняння (17) з початковим наближенням $x_0 \in \varepsilon_1$, де ε_1 означується як сукупність елементів $x \in E$, для яких мають місце рівності

$$(\varphi, x) = 0 \,. \qquad (33)$$

Як частковий випадок отримаємо такий результат.

Теорема 5. Нехай справджуються припущення (30), (31) і мають місце зазначені припущення щодо структури операторів $A_1, A_2, \Lambda, S, a^{(n)}, \alpha^{(n)}$ та чисел λ_i і проекторів p_i $(i = \overline{1,N})$ в гільбертовому просторі E. Якщо

$$\|A_2\| \le q < 1 \qquad (34)$$

і $x^{(0)}$ задовольняє рівності (33) при $x = x^{(0)}$, то метод послідовних наближень (32) збігається до розв’язку x^* рівняння (17) не повільніше від геометрично ї прогресії із знаменником q.

Доведення. Можна переконатися, що для оператора $H_0^{(n)}$, застосувавши теорему 3, матимемо $H_0^{(n)} = A_2$ ($n = 0,1,\dots$), бо, очевидно, що SA_2 є нульовим оператором і справджується рівність (33).

Зауваження 2. Умову (34) можна замінити вимогою $\rho(A_2) = \left|\lambda_{N_0+1}\right| < 1$.

Зауваження 3. Теорему 5 можна поширити з відповідними застереженнями на рівняння вигляду (17), коли оператор $A = A_1 + A_2$ не є самоспряженим, маючи на увазі, що весь попередній виклад можна подати в термінах, що допускають можливість розгляду комплексних λ_i.

Література

1. Цурков В.И. Декомпозиция в задачах большой размерности / В.И. Цурков. – М.: Наука, 1981. – 351 с.
2. Красносельский М.А. Пизитивные линейные системы / М.А. Красносельский, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. – М.: Наука, 1985. – 255 с.
3. Дудкин Л.М. Межотреслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов / Л.М. Дудкин, Є.Б. Ершов // Плановое хозяйство. – 1965. – №5. – С. 59-63.
4. Итеративное агрегирование и его применение в планирование; Под. ред. Л.М. Дудкина. – М.: Экономика, 1979. – 328 с.
5. Фомин С.В. Математические проблемы в биологии / С.В. Фомин, М.Б. Беркенблит. – М.: Наука, 1973. – 200 с.
6. Шувар Б.А. О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования / Б.А. Шувар // Вестник Львовского политехнического института. – 1989. – Т.232. – С. 140-142.

7. Двосторонні наближені методи / Б.А. Шувар, М.І. Копач, С.М. Ментинський, А.Ф. Обшта. – Івано-Франківськ: ВДВЦІТ, 2007. – 515 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 07.07.2010 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором, член-кореспондентом НАН України ***Пташником Б.Й.***

INVESTIGATIONS OF CONVERGENCE OF METHODS OF DECOMPOSITION

B. A. Shuvar[1], M. I. Kopach[2], A. F. Obshta[1], M. I. Nakonechna[1]

[1]National University "Lvivska Politechnika";
79013, Lviv, st. S. Bandery, 12
[2] PreCarpathian National University named after Vasyl Stefanik;
76000, Ivano-Frankivsk, st. Shevchenka, 57;
e-mail: kopachm2009@gmail.com

Some sufficient conditions of convergence of a class of methods of decomposition for linear equations with bounded operators are established. These condition does not require neiser fixed sign of the operator or bounds for the operator spectral radius.

***Key words**: decomposition, methods of decomposition, linear equations, operators.*