УДК 517.925

СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ З ОДНОСТОРОННЬО ЛІПШИЦІЄВИМИ ПРАВИМИ ЧАСТИНАМИ

М. І. Копач[1], А. Ф. Обшта[2], Б. А. Шувар[2]

[1] *Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76000, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: kopachm2009@gmail.com*

[2] *Національний університет "Львівська політехніка"; 79013, м. Львів, вул С.Бандери, 12*

Встановлено теореми про двосторонні оцінки розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь за припущень, які є слабшими за умову Ліпшица.

Ключові слова: *диференціальні нерівності, одностороння ліпшицієвість, вектор-функції.*

Вступ. У теоремах про строгі диференціальні нерівності часто йдеться про те, що для кожного неперервного диференційованого розв'язку $x(t)$ задачі

$$x'(t) = f\left(t, x(t)\right), \tag{1}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

із співвідношень

$$p'(t) < f\left(t, p(t)\right) \qquad \left(t \in (t_0, t_1),\ p(t_0) \le x(t_0)\right) \tag{3}$$

випливає нерівність

$$p(t) < x(t) \quad t \in (t_0, t_2), \quad (t_0 < t_2 \le t_1) \tag{4}$$

з неперервно диференційованою дійсною функцією $p(t)$. Якщо в (3) нерівність нестрога, то замість строгої нерівності (4) отримуємо нестрогу нерівність для верхнього розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2). Методики обґрунтування цих фактів істотно відрізняються одна від одної.

У пропонованому повідомленні результати із [1] поширюються на системи нестрогих диференціальних нерівностей, що стало доповненням для відповідних тверджень із [2], [3].

Постановка задачі. Нехай $x(t)$ та $f\left(t, x(t)\right)$ у співвідношеннях (1), (3) є вектор-функціями розмірності $N \ge 1$ з дійсними компонентами. Вектор-функцію $f\left(t, x(t)\right)$ будемо вважати неперервною за сукупністю аргументів при $t \in [t_0, T]$, $x \in S(x_0) = \{x \,|\, x, x_0 \in \mathbb{R}^N, \ \|x - x_0\| \le M\}$, де $\mathbb{R}^N$ – евклідів простір розмірності N, а $-\infty < t_0 \le t \le t_1 < \infty$.

Умовою A_0 називаємо припущення, що існує неперервна при $t \in [t_0, t_1]$ матрична функція $L_1(t) = \{l_{ij}^{(1)}\}_{i,j=\overline{1,N}}$, з невід'ємними елементами $l_{ij}(t)$ при $i \neq j$, $t \in [t_0, t_1]$, для якої із співвідношення

$$y \le z, \quad y, z \in S(x_0), \quad (t \in [t_0, t_1]) \tag{5}$$

випливає нерівність

$$f(t, z) - f(t, y) \le L_1(t)(z - y),$$

а також із співвідношень (5) випливає нерівність

$$f(t, y) \le f\left(t, z^{[y]}\right). \tag{6}$$

Позначення $f\left(t, z^{[y]}\right)$ означає, що компоненту f_i вектора $f = \{f_1, ..., f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, ..., f_N\}$ замінено компонентою, для якої замість вектора $z = \{z_1, ..., z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, ..., z_N\}$ беремо вектор $z^{[y]} = \{z_1, ..., z_{i-1}, y_i, z_{i+1}, ..., z_N\}$.

Лема 1. Нехай справджується умова A_0 і неперервно диференційовні функції

$$u(t) = \{u_1(t), ..., u_N(t)\}, \quad v(t) = \{v_1(t), ..., v_N(t)\}$$

задовольняють співвідношення:

$$u(t_0) \le x_0 \le v(t_0) \tag{7}$$

$$u'(t) \le f(t, u(t)), \quad v'(t) \ge f(t, v(t)) \qquad (t \in [t_0, t_1]). \tag{8}$$

Тоді

$$u(t) \le v(t) \qquad (t \in [t_0, t_1]). \tag{9}$$

Доведення. Припустимо протилежне. Позначимо через D множину таких $t \in [t_0, t_1]$, для яких (9) не виконується. Це означає, що D містить такі і тільки такі $t \in [t_0, t_1]$ для яких знайдеться хоча б одне значення індексу i, при якому $u_i(t) > v_i(t)$. Існує точна нижня грань t^* множини D, при цьому $t^* \in D$. За неперервністю та зі скінченності N можна зробити висновок про існування проміжку $(t^*, t_2]$, $(t_0 \le t^* < t_2 \le t_1)$, на якому $u_i(t) > v_i(t)$, якщо $i \in I_0$, де $I_0 -$ множина значень індексу i, при яких (9) не має місця на $(t^*, t_2]$. Для зручності позначимо через $\overline{u}(t)$ вектор, який отримуємо з вектора $u(t)$ заміною тих його координат, індекси яких не належать до I_0, відповідними координатами $v(t)$. Оскільки, за припущенням I_0 є не порожньою множиною, то з (8) і умови A_0, враховуючи домовлені позначення, отримуємо

$$v_i'(t) - u_i'(t) \ge f_i(t, v(t)) - f_i(t, u(t)) = f_i(t, v(t)) - f_i\left(t, \overline{u}(t)\right) +$$
$$+ f_i\left(t, \overline{u}(t)\right) - f_i(t, u(t)) \ge \sum_{j \in I_0} l_{ij}^{(1)}(t)\left(v_j(t) - u_j(t)\right) \qquad (i \in I_0).$$

Таким чином,

$$v_j'(t)-u_j'(t)\ge\sum_{j\in I_0}l_{ij}^{(1)}(t)\big(v_j(t)-u_j(t)\big)\quad(i\in I_0). \tag{10}$$

Співвідношення (10) замінимо такою рівністю:

$$w_i'(t)=\sum_{j\in I_0}l_{ij}^{(1)}w_j(t)+\delta_i(t),$$

де $w(t)=v(t)-u(t)$, $i\in I_0$, $t\in[t^*,t_2]$. Звідси, враховуючи виконання умови A_0 і припущення, отримуємо, що $w_i(t)\ge 0$ при $i\in I_0$, $t\in[t^*,t_2]$, що суперечить припущенню про те, що $w(t)<0$ для $i\in I_0$, $t\in[t^*,t_2]$. Одержана суперечність доводить, що нерівність (9) виконується на всьому сегменті $[t_0,t_1]$.

Лема 2. Якщо виконується умова A_0, то існує сегмент $[t_0,t_2]$, $t_0<t_2\le t_1$, на якому розв'язок задачі (1), (2) єдиний.

Доведення. За такого припущення можна довести існування нижнього $y(t)$ і верхнього $z(t)$ неперервно диференційованих розв'язків задачі (1), (2) (див. [2], а також [3]). Для цього достатньо використати умову A_0 лише у тій її частині, яка стосується властивості (6). За умови A_0 та з означення нижнього і верхнього розв'язків випливає:

$$z'(t)-y'(t)=f(t,z(t))-f(t,y(t))\le L_1(t)\big(z(t)-y(t)\big). \tag{11}$$

Позначивши $\omega(t)=z(t)-y(t)$, матимемо

$$\omega(t)=L_1(t)\omega(t)-\delta(t),\quad \omega(t_0)=0,$$

де невідома функція $\sigma(t)=\{\sigma_1(t),...,\sigma_N(t)\}$, $\sigma_i(t)\ge 0$. Використовуючи (11) і класичні результати з теорії систем диференціальних нерівностей (див. [2-4]), отримуємо, що $\omega(t)\le 0$, тобто $z_i(t)\le y_i(t)$ $\left(i=\overline{1,N},\, z\in[t_0,t_1]\right)$. Зіставляючи одержану нерівність з означенням нижнього і верхнього розв'язків, робимо висновок, що $z_i(t)=y_i(t)$ $\left(i=\overline{1,N},\, z\in[t_0,t_2]\right)$. Лему доведено.

Теорема 1. Якщо виконано умови леми 1 та леми 2, то для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0,t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2) мають місце оцінки:

$$u(t)\le x(t)\le v(t)\quad\left(t\in[t_0,t_1]\right). \tag{12}$$

Доведення. З леми 1 та леми 2 випливають оцінки (12) хоча б для $t\in[t_0,t_2]$ $\left(t_0<t_2\le t_1\right)$. Можливість продовжити розв'язок $x(t)$ на $[t_2,t_1]$, якщо $t_2<t_1$, можна обґрунтувати традиційним способом (див. напр., [2]). При цьому істотно використовуються співвідношення (8).

Умовою B_0 назвемо припущення про те, що із співвідношення (5) випливає нерівність

$$f\left(t,y\right)\le f\left(t,y^{[z]}\right), \tag{13}$$

а також існує неперервна при $t\in[t_0,t_1]$ матрична функція $L_2(t)=\{l_{ij}^{(2)}\left(t\right)\}_{i,j=\overline{1,N}}$ з невід'ємними елементами $l_{ij}\left(t\right)$ при $i\ne j,\quad t\in[t_0,t_1]$, для якої із співвідношення (5) випливає

$$L_2\left(t\right)\left(z-y\right)\le f\left(t,z\right)-f\left(t,y\right). \tag{14}$$

Теорема 2. Нехай для неперервної за сукупністю аргументів при $t\in[t_0,t_1], x\in S\left(x_0\right)$ функції $f\left(t,x\right)$ справджується умова B_0 та задані неперервно диференційовні при $t\in[t_0,t_1]$ функції $p\left(t\right),q\left(t\right)$, для яких маємо

$$p\left(t_0\right)\le x_0\le q\left(t_0\right),$$
$$p'\left(t\right)<f\left(t,p\left(t\right)\right),\quad q'\left(t\right)>f\left(t,q\left(t\right)\right), \tag{15}$$

де співвідношення $y<z$ означає, що $y_i<z_i\quad \forall i=\overline{1,N}$. Тоді для кожного неперервно диференційованого на $[t_0,t_1]$ розв'язку $x\left(t\right)$ задачі (1), (2) справджуються при $t\in[t_0,t_1]$ оцінки:

$$p\left(t\right)<x\left(t\right)<q\left(t\right). \tag{16}$$

Доведення. Для $t=t_0$ з припущення про те, що для деякого номера i маємо, наприклад, $p_i\left(t_0\right)=x_i\left(t_0\right)$, з умови (3) та умови B_0 випливає таке співвідношення:

$$x'\left(t_0\right)-p'\left(t_0\right)>f\left(t_0,x\left(t_0\right)\right)-f\left(t_0,p\left(t_0\right)\right)=f\left(t_0,x\left(t_0\right)\right)-f\left(t_0,x^{[p]}\left(t_0\right)\right)+$$
$$f\left(t_0,x^{[p]}\left(t_0\right)\right)-f\left(t_0,p\left(t_0\right)\right)\ge f\left(t_0,x^{[p]}\left(t_0\right)\right)-f\left(t_0,p\left(t_0\right)\right),$$

тобто,

$$x'\left(t_0\right)-p'\left(t_0\right)>f_i\left(t_0,x^{[p]}\left(t_0\right)\right)-f_i\left(t_0,p\left(t_0\right)\right)\ge l_{ii}^{(2)}(t)\left(x_i\left(t_0\right)-p_i\left(t_0\right)\right)=0.$$

Тому для цього індексу i знайдеться проміжок $(t_0,t_2]$, у якому $x_i\left(t\right)>p_i\left(t\right)$. Нехай нерівності (16) мають місце на деякому проміжку $[t_0,t_3]$. Без обмеження загальності, враховуючи скінченну розмірність простору $\mathbb{R}^N$, можна вважати, що $t_3=t_2$ і $t_0<t_2\le t_1$. Припустимо, що нерівності (16) справджуються не на всьому проміжку $[t_0,t_1]$, тобто $t_2<t_1$. Якщо D_1 – множина таких $t\in[t_0,t_1]$, для яких нерівності (16) не мають місця, то існує $t^*=\inf D_1$, при цьому $t^*\in D_1$. Нехай I_1 – множина таких індексів i, для яких при $t=t^*$ маємо $x_i\left(t^*\right)=p_i\left(t^*\right)$. В такому випадку для кожного $i\in I_1$ за неперервністю отримаємо:

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{x_i\left(t^*-\Delta t\right)-p_i\left(t^*-\Delta t\right)-x_i\left(t^*\right)-p_i\left(t^*\right)}{\Delta t}=x_i'\left(t^*\right)-p_i'\left(t^*\right)\le 0. \tag{17}$$

З іншого боку, для $i\in I_1$ з (3), (15) та умови B_0 отримаємо

$$x_i\left(t^*\right)-p_i\left(t^*\right)>f_i\left(t^*,x\left(t^*\right)\right)-f_i\left(t^*,p\left(t^*\right)\right)=$$
$$=f_i\left(t^*,x\left(t^*\right)\right)-f_i\left(t^*,x^{[p]}\left(t^*\right)\right)+f_i\left(t^*,x^{[p]}\left(t^*\right)\right)-f_i\left(t^*,p\left(t^*\right)\right)\geq$$
$$\geq f_i\left(t^*,x^{[p]}\left(t^*\right)\right)-f_i\left(t^*,p\left(t^*\right)\right)\geq -l_{ii}^{(2)}\left(t^*\right)\left(x_i\left(t^*\right)-p_i\left(t^*\right)\right)=0.$$

Одержали нерівність $x_i\left(t^*\right)>p_i\left(t^*\right)$ для $i\in I_1$, що суперечить нерівності (17). Теорему доведено.

Як бачимо з доведення теореми 2, умову B_0 використано не в повному обсязі, тому її можна замінити слабшим припущенням.

Умовою $B_0^{'}$ назвемо припущення, що для кожної неперервно диференційованої функції f_i $(i=\overline{1,N})$ задана неперервна функція $l_{ii}^{(2)}\left(t\right)$, для якої із співвідношень (5) випливають нерівності (13) і (14) з діагональною матрицею $L_2\left(t\right)=diag\left\{l_{11}^{(2)}\left(t\right),...,l_{NN}^{(2)}\left(t\right)\right\}$.

У цьому випадку співвідношення (13), (14) мають місце для $l_{ij}^{(2)}\left(t\right)\equiv 0$ при $i\neq j$ $\left(i,j=\overline{1,N},t\in[t_0,t_1]\right)$. Можна вважати, що умови B_0 і $B_0^{'}$ рівносильні у тому розумінні, що у формулюванні теореми 2 заміна першої умови на другу зберігає істинність теореми.

Теорема 3. Нехай для неперервної за сукупністю аргументів при $t\in[t_0,t_1], x\in S\left(x_0\right)$ функції $f\left(t,x\left(t\right)\right)$ справджується умова B_0. Якщо задача (1), (2) має єдиний неперервно диференційований при $t\in[t_0,t_1]$ розв’язок $x\left(t\right)$, то із співвідношення (7), (8) випливають оцінки

$$u\left(t\right)\leq x\left(t\right)\leq v\left(t\right)\quad \left(t\in[t_0,t_1]\right). \tag{18}$$

Доведення. Побудуємо ітераційний процес

$$\begin{aligned}&y_0\left(t\right)=u\left(t\right),\ y_{n+1}^{'}f\left(t,y_n\left(t\right)\right),\ y_{n+1}\left(t\right)=u_0,\\&z_0\left(t\right)=v\left(t\right),\ z_{n+1}^{'}f\left(t,z_n\left(t\right)\right),\ z_{n+1}\left(t\right)=v_0.\end{aligned} \tag{19}$$

Методом математичної індукції доводимо, що із співвідношень (7), (8), (9) і умови B_0 випливають нерівності

$$y_n\left(t\right)\leq y_{n+1}\left(t\right),\quad z_{n+1}\left(t\right)\leq z_n\left(t\right)\quad t\in[t_0,t_1]. \tag{20}$$

Дійсно, нерівності (20) є очевидними при $n=0$. Припустивши, що вони справджуються для $n\geq 0$, знаходимо

$$\begin{aligned}&y_{n+2}\left(t\right)-y_{n+1}\left(t\right)=f\left(t,y_{n+1}\left(t\right)\right)-f\left(t,y_n\left(t\right)\right)=\\&=f\left(t,y_{n+1}\left(t\right)\right)-f\left(t,y_{n+1}^{[y_n]}\left(t\right)\right)+f\left(t,y_{n+1}^{[y_n]}\left(t\right)\right)-f\left(t,y_n\left(t\right)\right)\geq\\&\geq f\left(t,y_{n+1}^{[y_n]}\left(t\right)\right)-f\left(t,y_n\left(t\right)\right)\geq -diag\left\{l_{11}^{(2)},...,l_{NN}^{(2)}\right\}\left(y_{n+1}^{[y_n]}-y_n\left(t\right)\right)=0.\end{aligned} \tag{21}$$

Отже, $y_{n+2}^{'}\left(t\right)-y_{n+1}^{'}\left(t\right)\geq 0$, причому $y_{n+2}\left(t_0\right)=y_{n+1}\left(t_0\right)=u_0$. Тому очевидним є те, що $y_{n+2}\left(t\right)\geq y_{n+1}\left(t\right)$ при $t\in[t_0,t_1]$. У подібний спосіб можна отримати, що з нерівності $z_{n+1}(t) \le z_n(t)$ випливає нерівність $z_{n+2}(t) \le z_{n+1}(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$, що і завершує доведення нерівностей (20).

Із монотонності послідовностей $\{y_n(t)\}, \{z_n(t)\}$, побудованих з допомогою формул (20) і властивості компактності оператора Вольтерра

$$Tx = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s))\,ds,$$

можна зробити висновок, що хоча б у деякому малому проміжку $[t_0, t_2]$, де $t_0 < t_2 \le t_1$, кожна з послідовностей $\{y_n(t)\}, \{z_n(t)\}$ має неперервну граничну функцію $y^*(t)$ і $z^*(t)$ відповідно, причому кожна з них є неперервно диференційовним розв'язком задачі (1), (2). З єдиності цього розв'язку випливає, що $z^*(t) = y^*(t) = x(t)$ при $t \in [t_0, t_2]$. Беручи до уваги нерівності (20), можна вважати оцінки (18) доведеними для деякого проміжку, який, без обмеження загальності, ототожнюємо з проміжком $[t_0, t_2]$. При $t_2 < t_1$ застосовуємо класичний процес продовження розв'язку $x(t)$ і співвідношень (18) на деякий проміжок $[t_2, t_3]$, де $t_2 < t_3 \le t_1$, оскільки розв'язок на $[t_0, t_1]$ існує і співвідношення (8) на цьому проміжку мають місце. Припустимо, що $t^* \in (t_0, t_1]$ є точною верхньою гранню множини значень таких t, для яких нерівності (18) справджуються і $t^* < t_1$. Позначимо через I_2 та I_3 відповідно сукупності таких індексів i, для яких правіше від t^* мають місце, наприклад, нерівності $u_i(t) > x_i(t)$, при $i \in I_2$ та $x_i(t) > v_i(t)$, при $i \in I_3$. Тоді позначимо:

$$\bar{u}_i(y) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [t_0, t^*] \\ u_i(t), & t \in [t^*, t_1] \end{cases} \qquad (i \in I_2), \tag{22}$$

$$\bar{v}_i(y) = \begin{cases} x_i(t), & t \in [t_0, t^*] \\ v_i(t), & t \in [t^*, t_1] \end{cases} \qquad (i \in I_3). \tag{23}$$

Очевидною є неперервна диференційовність функцій $\bar{u}(t)$ та $\bar{v}(t)$ в околі точки $t = t^*$. Ці функції на сегменті $[t^*, t_1]$ задовольняють тим же умовам, що і функції $u(t)$ та $v(t)$ при $t \in [t_0, t_1]$. Тому можна застосувати ті ж міркування для проміжку, які були використані для обґрунтування співвідношень (18) при $t \in [t_0, t_2]$. Отже, існує таке t_3 $(t^* < t_3 \le t_1)$, що на сегменті $[t^*, t_3]$ справджуються оцінки (18). Це суперечить вибору t^*. Цим завершується обґрунтування можливості продовження оцінок (18) для $t \in [t_0, t_1]$. Теорему доведено.

Умовою $\bar{B}$ назвемо припущення, за яким для функції $f(t, x(t))$ задана матрична функція

$$\overline{L}_1(t)=diag\left\{l_{11}^{(1)}(t),...,l_{NN}^{(1)}(t)\right\}$$

з неперервними невід'ємними при $t\in[t_0,t_1]$ функціями $l_{ii}^{(1)}(t)\quad (i=\overline{1,N})$, для якої із співвідношень $y\le z$, де $t\in[t_0,t_1],\ y,z\in S(x_0)$ випливає така нерівність:

$$f(t,z)-f(t,y)\le \overline{L}_1(t)(z-y).$$

Оскільки можна вважати, що $L_1(t)=\left\{l_{ij}(t)\right\}_{i,j=\overline{1,N}}$, де $l_{ij}(t)\equiv 0$ при $i\ne j,\quad i,j=\overline{1,N},\quad t\in[t_0,t_1]$, то умова $\overline{B}$ означає, зокрема, що

$$f(t,y)\ge f\left(t,z^{[y]}\right)\quad \left(y\le z,\quad y,z\in S(x_0),\quad t\in[t_0,t_1]\right).$$

Теорема 4. Нехай для неперервної за сукупністю аргументів функції $f(t,x(t))$ при $x\in S(x_0),\quad t\in[t_0,t_1]$ справджується умова $\overline{B}$, задача (1), (2) має неперервно диференційовний при $t\in[t_0,t_1]$ розв'язок, а задача

$$y'(t)=f(t,z(t)),\quad z'(t)=f(t,y(t)),\quad z(t_0)=y(t_0)=x_0$$

має єдиний розв'язок $(y(t),z(t))$ з неперервно диференційовними при $t\in[t_0,t_1]$ компонентами $y(t),z(t)$. Тоді із співвідношень

$$u'(t)\le f(t,v(t)),\quad v'(t)\ge f(t,u(t)),\quad u(t_0)\le x_0\le v(t_0)$$

випливають оцінки (18) для єдиного неперервно диференційовного на $[t_0,t_1]$ розв'язку $x(t)$ задачі (1), (2).

Доведення. Побудуємо послідовності $\{y_n(t)\},\{z_n(t)\}$ за допомогою формул:

$$y_0(t)=u(t),\ y_{n+1}^{'}f(t,z_n(t)),\ y_{n+1}(t_0)=u(t_0),$$

$$z_0(t)=v(t),\ z_{n+1}^{'}f(t,y_n(t)),\ z_{n+1}(t_0)=v(t_0).$$

З цих формул та умови $\overline{B}$ можна отримати співвідношення (20), враховуючи, що замість (21) матимемо

$$y_{n+2}^{'}(t)-y_{n+1}^{'}(t)=f(t,z_{n+1}(t))-f(t,z_n(t))\ge$$

$$\ge -diag\left\{l_{11}^{(1)}(t),...,l_{NN}^{(1)}(t)\right\}(z_n(t)-z_{n+1}(t))=0.$$

Тому маємо нерівність $y_{n+2}(t)\ge y_{n+1}(t)$. У такий само спосіб одержуємо, що $z_{n+2}(t)\le z_{n+1}(t)$. Тому на підставі принципу математичної індукції робимо висновок про виконання співвідношення (20) для всіх $n=0,1,...,t\in[t_0,t_1]$.

Використовуючи компактність операторів, породжених правими частинами рівностей

$$T_1y=v(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}f(s,y(s))ds,\quad T_2z=u(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}f(s,z(s))ds,$$

можна, як і при доведенні попередньої теореми, зробити висновок про достовірність оцінок (18) хоча б на деякому, меншому за $[t_0, t_1]$, сегменті $[t_0, t_2]$. Знову використаємо такі ж міркування, до яких вдавались при обґрунтуванні можливості продовжити оцінки (18) на весь проміжок $[t_0, t_1]$ в доведенні теореми 3, використовуючи (22), (23). Обмежившись цими зауваженнями, вважатимемо доведення теореми завершеним.

Теорему 4 можна вважати деяким аналогом теореми 3, однак вона містить істотні відмінності від теореми 3. При $N = 1$ з наведених тут теорем отримуються результати [1].

Література

1. Копач М.І. Диференціальні нерівності з односторонньою ліпшицієвістю / М.І. Копач, А.Ф. Обшта, Б.А. Шувар // Карпатські математичні публікації. – 2009. – Т.1, №1. – С. 59-64.
2. Курпель Н.С. Двусторонние операторные неравенства и их применение / Н.С. Курпель, Б.А. Шувар. – К.: Наукова думка, 1980. – 272 с.
3. Двосторонні наближені методи / Б.А. Шувар, М.І. Копач, С.М. Ментинський, А.Ф. Обшта. – Івано-Франківськ: В-во ПНУ ім. Василя Стефаника, 2007. – 515 с.
4. Rabzuk R. Elementy nierównosci rożniczkowych / R.Rabzuk. – Warszawa, PWN, 1976. – 276 s.

Стаття надійшла до редакційної колегії 07.07.2010 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором,
член-кореспондентом НАН України ***Пташником Б.Й.***

SYSTEMS DIFFERENTIAL INEQUALITIES WITH ONE-SIDE LIPSCHITZ RIGHT PARTS

M. I. Kopach[1], A. F. Obshta[2], B. A. Shuvar
[1]PreCarpathian National University named after Vasyl Stefanik;
76000, Ivano-Frankivsk, st. Shevchenka, 57;
e-mail: kopachm2009@gmail.com
[2]National University "Lvivska Politechnika";
79013, Lviv, st. S. Bander, 12

Some theorems on two-side estimations of solutions of ordinary differential equations systems with weaker than the Lipschitz conditions assumptions are established.

Key words*: differential inequalities, on-side Lipschitz condition, vector function.*