УДК 517.925.3

ПРО ДРУГИЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСАМИ

С. І. Гургула[1], Р. І. Собкович[2], І. Й. Перкатюк[2]

[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська,15; тел.+380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua

[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел. +380 (342) 59-60-16; e-mail: algeo@pu.if.ua, stat@pu.if.ua

Для автономної системи звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу одержано критерії стійкості, асимптотичної стійкості і нестійкості тривіального розв'язку, аналогічні тим, які дає другий метод Ляпунова для диференціальних рівнянь без імпульсів.

Ключові слова: *імпульсна дія, стійкість, функція Ляпунова.*

Розглядається автономна система диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(x), \quad t \neq t_i\,, \\ &\Delta x\big|_{t=t_i} \equiv x(t_i+0) - x(t_i) = I_i(x)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

де t – час, $t \geq t_0$, $x \in R^n$, $f \in R^n$, $I_i \in R^n$, $i = 1, 2, \ldots$.

Функція $f(x)$ вважається заданою в кулі

$$\bar{J}_h = \{x \in R^n, \|x\| \leq h, h > 0\}$$

і $f(0) = 0$, функції $I_i(x)$ визначені і неперервні $\bar{J}_h$, $I_i(0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Отже, система (1) має розв'язок $x \equiv 0$, який і досліджується на стійкість. Відносно послідовності моментів часу $\{t_i\}$, в які відбувається імпульсна дія, припускаємо, що $t_i > t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, і $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$.

Через $i(t)$ позначимо кількість імпульсних збурень на проміжку $[t_0, t]$, тобто $i(t) = i$, якщо $t_i < t \leq t_{i+1}$. Тоді функція $\dfrac{i(t)}{t - t_0}$ означатиме відносну частоту імпульсних збурень. При дослідженні питання стійкості тривіального розв'язку системи (1) важливе значення має поведінка цієї функції при $t \to \infty$.

Справедливі наступні твердження.

Теорема 1. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(x)$, така, що повсюдно в кулі $\bar{J}_h$ виконані нерівності

$$\langle grad\, V, f \rangle \leq -\varphi(V)\,, \tag{2}$$

$$V(x+I_i(x)) \le \psi(V(x)), \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{3}$$

де $\varphi(s)$, $\psi(s)$ – неперервні функції, $\varphi(0)=\psi(0)=0$, $\varphi(s)>0$, $\psi(s)>0$ при $s>0$, а послідовність $\{t_i\}$ така, що при $t>t_0$

$$\frac{i(t)}{t-t_0} \le p, \quad p = const . \tag{4}$$

Тоді, якщо при деякому $a_0 > 0$ для всіх $a \in (0, a_0]$ виконана нерівність

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{p}, \tag{5}$$

то тривіальний розв'язок системи (1) стійкий за Ляпуновим. Причому, якщо існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\int_a^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{p} - \gamma , \tag{6}$$

то цей розв'язок асимптотично стійкий.

Доведення. Нехай $0<\varepsilon<h$ і $l = \min\limits_{\|x\|\ge\varepsilon} V(x) \le a_0$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб виконувалась нерівність $m = \sup\limits_{\|x\|<\delta} V(x) < l$, і нехай $x(t)$, $x(t_0) = x_0 \in J_\delta$ – довільний нетривіальний розв'язок системи (1). Доведемо, що $x(t) \in J_\varepsilon$ при $t \ge t_0$.

Припустимо супротивне: $x(t)$ з часом покине кулю J_ε. Розглянемо функцію $v(t) = V(x(t))$. Оскільки (2) $v'(t) \le -\varphi(v(t))$, $t \ne t_i$, $x(t) \in \bar{J}_h$, що свідчить про те, що $v(t)$ спадає на кожному проміжку $(t_i, t_{i+1}]$, тому, якщо $v(t_i+0) < l$, то $v(t) < l$ для всіх $t \in (t_i, t_{i+1}]$. Це означає, що $x(t)$ може покинути кулю J_ε тільки за рахунок імпульсу. Нехай t_k – момент часу, коли це відбудеться вперше. Тобто для $t \in [t_0, t_k]$ $v(t) < l$, а $v(t_k+0) \ge l$. Із нерівності $v'(t) \le -\varphi(v(t))$, $t \ne t_i$ одержуємо

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{v'(t)}{\varphi(v(t))} dt \le -(t_i - t_{i-1}).$$

Або, після заміни $s = v(t)$, маємо для $i = 1, 2, \ldots, k$

$$\int_{v(t_i)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge t_i - t_{i-1} .$$

Додаючи такі нерівності, одержуємо

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{v(t_i)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge t_k - t_0 .$$

Ліву частину цієї нерівності перетворимо до виду

$$\int\limits_{v(t_k)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} + \sum_{i=1}^{k-1} \int\limits_{v(t_i)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

Але в силу (3) і (5) для $i = 1, 2, \ldots, k-1$

$$\int\limits_{v(t_i)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \int\limits_{v(t_i)}^{\psi(v(t_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{p},$$

така ж нерівність, оскільки $v(t_k) < a_0$, справедлива і при $i = k$:

$$\int\limits_{v(t_k)}^{v(t_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{p}. \tag{7}$$

Звідки
$$\int\limits_{v(t_k)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} + (k-1)\cdot\frac{1}{p} \ge t_k - t_0,$$

або
$$\int\limits_{v(t_k)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge t_k - t_0 - i(t_k)\cdot\frac{1}{p}.$$

Віднімаючи від цієї нерівності почленно (7) і враховуючи, що $i(t_k) + 1 = i(t_k + 0)$, маємо

$$\int\limits_{v(t_k+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge t_k - t_0 - i(t_k+0)\cdot\frac{1}{p},$$

або
$$\frac{1}{t_k - t_0} \int\limits_{v(t_k+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge 1 - \frac{i(t_k+0)}{t_k - t_0}\cdot\frac{1}{p}. \tag{8}$$

Але в силу (4) $\dfrac{i(t_k+0)}{t_k - t_0} \le p$, отже

$$\frac{1}{t_k - t_0} \int\limits_{v(t_k+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge 1 - p\cdot\frac{1}{p} = 0.$$

Що означає, що $v(t_k+0) \le v(t_0) < l$ і суперечить зробленому припущенню. Перша частина теореми доведена.

Якщо ж виконана нерівність (6), то потрібно ще довести, що $v(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Оскільки $v(t)$ спадає на проміжках $(t_{i-1}, t_i]$, то досить довести, що $v(t_i + 0) \to 0$ при $i \to \infty$. Аналогічно тому, як була одержана вище нерівність (8), одержуємо для всіх i

$$\frac{1}{t_i - t_0} \int\limits_{v(t_i+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge 1 - \frac{i(t_i+0)}{t_i - t_0}\cdot\left(\frac{1}{p} - \gamma\right),$$

що з урахуванням (4) приводить до нерівності

$$\frac{1}{t_i - t_0} \int\limits_{v(t_i+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \ge p\gamma,$$

або
$$\int_{v(t_i+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq p\gamma(t_i - t_0) .$$

Звідси одержуємо
$$\lim_{i\to\infty} \int_{v(t_i+0)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty ,$$
що можливо тільки за умови, що $\lim\limits_{i\to\infty} v(t_i+0) = 0$. Терему доведено.

Аналогічно може бути доведена теорема 2.

Теорема 2. Нехай для системи (1) існує додатно визначена функція Ляпунова $V(x)$, така, що всюди в $\bar{J}_h$ виконані нерівності
$$\langle grad\, V\, ,\, f \rangle \leq \varphi(V) \tag{9}$$
і (3), де функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ – такі ж, як і в теоремі 1, а послідовність $\{t_i\}$ така, що для всіх $t > T_0 > t_1$
$$\frac{i(t)}{t - t_0} \geq p > 0, \quad p = const . \tag{10}$$

Тоді, якщо функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$такі, що при деякому $\grave{a}_0 > 0$ для всіх $a \in (0\, ,\, a_0]$ виконана нерівність
$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{1}{p} , \tag{11}$$
то розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) стійкий. Причому, якщо можна вказати $\gamma > 0$ таке, що
$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{1}{p} + \gamma , \tag{12}$$
то цей розв'язок асимптотично стійкий.

Розглянемо теореми про нестійкість. Функція Ляпунова$V(x)$, яка фігурує в цих теоремах, повинна володіти такими властивостями:

а) область додатності $V(x)$ $D = \{x \in \bar{J}_h\, ,\, V(x) > 0\}$ дотикається до початку координат;

б) в області D $V(x)$ обмежена; позначимо $a_0 = \max\limits_{x\in D} V(x)$.

Теорема 3. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(x)$, яка володіє властивостями а) і б) така, що всюди в області D виконуються нерівності
$$\langle grad\, V\, ,\, f \rangle \geq -\varphi(V) , \tag{13}$$
$$V(x + I_i(x)) \geq \psi(V(x)) , \quad i = 1, 2, \ldots , \tag{14}$$
де функції $\varphi(s)$, $\psi(s)$ – такі ж, як в попередніх теоремах, а послідовність $\{t_i\}$ така, що виконана нерівність (10). Тоді, якщо при деякому $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0\, ,\, a_0]$

$$\int_{a}^{\psi(a)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{1}{p} + \gamma \ , \tag{15}$$

то тривіальний розв’язок системи (1) нестійкий.

Доведення. Нехай $\delta > 0$ як завгодно мале. За умовою знайдеться $x_0 \in J_\delta$ таке, що $V(x_0) > 0$. Доведемо, що розв’язок $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, з часом вийде за межі кулі $\bar{J}_h$. Припустимо супротивне: $x(t) \in \bar{J}_h$, $t \geq t_0$. Тоді неважко довести, що $x(t) \in D$. Справді, розглянемо функцію $v(t) = V(x(t))$. В силу (14) $v(t_i + 0) \geq \psi(v(t_i))$, тому ситуація $v(t_i) > 0$, а $v(t_i + 0) \leq 0$ неможлива. Отже, щоб вийти з області D, точка $x(t)$ повинна попасти на межу цієї області. Нехай $t^* \in (t_i, t_{i+1}]$ – момент часу, коли вперше виконається рівність $v(t) = 0$, тоді $v(t_i + 0) > 0$. Але в силу (13) $v'(t) \geq -\varphi(v(t))$, звідси

$$\int_{t_i}^{t^*} \frac{v'(t)dt}{\varphi(v(t))} \geq -\left(t^* - t_i\right),$$

або
$$\int_{v(t^*)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq t^* - t_i \, .$$

Але це неможливо, бо $v(t^*) = 0$, а невласний інтеграл $\int_{0}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)}$, як неважко показати, повинен бути розбіжним. Отже, $x(t) \in D$ при $t \geq t_0$, тому $v(t)$ – обмежена функція. Тоді із (13) одержуємо для $i = 1, 2, \ldots$

$$\int_{v(t_i)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq t_i - t_{i-1} \, ,$$

а також при $t_k < t \leq t_{k+1}$

$$\int_{v(t)}^{v(t_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq t - t_k \, .$$

Звідси

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{v(t_i)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} + \int_{v(t)}^{v(t_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \leq t - t_0 \, .$$

Але
$$\sum_{i=1}^{k} \int_{v(t_i)}^{v(t_{i-1}+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} + \int_{v(t)}^{v(t_k+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \equiv \int_{v(t)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} + \sum_{i=1}^{k} \int_{v(t)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \, ,$$

а в силу (14) і (15)

$$\int_{v(t_i)}^{v(t_i+0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \int_{v(t_i)}^{\psi(v(t_i))} \frac{ds}{\varphi(s)} \geq \frac{1}{p} + \gamma \, .$$

Отже
$$\int_{v(t)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le t - t_0 - i(t)\left(\frac{1}{p} + \gamma\right),$$
або
$$\frac{1}{t-t_0}\int_{v(t)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le 1 - \frac{i(t)}{t-t_0}\left(\frac{1}{p} + \gamma\right).$$

Враховуючи (10) для $t > T_0$ маємо
$$\frac{1}{t-t_0}\int_{v(t)}^{v(t_0)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le 1 - p\left(\frac{1}{p} + \gamma\right) = -p\gamma < 0\,.$$

Звідси випливає, що $v(t) > v(t_0)$, але оскільки $x(t) \in D$, то $v(t) \le a_0$. Позначимо $m = \min\limits_{v(t_0) \le s \le a_0} \varphi(s)$, очевидно $m > 0$, тоді
$$p\gamma \le \frac{1}{t-t_0}\int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{t-t_0}\cdot\frac{1}{m}\int_{v(t_0)}^{v(t)} ds = \frac{v(t) - v(t_0)}{m(t-t_0)},$$
або $v(t) \ge v(t_0) + p\gamma m(t - t_0)$, що означає, що функція $v(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ і не може бути обмеженою. Це і доводить теорему.

Справедлива також наступна теорема, яка доводиться аналогічно.

Теорема 4. Нехай для системи (1) існує функція Ляпунова $V(x)$, наділена властивостями а) і б), і така, що всюди в області D виконані нерівності
$$\langle grad\, V\,,\, f\rangle \ge \varphi(V) \tag{16}$$
і (14) з такими ж функціями $\varphi(s)$ і $\psi(s)$, що і в попередніх теоремах, а послідовність $\{t_i\}$ така, що при $t > t_0$ виконана нерівність (4).

Тоді, якщо за деякого $\gamma > 0$ для всіх $a \in (0,\, a_0]$
$$\int_{\psi(a)}^{a} \frac{ds}{\varphi(s)} \le \frac{1}{p} - \gamma, \tag{17}$$
то розв’язок $x \equiv 0$ системи (1) нестійкий.

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Самойленко А.М. Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17, № 11. – С. 1995-2001.
3. Гургула С.І. Про стійкість розв’язків імпульсних систем / С.І. Гургула, М.О. Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип. 23. – С. 33-40.
4. Гургула С.І. Про другий метод Ляпунова в системах з імпульсною дією / С.І. Гургула, І.Й. Перкатюк // Прикарпатський вісник НТШ, Число. – 2008. – № 1(1). – С. 9-15.
5. Гургула С.І. Про стійкість в системах з імпульсами / С.І. Гургула, Р.І. Собкович // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – №1(5). – С. 24-29.

Стаття надійшла до редакційної колегії 04.07.2010 р.
Рекомендовано до друку академіком НАН України,
*професором **Перестюком М.О.***

ABOUT THE SECODARY LIAPUNOV'S METHOD FOR DIFFERENTIAL EQATIONS WITH IMPULSES

S. I. Gurgula[1], R. I. Sobkovych[2], I. Y. Percatyoc[2]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76000, Ivano-Frankivs'k, st. Carpats'ka street, 15;
ph. +380 (3422) 4-21-23; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]PreCarpathian National University named after Vasyl Stefanik;
76000, Ivano-Frankivs'k, st. Shevchenko, 57;
ph. +380 (342) 59-60-16; e-mail: algeo@pu.if.ua, stat@pu.if.ua

Criteries of stability, asymptotic stability and non-stability of simple solution in an analogy to those according to the secondary Liapunov's method for differential equations without impulses, were issued for autonomial system of ordinary differential equations with impulsive action in the fixed moments of time.

***Key words:** impulsive action, stability, function of Liapunov.*