УДК 517.98

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДВОХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

А. М. Краснодембський

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

У статті встановлено умови збіжності послідовностей, що визначають розв'язки з нелінійними компонентами деякої системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку.

Ключові слова: *система нелінійних диференціальних рівнянь, умови збіжності, функціональний ряд, періодичність розв'язків.*

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$y_i'' = f_i\left(x, y_1, y_1', y_2, y_2'\right) \qquad \left(i=1,2\right), \tag{1}$$

де неперервні функції $f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}\right)$ $\left(i=1,2\right)$ задовольняють умови:

1. $f_i\left(x+T, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}\right) \equiv f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}\right)$ $\left(i=1,2\right)$;
2. $f_i\left(\alpha - x, -u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, -u_0^{(2)}, u_1^{(2)}\right) \equiv -f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, u_0^{(2)}, u_1^{(2)}\right)$ $\left(i=1,2\right)$;
3. $$\left|f_i\left(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, u_{02}^{(2)}, u_{12}^{(2)}\right) - f_i\left(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, u_{01}^{(2)}, u_{11}^{(2)}\right)\right| \le K_0^{(1)}\left|u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}\right| + \\ + K_1^{(1)}\left|u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}\right| + K_0^{(2)}\left|u_{02}^{(2)} - u_{01}^{(2)}\right| + K_1^{(2)}\left|u_{12}^{(2)} - u_{11}^{(2)}\right| \ \left(i=1,2\right).$$

Згідно з попереднім $\left([1],[2]\right)$ диференціальне рівняння

$$y'' = \varphi\left(x\right),$$

де $$\varphi\left(x\right) \in C\,;\ \varphi\left(x+T\right) \equiv \varphi\left(x\right);\ \int_0^T \varphi\left(x\right)dx = 0$$

має неперервний, періодичний (періоду T) розв'язок $y = \overline{y}\left(x\right)$, який можна записати у формі

$$\overline{y}\left(x\right) = \int_0^x \left(x-t\right)\varphi\left(t\right)dt + \int_0^T t\varphi\left(t\right)dt + \frac{1}{2}\int_0^T t\varphi\left(t\right)dt - \frac{1}{2T}\int_0^T t^2\varphi\left(t\right)dt\,.$$

Якщо, крім того, $\varphi\left(\alpha - x\right) = -\varphi\left(x\right)$, то $\overline{y}\left(\alpha - x\right) = -\overline{y}\left(x\right)$.

Теорема 1. Якщо $\frac{13}{12}K_0T^2 + \frac{3}{2}K_1T < 1$ ($K_0 = K_0^{(1)} + K_0^{(2)}$,

$K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)}$), то система (1) має розв'язок $y_i = \overline{y}_i(x)$ $(i=1,2)$ такий, що $\overline{y}_i(x) \in C$; $\overline{y}_i(x+T) = \overline{y}_i(x)$; $\overline{y}_i(\alpha - x) = -\overline{y}_i(x)$ $(i=1,2)$.

Доведення. Побудуємо послідовності

$$\begin{aligned} y_{ik}(x) &= \int_0^x (x-t) f_i\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t)\right) dt + \\ &+ \frac{x}{T}\int_0^T t f_1\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t)\right) dt + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T t f_i\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t)\right) dt - \\ &- \frac{1}{2T}\int_0^T t^2 f_1\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t)\right) dt \\ &\qquad (i=1,2;\ k=1,2,...) \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $y_{i0}(x)$ $(i=1,2)$ – довільні неперервні, диференційовані, періодичні (періоду T) функції, що $y_{io}(\alpha - x) = -y_{io}(x)$.

В силу вказаного вище, $y_{ik}(x)$ є неперервними, періодичними (періоду T) функціями, для яких $y_{ik}(\alpha - x) = -y_{ik}(x)$ $(i=1,2;\ k=1,2,...)$.

Запишемо:

$$\begin{aligned} y'_{ik}(x) &= \int_0^x f_i\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t)\right) dt + \\ &+ \frac{1}{T}\int_0^T t f_1\left(t, y_{1k-1}(t), y'_{1k-1}(t), y_{2k-1}(t), y'_{2k-1}(t)\right) dt \\ &\qquad (i=1,2;\ k=1,2,...). \end{aligned}$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} |y_{i2} - y_{i1}| &= \Big[\max_{0\le x\le T}\Big(K_0^{(1)}|y_{11}-y_{10}| + K_1^{(1)}|y'_{11}-y'_{10}| + \\ &+ K_0^{(2)}|y_{21}-y_{20}| + K_1^{(2)}|y'_{21}-y'_{20}|\Big)\Big]\frac{13}{12}T^2\ (i=1,2); \\ |y'_{i2} - y'_{i1}| &= \Big[\max_{0\le x\le T}\Big(K_0^{(1)}|y_{11}-y_{10}| + K_1^{(1)}|y'_{11}-y'_{10}| + \\ &+ K_0^{(2)}|y_{21}-y_{20}| + K_1^{(2)}|y'_{21}-y'_{20}|\Big)\Big]\frac{3}{2}T\ (i=1,2). \end{aligned}$$

Використовуючи позначення

$$\begin{aligned} &\max_{0\le x\le T}\Big(K_0^{(1)}|y_{11}-y_{10}| + K_1^{(1)}|y'_{11}-y'_{10}| + \\ &+ K_0^{(2)}|y_{21}-y_{20}| + K_1^{(2)}|y'_{21}-y'_{20}|\Big) = M, \end{aligned}$$

отримаємо:

$$\left|y_{i2}-y_{i1}\right|\le\frac{13}{12}MT^2;\qquad\left|y'_{i2}-y'_{i1}\right|\le\frac{3}{2}MT\ \ (i=1,2).$$

Значить,

$$\left|y_{i3}-y_{i2}\right|\le\left(K_0^{(1)}\cdot\frac{13}{12}MT^2+K_1^{(1)}\cdot\frac{3}{2}MT+K_0^{(2)}\cdot\frac{13}{12}MT^2+\right.$$

$$\left.+K_1^{(2)}\cdot\frac{3}{2}MT\right)\frac{13}{12}T^2=\frac{13}{12}MT^2\left(\frac{13}{12}K_0T^2+\frac{3}{2}K_1T\right)\quad(i=1,2);$$

$$\left|y'_{i3}-y'_{i2}\right|\le\left(K_0^{(1)}\cdot\frac{13}{12}MT^2+K_1^{(1)}\cdot\frac{3}{2}MT+K_0^{(2)}\cdot\frac{13}{12}MT^2+\right.$$

$$\left.+K_1^{(2)}\cdot\frac{3}{2}MT\right)\cdot\frac{3}{2}T=\frac{3}{2}MT\left(\frac{13}{12}K_0T^2+\frac{3}{2}K_1T\right)\quad(i=1,2).$$

Нехай

$$\frac{13}{12}K_0T^2+\frac{3}{2}K_1T=q\,,$$

тоді $\left|y_{i3}-y_{i2}\right|\le\frac{13}{12}MT^2q\,;\quad\left|y'_{i3}-y'_{i2}\right|\le\frac{3}{2}MTq\quad(i=1,2)$.

Припустимо, що

$$\left|y_{ik+1}-y_{ik}\right|\le\frac{13}{12}MT^2q^{k-1};\quad\left|y'_{ik+1}-y'_{ik}\right|\le\frac{3}{2}MTq^{k-1}\quad(i=1,2).$$

Отримаємо:

$$\left|y_{ik+1}-y_{ik+1}\right|\le\left(K_0^{(1)}\cdot\frac{13}{12}MT^2q^{k-1}+K_1^{(1)}\cdot\frac{3}{2}MTq^{k-1}+\right.$$

$$\left.+K_0^{(2)}\cdot\frac{13}{12}MT^2q^{k-1}+K_1^{(2)}\cdot\frac{3}{2}MTq^{k-1}\right)\frac{13}{12}T^2=$$

$$=\left(\frac{13}{12}K_0T^2q^{k-1}+\frac{3}{2}K_1Tq^{k-1}\right)\frac{13}{12}T^2=\frac{13}{12}MT^kq^k\quad(i=1,2);$$

$$\left|y'_{ik+1}-y'_{ik+1}\right|\le\left(K_0^{(1)}\cdot\frac{13}{12}MT^2q^{k-1}+K_1^{(1)}\cdot\frac{3}{2}MTq^{k-1}+\right.$$

$$\left.+K_0^{(2)}\cdot\frac{13}{12}MT^2q^{k-1}+K_1^{(2)}\cdot\frac{3}{2}MTq^{k-1}\right)\frac{3}{2}T=$$

$$=\left(\frac{13}{12}K_0T^2q^{k-1}+\frac{3}{2}K_1Tq^{k-1}\right)\frac{3}{2}T=\frac{3}{2}MTq^k\quad(i=1,2).$$

Згідно з методом математичної індукції ряди

$$\left|y_{i0}\right|+\left|y_{i1}-y_{i0}\right|+\left|y_{i2}-y_{i1}\right|+\ldots+\left|y_{ik+1}-y_{ik}\right|\ \ (i=1,2)$$

мажоруються геометричною прогресією із знаменником q.

Отже, послідовності (2) збігаються рівномірно, тобто існують границі

$$\lim_{k\to\infty}y_{ik}\left(x\right)=\overline{y}_i\left(x\right)\ \ (i=1,2),$$

де $\overline{y}_i(x)$ є неперервні, періодичні (періоду Т) функцій, що $\overline{y}_i(\alpha - x) = -\overline{y}_i(x)$ $(i = 1, 2)$.

Переходячи в рівностях (2) до границі при $k \to \infty$, дістанемо

$$\overline{y}_i(x) = \int_0^x (x-t) f_i\left(t, \overline{y}_1(t), \overline{y}_1'(t), \overline{y}_2(t), \overline{y}_2'(t)\right) dt +$$
$$+\frac{x}{T}\int_0^T t f_1\left(t, \overline{y}_1(t), \overline{y}_1'(t), \overline{y}_2(t), \overline{y}_2'(t)\right) dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T t f_i\left(t, \overline{y}_1(t), \overline{y}_1'(t), \overline{y}_2(t), \overline{y}_2'(t)\right) dt -$$
$$-\frac{1}{2T}\int_0^T t^2 f_1\left(t, \overline{y}_1(t), \overline{y}_1'(t), \overline{y}_2(t), \overline{y}_2'(t)\right) dt \ \ (i = 1, 2).$$

Значить $y_i = \overline{y}_i(x)$ $(i = 1, 2)$ є розв'язком системи (1).

Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо $q = \frac{13}{12} K_0 T^2 + \frac{3}{2} K_1 T < 1$ і $y_i = \overline{y}_i(x)$, $z_i = \overline{z}_i(x)$ $(i = 1, 2)$, існують неперервні, періодичні (періоду Е) розв'язки системи (1), такі, що $\int_0^T \overline{y}_i(x)dx = 0$; $\int_0^T \overline{z}_i(x)dx = 0$ $(i = 1, 2)$, то $\overline{y}_i(x) = \overline{z}_i(x)$ $(i = 1, 2)$.

Доведення. В силу вказаного раніше, розв'язок $z_i = \overline{z}_i(x)$ системи (1) можна записати у вигляді

$$\overline{z}_i(x) = \int_0^x (x-t) f_i\left(t, \overline{z}_1(t), \overline{z}_1'(t), \overline{z}_2(t), \overline{z}_2'(t)\right) dt +$$
$$+\frac{x}{T}\int_0^T t f_1\left(t, \overline{z}_1(t), \overline{z}_1'(t), \overline{z}_2(t), \overline{z}_2'(t)\right) dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T t f_i\left(t, \overline{z}_1(t), \overline{z}_1'(t), \overline{z}_2(t), \overline{z}'(t)\right) dt -$$
$$-\frac{1}{2T}\int_0^T t^2 f_1\left(t, \overline{z}_1(t), \overline{z}_1'(t), \overline{z}_2(t), \overline{z}_2'(t)\right) dt \ \ (i = 1, 2).$$

Позначимо

$$L = \max_{0 \le x \le T}\left(K_0^{(1)}\left|y_{11} - \overline{z}_1\right| + K_1^{(1)}\left|y_{11}' - \overline{z}_1'\right| + K_0^{(2)}\left|y_{21} - \overline{z}_2\right| + K_1^{(2)}\left|y_{21}' - \overline{z}_1'\right|.\right.$$

Аналогічно попередньому дістанемо, що

$$\left|y_{ik}(x) - \overline{z}(x)\right| \le \frac{13}{12} L T^2 q^{k-2} \quad (i = 1, 2;\ k = 2, 3, \ldots).$$

Оскільки $q < 1$, то

$$\lim_{k \to \infty} y_{ik}(x) = \overline{z}_i(x);\ \ \overline{y}_i(x) = \overline{z}_i(x) \ \ (i = 1, 2).$$

Теорему доведено.

Література

1. А.М.Краснодембський. ДАН УРСР, 10, 1962.
2. Краснодембський А.М. // Записки мех.-математического ф-та ХГУ и Харьковского матем. общества, т. XXX, сер.4, 1964.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.10.2010 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Лучкою А.Ю.***

PERIODICITY OF DECISIONS OF SOME SYSTEM OF TWO NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF THE SECOND ORDER

A. M. Krasnodembsky
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, *Ivano-Frankivs'k, st. Carpats'ka,* 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

In the article there are the set terms of coincide of sequences, which determine the upshots with the nonlinear components of some system of two nonlinear differential equalizations of the second order

Keywords: *system of nonlinear differential equalizations, terms of coincide, functional row, periodicity of decisions.*